cendo attenzione ai precedenti ragionamenti, si ricava subito, che per tutti i valori di λ (o λ') essa deve ridursi ad una funzione di λ' (o λ), che è un quadrato perfetto. Dunque il determinante del primo membro della 8) sarà della forma $(m\lambda+n\lambda\lambda'+p\lambda'+q)^2$, e l'equazione della suddetta corrispondenza espressa da:

$$m\lambda+n\lambda\lambda'+p\lambda'+q=0.$$

Sostituendo ora in quest'equazione al posto di λ, λ' i loro valori desunti dalle 3), 5), ne risulterà un'equazione di 4° grado in x, y, la quale dovrà necessariamente contenere come fattore il primo membro della 2^da^ delle 4), e perciò liberata da esso si ridurrà ad un'equazione di 3° grado in x, y:

9) . . . . $F(x, y)=0$,

rappresentante una curva di 3° ordine.

Il fin qui detto può riassumersi nel seguente teorema:

Si posson sempre determinare in un piano due sistemi projettivi di cerchi, che seghino una retta di quel piano in coppie di punti appartenenti a una medesima involuzione quadratica; i punti d'intersezione dei cerchi corrispondenti de' due sistemi, che non giaccion su quella retta, son situati sopra una curva di terz'ordine, che passa pei punti comuni ai cerchi di ciascun sistema (*).

Che questo modo di generazione possa applicarsi a qualsivoglia cubica, si dimostra con facilità. Si osservi infatti, che i coefficienti delle potenze di x, y nella 9) dipendono dalle dodici costanti che determinano i due sistemi di cerchi 3), 5), e dalle coordinate dei punti p_1, p_2, delle quali quantità essi son funzioni razionali intere. Fra queste sedici quantità, che son necessarie alla completa determinazione della curva 9), sussistono quattro equazioni di condizione [le 1), 2), 7)], in modo che dodici di esse posson esser determinate ad arbitrio. Possiam dunque sempre disporne in modo, che quei coefficienti ricevano valori tali, da rendere la 9) identica coll'equazione di una qualunque curva del terz'ordine. Ne risulta quindi quest'altro teorema:

Una curva del terz'ordine può sempre generarsi per mezzo di due sistemi di cerchi definiti come nel teorema precedente, e una simile generazione è possibile in infiniti modi.

Faremo notare infine, che se la curva di quart'ordine generata da due sistemi projettivi di cerchi, si decompone in una retta e in una cubica, i cerchi corrispondenti de' due sistemi che non si segano sulla cubica, s'incontreranno necessariamente su quella retta in coppie di punti in involuzione.

Como in Novembre 1873.

(*) È supposto qui che la retta, sulla quale giace l'involuzione quadratica, non passi mai per alcuno di questi punti.

GIORNALE

DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

PUBBLICATO PER CURA DEL PROFESSORE

G. BATTAGLINI

Volume XII. - 1874

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
Strada di Chiaia, 60

Stabilimento Tipografico, Strada Medina 25.

INDICE

GIORNALE

DI MATEMATICHE

AD USO DEGLI STUDENTI

DELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

SULL'INTEGRALE $\int F(x)\, lx\, dx$, ESTESO FRA LIMITI REALI E POSITIVI, QUANDO LA $F(x)$ SIA UNA FUNZIONE RAZIONALE

PER

DAVIDE BESSO

1. Colla decomposizione della funzione razionale, l'integrale di cui si tratta viene decomposto in tanti termini della forma $\int x^m\, lx\, dx$, $\int \frac{lx}{(x-a)^n} dx$, il primo dei quali si può sempre esprimere in termini finiti, e il secondo pure quando sia $n>1$, come si rileva facilmente coll'integrazione per parti. Resta quindi a considerare il caso di $n=1$, cioè l'integrale $\int \frac{lx\, dx}{x-a}$.

Supponendo dapprima che a sia reale e ponendo $x=\pm az$, secondo che a è positivo o negativo, quest'integrale si ridurrà agli altri due:

$$\int \frac{lx\, dx}{1+x}, \int \frac{lx\, dx}{1-x}.$$

Poniamo ora: $$\int_1^\beta \frac{lx\, dx}{1+x} = \lambda(\beta), \quad \int_1^\beta \frac{lx\, dx}{1-x} = \mu(\beta),$$

dove supponiamo che β sia reale e positivo. Si dimostra facilmente che ambedue queste funzioni sono sempre finite e continue. La derivata della λ è sempre negativa per $\beta<1$ e positiva per $\beta>1$; epperciò questa funzione che s'annulla per $\beta=1$, sarà positiva e decrescente da 0 ad 1, ancora positiva ma crescente per $\beta>1$, e diverrà infinita per β infinita. Esaminando la derivata seconda si trova inoltre, che la curva $y=\lambda(\beta)$ è convessa da $\beta=0$ ad un valore di β che è compreso fra $3{\cdot}591$ e $3{\cdot}592$ ed è concava da questo valore di β in poi. La funzione μ è anch'essa po-