Il teorema del viriale

Giuseppe Dalba

In questi appunti dimostriamo il cosidetto "teorema del viriale", ovvero una relazione che lega il valor medio dell'energia cinetica e dell'energia potenziale per sistemi che si muovono in una porzione limitata dello spazio. Cominciamo con il caso semplice di una sola particella di massa m, individuata dal vettore posizione $\vec{r}$, soggetta ad una forza conservativa $\vec{F}$. Indicheremo con T la sua energia cinetica. Definiamo la quantità scalare $A = m\vec{v} \cdot \vec{r}$ e calcoliamo la sua derivata rispetto al tempo:

$$\frac{dA}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{r} + m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{a} \cdot \vec{r} + mv^2 = \vec{F} \cdot \vec{r} + 2T$$

Se il moto della particella è limitato nello spazio, $\vec{v} \cdot \vec{r}$ e quindi A rimangono pure limitati (ricordiamo che la forza è conservativa, quindi T e di conseguenza v^2 sono limitate dall'energia totale della particella). Pertanto, la media temporale della derivata di A deve tendere a zero:

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dA}{dt} dt = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{A(0)}^{A(\tau)} dA = \lim_{\tau \to \infty} \frac{A(\tau) - A(0)}{\tau} = 0$$

Utilizzando questo fatto e prendendo la media temporale della espressione precedente troviamo una relazione fra la media di T e la media di $\vec{F} \cdot \vec{r}$:

$$0 = \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \left\langle \vec{F} \cdot \vec{r} \right\rangle + 2\langle T \rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \vec{F} \cdot \vec{r} \right\rangle$$

La quantità che uguaglia $\langle T \rangle$ nell'espressione precedente viene detta *viriale della particella*. Se $\vec{F}$ è una forza centrale conservativa possiamo riscrivere la relazione fra T e $\vec{F}$ come una relazione fra T ed il potenziale $U(r)$; infatti la forza diventa semplicemente $\vec{F} = -\hat{r}\frac{dU}{dr}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = -\hat{r}\frac{dU}{dr} \cdot r\hat{r} = -r\frac{dU}{dr} \qquad \Rightarrow \qquad \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \vec{F} \cdot \vec{r} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle r\frac{dU}{dr} \right\rangle$$

Se U è un potenziale coulombiano attrattivo (ovvero $U(r) = -\frac{k}{r}$ con $k > 0$) otteniamo:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle r\frac{k}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{k}{r} \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle U(r) \rangle$$

Abbiamo quindi ottenuto una relazione fra la media temporale dell'energia cinetica e la media temporale dell'energia potenziale della particella. Passiamo ora al caso di un gran numero di particelle; la i-esima particella sarà caratterizzata dalla massa m_i e dalla posizione $\vec{r}_i$, e sarà soggetta alla risultante delle forze esterne $\vec{F}_i^{(e)}$ ed alle forze interne $\vec{F}_{ij}$ (j in questo caso indicizza una qualsiasi altra particella diversa dalla i-esima). Di nuovo, definiamo la quantità:

$$A = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i$$

La derivata di A rispetto al tempo ora diventa:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2T_i \right)$$

dove $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$ è la forza totale agente sulla i-esima particella (la risultante di tutte le forze esterne applicate alla particella i-esima e di tutte le forze interne fra questa particella ed un'altra particella del sistema) e T_i è l'energia cinetica di questa particella. Sostituendo la definizione di $\vec{F}_i$ otteniamo:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\vec{F}_i^{(e)} \cdot \vec{r}_i + 2T_i \right) + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i$$

Ma le forze interne obbediscono al terzo principio della dinamica, ovvero $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, per cui i termini della ultima sommatoria si possono raggruppare a due a due:

$$\vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}$$

dove abbiamo introdotto la posizione relativa $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Mettendo tutto assieme, ed introducendo l'energia cinetica totale del sistema $T = \sum_i T_i$, arriviamo ad una espressione relativamente semplice per la derivata di A:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} + 2T$$

In maniera identica a prima si dimostra che la media temporale della derivata di A si annulla quando il moto di tutte le particelle del sistema è limitato nello spazio, quindi possiamo scrivere:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} \right\rangle$$

Questo è il teorema del viriale per un sistema di particelle. Come prima l'espressione può essere semplificata considerando che le quantità del tipo $\vec{F} \cdot \vec{r}$ sono niente altro che il lavoro delle forze $\vec{F}$. Per questo, introduciamo il lavoro medio totale delle forze esterne e delle forze interne:

$$\left\langle L^{(e)} \right\rangle = \left\langle \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \vec{r}_i \right\rangle \qquad \text{e} \qquad \left\langle L^{(i)} \right\rangle = \left\langle \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} \right\rangle$$

per ottenere:

$$\langle T \rangle = -\frac{\left\langle L^{(e)} \right\rangle + \left\langle L^{(i)} \right\rangle}{2}$$

L'espressione si semplifica ulteriormente considerando vari casi particolari. Per esempio, se il sistema è un corpo rigido, oppure un gas di particelle non interagenti, il lavoro delle forze interne è nullo. Se il campo di forze esterno è centrale, ogni termine $\vec{F}_i^{(e)} \cdot \vec{r}_i$ si riduce a $-r_i \frac{dU}{dr_i}$ ($U(r)$ è il potenziale che determina il campo centrale). Se il potenziale centrale infine è coulombiano otteniamo un'espressione identica al caso di singola particella:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

dove però ora T è l'energia cinetica totale di tutte le particelle del sistema ed U è l'energia potenziale totale pari a $\sum_i U(r_i)$.