GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI

PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI

NELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

FONDATO NEL 1863

PROSEGUITO DAL PROFESSORE

ALFREDO CAPELLI

Volume XXXIII — (2° della 2ª Serie)
1895.

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
Via Gennaro Serra, 20.
1895.

I fattori pari di σ o non entrano in g, o vi entrano un numero pari di volte, e viceversa.

Perciò, supposto che non esistano sovrapposizioni, possiamo, distinguendo i fattori di σ e g in sette categorie, formare il seguente quadro:

$$\sigma = u^1 \ldots v^{2\pi+1} \ldots w^1 \ldots z^{2\mu+1} \ldots h^0 \quad \ldots i^{2\varepsilon} \ldots l^{2\rho}$$

$$g = u^1 \ldots v^1 \quad \ldots w^3 \ldots z^{2\nu+1} \ldots h^{r(r-1)} \ldots i^0 \ldots l^{2\tau}.$$

I fattori u sono semplici in σ e g · $-u=0$ in generale rappresenta una curva inviluppo, in particolare una curva integrale multipla.

I fattori v entrano una sola volta in g e più volte in σ. $-v=0$ rappresenta sempre una curva integrale multipla.

I fattori w entrano tre volte in g e una volta in σ. $-w=0$ rappresenta in generale un luogo di cuspidi, in particolare una curva integrale multipla.

I fattori z sono fattori multipli e dispari di g e σ. $-z=0$ in generale rappresenta un luogo di punti multipli con tangenti coincidenti (punti di singolarità superiore alla cuspide) in particolare rappresenta una curva integrale multipla.

I fattori h non entrano che in g · $-h=0$ non è mai una soluzione, ma rappresenta un luogo di punti r^{pli} con tangenti distinte.

I fattori i non entrano che in σ · $-i=0$ rappresenta in generale un luogo di punti di contatto di curve integrali diverse, in particolare una curva integrale multipla.

I fattori l entrano in σ e g un numero pari di volte. $-l=0$ in generale rappresenta un luogo di punti di contatto di curve integrali con sè stesse, in particolare una curva integrale multipla.

(continua)

SOPRA

I SISTEMI LINEARI DI CURVE ALGEBRICHE PIANE

DI

EDGARDO CIANI.

Le considerazioni seguenti si svolgono nel medesimo ordine d'idee delle « *Ricerche sopra i sistemi lineari di curve piane* » del prof. G. Castelnuovo (*). Noi ci poniamo nelle stesse ipotesi prestabilite in quella Memoria, ne adopreremo continuamente i resultati e anche le notazioni: dovendola citare ci serviremo per brevità del simbolo C con l'indicazione del § utile caso per caso.

È quindi opportuno anzitutto riportare qui il significato di tali simboli e notazioni insieme a qualcuno dei resultati principali.

I sistemi di curve algebriche piane i quali formano oggetto di questi studii sono quelli definiti completamente dai loro punti base.

Siffatti sistemi si ottengono scegliendo fra tutte le curve di uno stesso ordine n quelle che soddisfano a condizioni lineari esprimenti soltanto il passaggio multiplo, o semplice per determinati punti del piano il cui gruppo indichiamo con A.

Ora, può darsi che assegnando la moltiplicità ν_i nel punto base i alla curva generica del sistema, essa venga a passare per quel punto con una moltiplicità superiore a ν_i in conseguenza di tutte le condizioni a cui il sistema è sottoposto.

Quest'ultima che è superiore o uguale a ν_i si chiama « *moltiplicità effettiva* » del sistema nel punto base i, mentre il numero ν_i vien detto « *moltiplicità virtuale* ». Analogamente, il numero K definito dalla

$$K = \frac{1}{2}\{n(n+3) - \Sigma\nu(\nu+1)\}$$

(*) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. Serie II, T. XLII anno. 1891.

si chiama « *dimensione virtuale* » del sistema, mentre vien chiamata « *dimensione effettiva* » il numero k dei punti arbitrari del piano per i quali passa una sola curva del sistema. Se $k = K$ il sistema si chiama « *regolare* », se $k > K$ il sistema è detto « *sovrabbondante* » e la differenza $k - K$ esprime la « *sovrabbondanza* » del sistema. Quando il sistema è costituito da una sola curva è $k=0$. Se un sistema è sovrabbondante esistono quindi dei vincoli che legano i punti base, ma non viceversa. Infatti si costruiscono facilmente sistemi regolari i cui punti base sono vincolati (ad esempio quello formato da tutte le cubiche aventi tre punti base semplici in linea retta è regolare perchè il numero dei punti base è inferiore a nove (C § 26).

« *La serie caratteristica* » del sistema è quella segnata sopra la curva generica da tutte le altre. La condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema sia regolare si esprime molto semplicemente esigendo che la serie caratteristica sia *non speciale* (C § 18).

Il numero D definito dalla relazione

$$D = n^2 - \Sigma \nu^2$$

esprime generalmente il numero delle intersezioni di due curve del sistema fuori dei punti base (o secondo la denominazione di Castelnuovo il numero delle intersezioni rispetto ad A), ma molte volte un tal significato geometrico può mancare riuscendo D nullo, o negativo. In ogni caso però noi seguiteremo a chiamare D il « *grado* » del sistema.

Il sistema aggiunto d'ordine $n - 3$ è in generale costituito da una parte fissa e da un sistema irriduttibile. Quest'ultimo è il cosidetto « *sistema aggiunto puro* » di Castelnuovo ed ha carattere invariantivo per trasformazioni Cremoniane (C § 27). Noi manterremo insieme alle altre anche questa denominazione e chiameremo « *sistema aggiunto totale* » l'intero sistema aggiunto d'ordine $n - 3$. Se k', K' ne sono le dimensioni effettiva e virtuale, i numeri

$$p = k' + 1 \quad , \quad P = K' + 1$$

si dicono i *generi effettivo e virtuale* del sistema.

Segue $p \geq P$. Se il sistema è irriduttibile si ha $p = P$.

I numeri k, K, s, D, p, P hanno carattere invariantivo per trasformazioni cremoniane (C § 8) e fra di essi passa la nota relazione

$$D = K + P - 1$$

ovvero l'altra ugualmente utile:

$$3n - \Sigma \nu = K - P + 1.$$

Nel seguito, parlando di sistemi lineari e delle loro curve fondamentali sottintenderemo sempre il carattere di irriduttibilità tanto per gli uni quanto per le altre a meno che non si dica espressamente il contrario. Quello che dovremo esporre riguarda diversi capitoli che tratteremo separatamente.

I. – Le curve fondamentali proprie ed improprie.

1. Cominceremo dal distinguere due specie di curve fondamentali. Vedremo in seguito la opportunità di questa distinzione.

Una curva fondamentale la diremo « *impropria* » quando, mediante una conveniente trasformazione Cremoniana si può ridurla a un punto che non sia un punto base del sistema trasformato. In ogni altro caso la chiameremo « *propria* ».

La ragione della prima denominazione muove dall'osservare che la presenza di una curva fondamentale impropria nel sistema è puramente accidentale tant'è vero che essa può eliminarsi senza lasciar traccia di sè nel sistema, eseguendo quella trasformazione cremoniana per cui essa riducesi a un punto. Per esempio, nel sistema di curve del 4^0 ordine $[a_1^2\, a_2^2\, b_1]$ la retta $a_1\, a_2$ è una curva fondamentale impropria, perchè eseguendo la trasformazione quadratica che ha i vertici nei punti base si trova un sistema di curve del 3^0 ordine con due punti semplici a comune e nel quale non è più traccia della retta $a_1\, a_2$. Precisamente perchè la retta suddetta si è trasformata in un punto (l'omologo di b_1) il quale non è fra i punti base del sistema trasformato.

2. Sorge qui spontanea l'idea di esaminare il caso in cui una curva fondamentale possa ridursi a un punto base del sistema trasformato, ma prima di venire a parlare di questo è utile stabilire il teorema seguente il quale serve a caratterizzare le curve fondamentali improprie.

« *La condizione necessaria e sufficiente perchè una curva fondamentale sia impropria è che sia razionale e regolare* ».

La condizione è necessaria. Sia infatti f la curva considerata. Indichiamo con l'indice f i suoi elementi (genere, dimensione virtuale ecc.); sia T la trasformazione cremoniana per la quale f è ridotta a un punto P. Aggiungiamo a T una trasformazione quadratica la quale abbia un punto fondamentale in P e gli altri due comunque. Otterremo così una trasformazione T' per la quale f corrisponde, cremonianamente a una retta. Il genere di questa retta è zero e anche la dimensione virtuale è zero, perchè se la retta contenesse più di due punti base del sistema trasformato, effettuando la inversa della trasformazione quadratica suddetta troveremmo nel punto fondamentale P non un punto qualunque del piano, ma un punto base del sistema trasformato. Ora, il genere e la dimensione virtuale si mantengono attraverso qualunque trasformazione cremoniana (C § 8), dunque

$$K_f = 0 \quad , \quad p_f = 0.$$

La condizione è sufficiente. Ciò risulta dal 1° § di una nota del prof. Bertini (*) finchè le singolarità della curva che si considera e quelle che vanno introducendosi per effetto delle trasformazioni che occorrono, sieno ordinarie: se fra di esse ve ne sono delle straordinarie, basta ripetere un ragionamento applicato dal Noether in un caso più generale e migliorato poi dal Guccia (**) per assicurarsi che il teorema è vero.

3. Si può aggiungere di più, che quando il sistema dato non sia un fascio (il che molte volte escluderemo) le due condizioni stabilite dal teorema precedente (e cioè $K_f = 0$, $p_f = 0$) non sono indipendenti: la 2ª è conseguenza della 1ª. Infatti in tale ipotesi, il grado appartenente a una curva fondamentale è negativo (C § 25 (6)), cioè

$$D_f = p_f + K_f - 1 < 0 ,$$

ma

$$K_f = 0 \quad , \quad p_f \geq 0$$

dunque $p_f = 0$.

« *Se il sistema dato non è un fascio ogni curva fondamentale regolare è necessariamente razionale e quindi impropria* ».

4. Dai §§ precedenti segue quindi che una curva fondamentale propria, deve anzitutto essere sovrabbondante, quanto al genere essa può essere razionale, o no.

Se non è razionale è certo che non esiste trasformazione cremoniana capace di ridurla a un punto, essa è per così dire permanentemente attaccata al sistema e la sua presenza non dipende da qualche particolare trasformazione cremoniana che l'abbia introdotta, per cui può dirsi che i suoi numeri K_f, p_f forniscano altrettanti caratteri invariantivi del sistema medesimo. D'onde l'appellativo di propria. Per esempio, il sistema di tutte le curve di 6° ordine aventi 24 punti base semplici sopra una quartica generale, possiede questa quartica come curva fondamentale propria. Però nella definizione che noi abbiamo dato di curva fondamentale propria rientrano anche quelle sovrabbondanti razionali. Or bene, come fra poco vedremo, una gran parte di esse sono ancora riducibili a punti mediante convenienti trasformazioni cremoniane. Sembrerebbe dunque a prima vista, inopportuno l'aggettivo *proprio* applicato a tali curve. Ma vedremo anche, che quei punti non sono già punti qualsiasi del piano, ma precisamente punti base del sistema trasformato e godono inoltre di una particolare proprietà la quale serve ancora a giustificare il nome di « *proprie* » dato alle curve fondamentali che li hanno generati.

(*) Bertini. — Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli. – Giornale di matematica (1877).

(**) Guccia. — Generalizzazione di un teorema di Noether. — Rendic. circ. mat. di Palermo, 1886.

5. Intanto, l'esistenza di curve fondamentali sovrabbondanti che si possono ridurre a punti, non è dubbia.

Un esempio semplicissimo è fornito dalle curve di terzo ordine aventi tre punti base semplici sopra una stessa retta r. La r è evidentemente una curva fondamentale con la sovrabbondanza uguale a uno. Se si trasforma quadraticamente ponendo due punti fondamentali in due dei punti base, si trova un sistema di curve di 4° ordine con due punti doppi comuni e tangenti in uno stesso punto R a una medesima retta. Per effetto della trasformazione la retta r si è ridotta a un punto base R del sistema trasformato, punto base che devesi riguardare come straordinario perchè costituito da due punti base infinitamente vicini. La retta r che li unisce, cioè la tangente comune in R a tutte le curve del sistema, corrisponde a quel punto base del sistema primitivo che apparteneva alla r e che non fu preso come punto fondamentale della trasformazione. In questo caso possiamo dunque dire che, per effetto della trasformazione suddetta, la r si è eliminata, ma le si è sostituito un punto base semplice con la ulteriore particolarità che tutte le curve del sistema trasformato hanno ivi una direzione fissa. Se la trasformazione precedente avesse avuto due punti fondamentali sempre sulla r, ma fuori dei punti base, ovvero uno in un punto base e l'altro no, la r si sarebbe ancora ridotta a un punto e ivi si avrebbero avuti 3, o 2 rispettivamente rami fissi del sistema trasformato. Insomma è impossibile ridurre la r a un punto che non sia punto base straordinario per il sistema trasformato. Tutti i rami per il punto sono fissi. Quanto al loro numero, esso può superare di una, o due unità la sovrabbondanza di r, *ma non può esserle inferiore*. Onde può dirsi che la sovrabbondanza stessa, si muti per effetto della trasformazione, nel *minor numero possibile* di rami fissi che il sistema trasformato possiede nel punto al quale la curva è ridotta e quindi in questo senso tal numero (o sovrabbondanza) ha carattere invariantivo. È dunque naturale di riguardare la r come curva fondamentale propria sebbene riducibile a un punto.

6. Questi concetti si generalizzano immediatamente così:

« *Se una curva fondamentale propria è riducibile a un punto, esso è un punto base straordinario per il sistema trasformato, tutti i rami per quel punto sono fissi ed in numero uguale alla sovrabbondanza della curva fondamentale, ovvero superiore di una o due unità.*

Infatti riduciamo a una retta la nostra curva fondamentale mediante opportuna trasformazione cremoniana. Siccome la dimensione virtuale K_f si mantiene attraverso qualunque trasformazione cremoniana (C § 8) così la retta avrà la dimensione virtuale K_f e quindi la sovrabbondanza $-K_f$ per cui essa conterrà $2-K_f$ punti base del sistema trasformato. Se ora eseguiamo una ulteriore trasformazione quadratica, prendendo due punti fondamentali sopra la retta (in punti base, o no del sistema), la verità dell'affermazione fatta risulta evidente.

7. Una gran parte delle curve fondamentali proprie razionali sono riducibili a punti. Non conosciamo un criterio decisivo per giudicare facilmente quando ciò avvenga: però ripetendo il seguente processo (che il Guccia applica a una questione più generale (*)) ci si persuade facilmente come l'affermazione precedente possa sussistere. Sia m l'ordine della curva fondamentale, μ_h la sua moltiplicità nel punto base h ed abbiasi

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \ldots$$

Per ipotesi è

$$(m-1)(m-2) - \Sigma\, \mu_h(\mu_h - 1) = 0$$

e per definizione

$$K_f = \frac{1}{2}\{\, m(m+3) - \Sigma\, \mu_h(\mu_h + 1)\,\} \qquad (K_f < 0)$$

da cui segue

$$\sum_1 \mu_h^2 = m^2 + 1 - K_f$$

$$\sum_1 \mu_h = 3m - 1 - K_f$$

esse possono anche scriversi

$$\sum_4 \mu_h^2 = m^2 + 1 - K_f - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2$$

$$\sum_4 \mu_h = 3m - 1 - K_f - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3.$$

Moltiplichiamo l'ultima per μ_3 e sottragghiamo:

$$\mu_3 \sum_4 \mu_h - \sum_4 \mu_h^2 = m(3\mu_3 - m) + \mu_1^2 + \mu_2^2 -$$

$$- \mu_3(\mu_1 + \mu_2 + 1) - 1 - K_f(\mu_3 - 1)$$

(*) Guccia. – Generalizzazione di un teorema di Noether (Tomo I fasc. 3, 1886 Circolo mat. di Palermo. Rendiconti).

e poichè il 1° membro è positivo, o nullo, sarà anche

$$m(3\mu_3 - m) + \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3(\mu_1 + \mu_2 + 1) - 1 - K_f(\mu_3 - 1) \geq 0.$$

Supponiamo adesso che si abbia:

$$m \geq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

segue $m \geq 3\mu_3$. – Allora si vede subito che, a più forte ragione sarà:

$$(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2) + \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3(\mu_1 + \mu_2 + 1) - 1 - K_f(\mu_3 - 1) \geq 0$$

cioè:

$$2(\mu_3^2 - \mu_1\mu_2) - 1 - \mu_3 - K_f(\mu_3 - 1) \geq 0$$

Se dunque $-K_f$, cioè la sovrabbondanza della curva, è tale che sia

$$2(\mu_3^2 - \mu_1\mu_2) - 1 - \mu_3 - K_f(\mu_3 - 1) < 0$$

è impossibile realizzare l'ipotesi $m \geq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$. Per questo basta che

$$-K_f < \frac{2(\mu_1\mu_2 - \mu_3^2) + 1 + \mu_3}{\mu_3 - 1}.$$

Dunque se $-K_f$ soddisfa a questa condizione l'ordine della f può essere abbassabile mediante opportuna trasformazione cremoniana e può darsi che la f sia riducibile a un punto. In particolare, la condizione è certo soddisfatta se $\mu_3 = 1$. Si vede facilmente allora che la f è una curva d'ordine m con un punto $(m-1)^{-plo}$. Trasformando quadraticamente con un punto fondamentale nel punto multiplo e gli altri due punti fondamentali in due punti semplici si trova una curva d'ordine $m-1$ con un punto $(m-2)^{-plo}$ e così via.

Dunque:

« *Ogni curva fondamentale d'ordine* m *con un punto* $(m-1)^{-plo}$ *in un punto base del sistema e passante almeno per altri* $2m+1$ *punti base è una curva fondamentale propria riducibile a un punto* ».

Come esempio si può citare il sistema di tutte le curve di 8° ordine aventi un punto quadruplo in un punto triplo di una curva del 4° e passanti semplicemente per altri 20 punti di quest'ultima.

Essa è una curva fondamentale propria razionale con la sovrabbondanza uguale a 6 e riducibile a un punto.

8. Prima di chiudere questo capitolo osserveremo due proprietà delle curve fondamentali improprie le quali ci saranno utili in seguito. La 1ª risulta immediatamente dal § 27 C e dal § 2 di questa Memoria:

« *Ogni curva fondamentale impropria si stacca dal sistema aggiunto totale* ».

9. La 2ª si dimostra mediante la formola (C § 13)

$$K_{12} = K_1 + K_2 + I$$

nella quale K_1, K_2 sono le dimensioni virtuali di due curve fondamentali, K_{12} è quella della curva fondamentale composta di entrambe e I è il numero delle intersezioni, rispetto ad A delle prime due.

Poichè $K_{12} \leq 0$ segue

$$I \leq -(K_1 + K_2).$$

Se $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ è $I = 0$. Onde (§ 3):

« *Due curve fondamentali improprie non si segano fuori dei punti base del sistema* » (*).

II. – La parte fissa del sistema aggiunto totale.

10. Ogni curva che si stacca dal sistema aggiunto totale è fondamentale per il sistema dato (C § 27) quindi la parte fissa suddetta è ancora una curva fondamentale (in generale composta) per il sistema primitivo [C]. Abbiamo già veduto, come a questa parte fissa appartenga una curva fondamentale impropria qualunque (§ 8). Vogliamo ora esaminare, il modo di presentarsi di una curva fondamentale impropria f nel sistema aggiunto totale. Per questo, supponiamo che il punto M, a cui una tal curva può esser ridotta, pure non essendo punto base per il sistema dato [C], possa esserlo per il sistema aggiunto e precisamente con la moltiplicità μ (≥ 0). Consideriamo la trasformazione per la quale M diviene f e per vederne le particolarità eseguiamo la prima trasformazione quadratica che compone (insieme ad altre) tale trasformazione. Prendiamo in M uno dei punti fondamentali, e prima consideriamo il caso in cui gli altri due N e P siano punti base per il sistema dato, con le moltiplicità rispettive ν_2, ν_3 ($\nu_2 > 0$, $\nu_3 > 0$). Sia $[C_0]$ il sistema trasformato di [C] e M′N′P′ il triangolo fondamentale del piano trasformato. Il sistema $[C_0]$ è d'ordine

$$2n - \nu_2 - \nu_3$$

(*) Bertini. — Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve algebriche piane. Rendiconti del circ. mat. di Palermo 1888.

con le moltiplicità seguenti in

$$M' \equiv n - \nu_2 - \nu_3 \quad , \quad N' \equiv n - \nu_3 \quad , \quad P' \equiv n - \nu_2 .$$

Trasformiamo l'aggiunto totale di [C]. Troveremo un sistema d'ordine

$$2n - \mu - \nu_2 - \nu_3 - 4$$

con le moltiplicità seguenti in

$$M' \equiv n - 1 - \nu_2 - \nu_3 \quad , \quad N' \equiv n - \mu - \nu_3 - 2 \quad , \quad P' \equiv n - \mu - \nu_2 - 2$$

il quale evidentemente deve far parte dell'aggiunto totale di $[C_0]$. Ma l'aggiunto totale di $[C_0]$ è dell'ordine

$$2n - \nu_2 - \nu_3 - 3$$

con le molteplicità

$$M' \equiv n - \nu_2 - \nu_3 - 1 \quad , \quad N' \equiv n - \nu_3 - 1 \quad , \quad P' \equiv n - \nu_2 - 1$$

dunque esso si compone del trasformato dell'aggiunto totale di [C] e della retta N′P′ contata $\mu + 1$ volte.

Alla medesima conclusione si giunge se i punti N e P non sono punti base per il sistema dato.

Anzi, per maggior generalità, supponiamo che N e P abbiano le molteplicità ν e π per il sistema aggiunto totale senza escludere per ν e π i valori zero. Allora il sistema $[C_0]$ è d'ordine $2n$ con le molteplicità

$$M' \equiv n \quad , \quad N' \equiv n \quad , \quad P' \equiv n.$$

Il trasformato dell'aggiunto totale di [C] è d'ordine

$$2n - 6 - \mu - \nu - \pi$$

con le molteplicità

$$M' \equiv n - 3 - \nu - \pi \quad , \quad N' \equiv n - 3 - \mu - \pi \quad , \quad P' \equiv n - 3 - \mu - \nu$$

e deve far parte dell'aggiunto totale di $[C_0]$.

Ma quest'aggiunto totale è dell'ordine

$$2n - 3$$

ed ha le molteplicità:

$$M' \equiv N' \equiv P' \equiv n - 1,$$

dunque esso si compone del trasformato dell'aggiunto totale di [C] e delle rette $M'N'$, $N'P'$, $P'M'$ contate rispettivamente $\pi + 1$, $\mu + 1$, $\nu + 1$ volte. Analogamente si vedrebbe che questa conclusione non muta se dei due punti N e P uno è base per il sistema dato e l'altro non lo è. Quindi:

(a) « *Se il punto a cui può ridursi una curva fondamentale impropria è un punto base μ—plo per il sistema aggiunto puro, ma non per il dato, la curva si stacca $\mu + 1$ volte dal sistema aggiunto totale e ne incontra la curva generica rimanente in μ punti* ».

Per $\mu = 0$ si ha:

(b) « *Ogni curva fondamentale impropria che si stacca una sola volta dal sistema aggiunto totale è fondamentale anche per il sistema aggiunto puro* ».

11. Le considerazioni di questo § e di tutti i seguenti riguardano sistemi lineari, comunque vincolati, ma dotati di punti base ordinari. Dunque, prima di applicare le formule seguenti, noi intendiamo fatta, se ve ne è bisogno, la trasformazione cremoniana per la quale tutti i punti base sono fra loro a distanza finita.

Sia φ la parte fissa del sistema aggiunto totale. Indichiamo con l'indice φ gli elementi relativi a φ e con l'accento gli elementi del sistema aggiunto puro. Allora si ha (C § 21)

$$\frac{1}{2}\{(n-n')(n-n'+3) - \Sigma(\nu-\nu')(\nu-\nu'+1)\} = K - 2p + P' + 1, \quad (1).$$

Il 1° membro di questa formula ha una interpretazione geometrica semplice, se esiste il sistema residuo dell'aggiunto puro, giacchè in questo caso ne esprime la dimensione virtuale (C § 29) ma se questo sistema residuo non esiste (§ 22) l'interpretazione suddetta manca. Però se ne trova subito una che vale in ogni caso.

Infatti si ha:

$$n - 3 = n_\varphi + n' \quad , \quad \nu_r - 1 = \nu_{r\varphi} + \nu_r'.$$

Quindi il 1° membro della (1) si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\{(n_\varphi+3)(n_\varphi+6) - \Sigma(\nu_\varphi+1)(\nu_\varphi+2)\}$$

la quale espressione è identica con

$$K_\varphi + 3n_\varphi - \Sigma\nu_\varphi + 9 - i$$

dove i è il numero dei punti base del sistema. Ma si ha (C § 4)

$$3n_\varphi - \Sigma\nu_\varphi = K_\varphi - P_\varphi + 1$$

dunque:

$$\frac{1}{2}\{(n-n')(n-n'+3) - \Sigma(\nu-\nu')(\nu-\nu'+1)\} = 2K_\varphi - P_\varphi - i + 10$$

e quindi dalla (1)

$$P' = 2p - K + 2K_\varphi - P_\varphi - i + 9 \tag{2}$$

dove ora K_φ e P_φ hanno significati geometrici che valgono in ogni caso. La (2) ci servirà per collegare il genere del sistema aggiunto puro con « *l'eccesso di Jung* » (cf. cap. III).

12. La (2) confrontata con una formula di Castelnuovo (C § 30) ci fornisce la seguente limitazione per la parte fissa φ

$$2K_\varphi - P_\varphi \leq i - 1$$

la quale può tornare utile nei casi in cui $P_\varphi < 0$.

13. Se s'indica con P_t il genere virtuale del sistema aggiunto totale si ha (dal calcolo diretto)

$$P_t = 2p - K + 8 - i \tag{3}$$

da questa e dalla (2) segue:

$$P_t = P' + P_\varphi - 2K_\varphi - 1$$

ma d'altra parte deve essere (C § 13)

$$P_t = P' + P_\varphi + I - 1$$

dove I rappresenta il numero delle intersezioni, rispetto ad A, della curva generica del sistema aggiunto puro con la parte fissa φ. Segue;

$$I = -2K_\varphi. \tag{4}$$

Osservando ora che il sistema aggiunto totale è regolare rispetto ad A, avremo

(C § 13)

$$p - 1 = K_\varphi + K' + 1$$

e per la (4)

$$(5) \qquad -K_\varphi = p - 1 - K'$$

quindi $-K_\varphi$, che è la sovrabbondanza di φ, è anche la sovrabbondanza del sistema aggiunto puro (rispetto ad (A)).

Dunque possiamo enunciare il teorema :

« *La sovrabbondanza del sistema aggiunto puro è uguale a quella della parte fissa del sistema aggiunto totale. Entrambe equivalgono alla metà delle intersezioni della curva generica del sistema aggiunto puro con la parte fissa suddetta. Onde il numero di queste intersezioni è sempre pari* ».

Ne segue :

« *La condizione necessaria e sufficiente perchè la parte fissa e il sistema aggiunto puro siano regolari è che la prima sia una curva fondamentale semplice o composta per il secondo* ».

III. Sopra l'eccesso di Jung.

14. Secondo una denominazione introdotta da Jung chiamasi « *eccesso* » la differenza fra il numero dei punti base e quello delle linee fondamentali.

Al medesimo autore è dovuto il teorema che stabilisce il carattere invariantivo dell'eccesso per sistemi regolari (*). Lo scopo di questo capitolo è di mostrare come si possa estendere questo teorema a sistemi vincolati regolari, o no e contemporaneamente di esaminare qual legame passi fra l'eccesso e il genere del sistema aggiunto puro. Per ciò è necessario riguardare più da vicino le componenti della curva fissa φ (§ 12) e distinguerle in tre gruppi. Porremo nel 1° gruppo tutte quelle curve fondamentali improprie che si staccano da φ una sol volta, nel secondo le curve fondamentali improprie che si staccano più di una volta, nel terzo quelle curve fondamentali proprie alle quali non possiamo ancora negare l'esistenza nella curva φ Indicando con f_1, f_2, f_3 i tre gruppi, avremo : (C § 13)

$$K_\varphi = K_{f_1} + K_{f_2} + K_{f_3} + J_{12} + J_{13} + J_{23}$$

$$P_\varphi = P_{f_1} + P_{f_2} + P_{f_3} + J_{12} + J_{13} + J_{23} - 2$$

(*) Jung. — Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque — (Annali di Mat. serie IIª tomo XV.

dove J_{hl} rappresenta il numero delle intersezioni, rispetto ad A, di f_h, f_l. Ma dal § 9 resulta $J_{12} = 0$, dal § 10 (a) per $\mu = 0$ si ha $J_{13} = 0$. Inoltre se r indica il numero delle componenti di f_1 è (§§ 2 e 9 e C § 13) :

$$K_{f_1} = 0 \quad , \quad P_{f_1} = -r + 1.$$

Onde :

$$K_\varphi = K_{f_2} + K_{f_3} + J$$

$$P_\varphi = P_{f_2} + P_{f_3} + J - r - 1$$

dove si sono tralasciati gl'indici di J_{23} non essendo più opportuni ora che si è veduto essere $J_{12} = J_{13} = 0$.

Prendiamo a esaminare più particolarmente K_{f_2}, P_{f_2}.

Perciò supponiamo f_2 costituita dalle ρ curve $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ degli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_\rho$ contate ciascuna $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho$ volte.

Applicando a f_2 le solite formule avremo :

$$K_{f_2} = \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2 + \ldots + \mu_\rho K_\rho + j$$

$$P_{f_2} = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \ldots + \mu_\rho K_\rho + j - \Sigma \mu_h + 1 ;$$

ma

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_\rho = 0 \quad , \quad p_1 = p_2 = \ldots = p_\rho = 0$$

perchè le $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ sono curve fondamentali improprie, j rappresenta il numero delle intersezioni a due, a due, rispetto ad A delle componenti di f_2, dunque per il teorema del § 9 rimarrà per j il numero :

$$j = \sum_1^\rho {}_h \frac{\mu_h(\mu_h - 1)}{2} D_h$$

Ma

$$D_h = p_h + K_h - 1 = -1 ,$$

onde

$$j = -\sum \frac{\mu(\mu - 1)}{2}$$

e per conseguenza

$$K_{f_2} = -\sum \frac{\mu(\mu-1)}{2}, \qquad P_{f_2} = -\sum \frac{(\mu-1)(\mu+2)}{2} - \rho + 1$$

quindi:

$$(6) \quad \begin{cases} K_\varphi = -\sum \frac{\mu(\mu-1)}{2} + K_{f_3} + J \\ P_\varphi = -\sum \frac{(\mu-1)(\mu+2)}{2} + P_{f_3} + J - (r+\rho). \end{cases}$$

Sostituendo nella (2) del § 11 si ottiene:

$$(7) \qquad P' = 2p - K + 2K_f - P_f + J - \sum_1^\rho \frac{(\mu-1)(2-\mu)}{2} + E + 9$$

nella quale è stato soppresso l'indice di f_3 divenuto ora inutile (per cui f rappresenta adesso l'insieme delle curve fondamentali proprie che si trovano nella φ) e dove E rappresenta l'eccesso fra il numero delle curve fondamentali improprie e il numero dei punti base del sistema. La (7) esprime dunque il legame che passa fra quest'eccesso e il genere del sistema aggiunto puro.

15. Ci proponiamo ora di vedere in quali termini si possa stabilire la invariantività dell'eccesso per trasformazioni cremoniane.

Per questo, osserviamo che la formula precedente può scriversi

$$(8) \qquad P' = 2p - K + 2K_f - P_f + J - \sum_1^\rho \frac{\mu(\mu-1)}{2} + E + \sum_1^\rho (\mu-1) + 9.$$

I numeri P', p, K hanno carattere invanriantivo (§§ 8, 27 C). Inoltre, secondo l'ipotesi introdotta al principio del § 11, noi intendiamo di escludere quelle trasformazioni cremoniane le quali portano singolarità straordinarie. Dunque, se nella parte fissa φ entrano delle curve fondamentali proprie riducibili a punti (§§ 4, 5, 6), noi intendiamo di escludere dalle considerazioni che seguono quelle trasformazioni cremoniane che possono ridurre a punti tali curve. Segue, che l'insieme f delle curve fondamentali proprie che entrano a costituire la φ si muta per effetto di una qualunque delle trasformazioni che noi consideriamo, nell'insieme f_0 delle curve fondamentali che entrano a costituire la φ_0 del sistema trasformato e quindi i numeri K_f, P_f non mutano. Allora dalla 1ª delle (6) ne viene che ha carattere invariantivo la differenza

$$J - \sum_1^\rho \frac{\mu(\mu-1)}{2}$$

anche perchè K_φ è la sovrabbondanza del sistema aggiunto puro cambiata di segno (§ 13).

Quindi, tornando alla (8), resulta che ha carattere invanriantivo anche $E + \sum_1^\rho (\mu-1)$, cioè l'eccesso tra il numero delle curve fondamentali improprie e il numero dei punti base, purchè ogni curva fondamentale impropria sia contata tante volte quante essa si stacca dal sistema aggiunto totale.

Questo, nell'ipotesi più generale, che cioè nella parte fissa φ del sistema aggiunto totale possano entrare a costituirla curve di tutt' e tre le specie f_1, f_2, f_3 senza discutere se ciò possa aver luogo effettivamente. Certo però che se questo accade vale la (7). Sono, almeno per ora, ugualmente probabili le tre ipotesi che nella φ manchi il gruppo f_3, ovvero f_2, o f_1 e allora la (7) diviene rispettivamente:

$$P' = 2p - K + \sum \frac{(\mu-1)(2-\mu)}{2} + 8 + E$$

$$P' = 2p - K + 2K_f - P_f + 9 + E$$

$$P' = 2p - K + 2K_f - P_f + J + \sum \frac{(\mu-1)(2-\mu)}{2} + 9 + E.$$

Se finalmente nella φ mancano i gruppi f_2 e f_3, ovvero f_3 e f_1, o $f_1 f_2$ si ha successivamente:

$$P' = 2p - K + 8 + E$$

$$P' = 2p - K + \sum \frac{(\mu-1)(2-\mu)}{2} + 8 + E$$

$$P' = 2p - K + 2K_f - P_f + 9 - i.$$

Così si vede che tutte queste formule possono dedursi dalla (7) ponendo per convenzione $2K_f - P_f = -1$ quando manca il gruppo f_3, facendo tutte le μ uguali all'unità quando manca il gruppo f_2, lasciandola inalterata quando manca il gruppo f_1.

Resulta inoltre che quando fra le componenti di f_2 non ve n'è alcuna la cui moltiplicità superi 2, la considerazione del gruppo f_2 diviene perfettamente inutile, tutte le sue componenti potendosi includere in f_1.

Allora il teorema dell'eccesso può stabilirsi così:

« *In un sistema lineare, regolare, o comunque vincolato, ma dotato di punti base ordinari, ha carattere invariantivo l'eccesso fra il numero totale delle curve fondamentali irriduttibili e il numero dei punti base, nelle seguenti circostanze:*

1.° *La trasformazione cremoniana che si considera non deve introdurre punti base straordinari.*

2.° *Se fra le curve fondamentali improprie ve n'è anche una sola la quale si stacchi dal sistema aggiunto totale più di due volte, allora nella valutazione dell'eccesso ogni curva fondamentale impropria va contata tante volte quante essa si stacca dal sistema aggiunto totale suddetto.*

3.° *Se invece ogni curva fondamentale impropria non si stacca più di due volte dal sistema aggiunto totale, essa, nella valutazione dell'eccesso, deve esser contata una sola volta.*

4°. Finalmente è a prevedersi anche quest'ultimo caso: quando nella φ esiste il gruppo f_3 è certo impossibile eliminarlo con trasformazioni cremoniane, ma altrettanto non si può dire dei gruppi f_2 o f_1: nulla vieta ritenere che per opportuna trasformazione cremoniana si possa passare da una φ che contiene tali gruppi a una che non li contiene. In tal caso si riconosce subito dalle formule precedenti che il teorema dell'eccesso si può enunciare così:

« *Per ogni trasformazione cremoniana la quale faccia svanire il gruppo* f_2 *della curva* φ, *ovvero ve lo porti se non vi esiste si ha:*

$$E + J + \sum \frac{(\mu - 1)(2 - \mu)}{2} = E'$$

dove E' *si riferisce al sistema la cui* φ *non contiene il gruppo* f_2 *e dove* J *ha il significato geometrico già attribuitogli* (§ 14) *se esiste il gruppo* f_3, *ed è nullo se* f_3 *non esiste* (*).

(*) Il teorema sulla invariantività dell'eccesso è stato dimostrato per la prima volta dal prof. Jung nel caso di sistemi non vincolati (*Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche*: Mem. I: Ann. di Mat. serie IIa Vol. XV). Nel § 9 della stessa memoria, il teorema viene esteso a sistemi comunque vincolati con punti base ordinari e finalmente in una Nota successiva (*sull'eccesso degli elementi fondamentali di un sistema lineare di genere qualunque.* Rend. Istituto Lombardo serie IIa Volume XXI, fasc. XVIII) il medesimo autore si è proposto di estenderlo anche a sistemi con punti base straordinarii. Ma entrambe queste estensioni presentano delle lacune: lacune rilevate, in parte, dall'autore stesso per primo e manifestate per iscritto ad alcuni colleghi insieme al proposito di consacrarvi una successiva pubblicazione; proposito per circostanze speciali non effettuato. Debbo alla cortesia di uno dei colleghi del prof. Jung, di aver potuto leggere le lettere originali in cui l'autore trattava di questo argomento. Nell'intento di colmare tali lacune ho scritto il § precedente, ma riuscendo solo a metà nello scopo prefissomi. Infatti mentre mi sembra che colle considerazioni precedenti il teorema dell'eccesso risulti dimostrato in modo chiaro e rigoroso per sistemi comunque vincolati a punti base ordinari, non vedo come le considerazioni stesse possano estendersi a sistemi a punti base straordinarii. Tutto il § precedente infatti, poggia sulla (2) del N. 12 la quale è vera se i punti base sono tutti ordinari; se ve ne sono di straordinari essa non è più valida e il teorema dell'eccesso cade, o almeno per enunciarlo anche in questo caso occorre presentarlo in forma alquanto diversa da quella sopra stabilita.

16. Nelle considerazioni dei § precedenti oltre essere esclusi i sistemi a punti base straordinari sono anche esclusi i sistemi razionali ed ellittici perchè per essi non si può parlare di sistema aggiunto puro e quindi la (2) del § 11 non ha più significato. Ora, i sistemi razionali sono certamente regolari e fra gli ellittici i soli sovrabbondanti sono i fasci perchè $s = p - k + 1$ (C § 19). Tanto per gli uni quanto per gli altri il teorema dell'eccesso è quindi stabilito nella prima Memoria del prof. Jung (loc. cit.) ai §§ 20 e 65.

La più semplice di tutte le formule precedenti è

$$P' = 2p - k + 8 + E$$

essa (ma non il processo per ottenerla) mi fu comunicata dal prof. Castelnuovo e vale nei casi in cui manchino nella φ i gruppi f_2 e f_3, ovvero (§ 19) quando il sistema aggiunto puro sia regolare e manchi il gruppo f_2.

Per tali sistemi applicando a P' una disuguaglianza di Castelnuovo (C § 30) si trova

$$-E > 1$$

cioè il numero dei punti base superiore a quello delle linee fondamentali improprie.

Quindi:

« *Se la parte fissa del sistema aggiunto totale è costituita dalle sole curve fondamentali improprie contate ciascuna una volta il numero dei punti base supera il numero di queste linee fondamentali improprie* ».

IV. Sopra i sistemi residui.

17. Prendiamo a considerare dapprima, il sistema residuo dell'aggiunto puro. Se ne indichiamo con k'' la dimensione effettiva, poichè $p-1$ è la dimensione effettiva dell'aggiunto puro, dovremo avere: (§ 21 C)

$$k > p - 1 + k''$$

dunque, condizione necessaria per l'esistenza di questo sistema è $k > p - 1$. Allora dico che:

« *Un sistema lineare regolare, o no, ma con* $k < p+1$ *ha necessariamente almeno 9 punti base* ».

Infatti, se $k < p$ il sistema residuo suddetto non esiste, quindi i punti base non possono essere in numero minore o uguale a 9 giacchè le cubiche, o la cubica per essi, insieme alla parte fissa φ del sistema aggiunto totale costituirebbero il residuo dell'aggiunto puro. Dunque il numero dei punti base deve essere maggiore di 9 e inoltre essi non debbono appartenere a una stessa cubica. Se $k=p$ è $k''=0$ quindi neppure in questo caso può essere $i<9$ e se $i=9$ non possono i punti base appartenere a ∞^1 cubiche altrimenti sarebbe $k''=1$. Si può dunque aggiungere:

« *Se* $k<p$ *i punti base debbono essere in numero superiore a 9 e non possono giacere sopra una medesima cubica, se* $k=p$ *i punti base possono esser 9 ma non debbono appartenere a* ∞^1 *cubiche* » (fa eccezione il fascio di cubiche perchè allora non si può più parlare di sistema aggiunto).

Un sistema sovrabbondante ha necessariamente $k<p+1$ (C § 19) quindi segue, come caso particolare il teorema di Castelnuovo: « *Un sistema sovrabbondante ha almeno 9 punti base* » (C § 26).

Più generalmente si vede che « *per* $k=p+1$, $(1<9)$ *il numero dei punti base non può essere inferiore a* $9-1$ ».

18. Passiamo a considerare il sistema residuo $[C_1]$ di una curva fondamentale f_1. Sia $[C_1]$ costituito di una parte fissa f_2 e di un sistema variabile $[C_{12}]$. La dimensione effettiva di $[C_{12}]$, o di $[C_1]$ che è lo stesso è $k-1$ (C § 22), anche quella dell'insieme $f_1[C_{12}]$ è $k-1$, quindi f_2 costituisce l'intiero sistema residuo di $f_1[C_{12}]$ e per conseguenza è fondamentale per [C] (§ 21, C). Quindi:

« *La parte fissa del sistema residuo di una curva fondamentale è a sua volta fondamentale per il sistema dato* ».

Se si chiama sistema residuo puro di una curva fondamentale, il sistema residuo totale spogliato della parte fissa, si può dire evidentemente che:

« *Il sistema residuo puro di qualsiasi curva fondamentale, segna sopra la curva generica del sistema dato la serie caratteristica* ».

19. Vogliamo ora considerare il caso in cui il sistema aggiunto puro sia regolare e, valendosi dei sistemi residui, dimostrare come in tal caso l'esistenza del gruppo f_3 nella parte fissa φ dipenda da quella di f_2: (cf. § 14 e seg.). Per questo è necessario premettere due osservazioni. La 1ª è la seguente:

« *Se più curve fondamentali, distinte o no, ma non razionali compongono un insieme che è regolare, tale insieme non ha sistema residuo* ».

Siano infatti $K_1, K_2, \ldots, K_l, p_1, p_2, \ldots, p_l$ le dimensioni virtuali e i generi delle curve fondamentali date, sia f l'insieme di esse: avremo, per le solite formole,

$$K_f = K_1 + K_2 + \ldots + K_l + 1$$

$$P_f = p_1 + p_2 + \ldots + p_l + I - l + 1$$

dove I rappresenta il numero delle intersezioni, rispetto ad A, delle componenti di f, ed è composto di termini positivi e negativi, quelli negativi essendo dovuti alla presenza di componenti multipli (come p. es. nel § 14). Ma per ipotesi è $K_f=0$, dunque $I>0$ perchè tutte le K sono negative (§ 3). Segue $P_f>0$ e per conseguenza

$$D_f = K_f + P_f - 1 > 0.$$

Da cui ne viene che la curva fondamentale f non può avere sistema residuo, perchè se lo avesse sarebbe $D_f<0$ (sono esclusi i fasci C § 25).

20. La 2ª osservazione di cui è parola nel § precedente è questa:

« *Il gruppo* f_3 *della curva fissa* φ *ammette sistema residuo* ».

Infatti sia f' la componente irriduttibile di ordine minore fra quelle che formano il gruppo f_3 e sia F' il sistema residuo di f', sia inoltre f'' l'insieme delle altre componenti di f_3 così che si abbia

$$f' \cdot f'' = f_3$$

Una curva aggiunta di f' insieme ad [F'] compone un sistema contenuto nell'aggiunto totale, da un tal sistema deve staccarsi f'', ma niuna delle componenti di f'' può staccarsi dall'aggiunta di f', perchè, per ipotesi, f' è la componente di ordine minore fra tutte quelle che compongono f_3, dunque f'' si stacca da [F'], cioè [F'] è composto di f'' e di un sistema residuo [F''] il quale è evidentemente il residuo di $f' \cdot f'' = f_3$.

21. Ciò premesso risulta subito il seguente teorema:

« *Se il sistema aggiunto puro è regolare e ogni curva fondamentale impropria si stacca una sola volta dall'aggiunto totale, la parte fissa* φ *di tale sistema non contiene curve fondamentali proprie* ».

Infatti, ammettiamo pure che la φ contenga il gruppo f_3. Siccome per ipotesi manca il gruppo f_2, così avremo (§ 14)

$$K_\varphi = K_{f_3}.$$

Ma il sistema aggiunto puro è regolare, dunque (§ 13), $K_\varphi = 0$ e quindi $K_{f_3} = 0$.

Allora la f_3 è precisamente nelle condizioni volute dal teorema del § 19 e come tale non possiede sistema residuo il che è in contraddizione con il § 20. La contraddizione è nata dall'aver ammesso l'esistenza della curva f_3.

22. Osserveremo anche che:

« *Se una curva fondamentale propria deve staccarsi dal sistema aggiunto totale, essa si stacca conseguentemente dal suo sistema residuo* ».

Infatti, sia f la curva fondamentale, F il suo sistema residuo. Una curva aggiunta di f insieme ad F costituisce un sistema contenuto nell'aggiunto totale; da tale sistema deve quindi staccarsi f, dunque f è parte di F.

23. *La somma dei generi di* k *curve fondamentali distinte non può superare la sovrabbondanza del sistema* ».

Infatti, presi k punti, uno su ciascuna, la curva del sistema per questi k punti si spezza in quelle k curve e in una parte residua. Segue che la curva fondamentale composta dall'insieme delle curve fondamentali considerate possiede sistema residuo e quindi il suo genere non può superare la sovrabbondanza del sistema e per conseguenza non può superarla nemmeno la somma dei generi di tutte le sue componenti (§ 15 (*b*) C). Onde:

« *Se un sistema possiede una curva fondamentale di genere uguale alla sovrabbondanza, tutte le altre curve fondamentali sono necessariamente razionali* ».

V. Sistemi sovrabbondanti iperellittici.

24. Termineremo esponendo, sopra i sistemi iperellittici, un teorema la cui opportunità sarà manifesta nel caso $s = 1$. Per questo cominciamo dal metterci nell'ipotesi che il sistema dato sia sovrabbondante, che la dimensione effettiva sia uguale al genere e conseguentemente la sovrabbondanza uguale all'unità (C § 19). Poichè $p=k$, ne viene che presi $p-1$ punti, per essi si hanno ∞^1 C le quali s'incontrano in altri $p-1$. Questi e i primi formano un gruppo di $2p-2$ punti della serie caratteristica e giacciono quindi sopra una C' del sistema aggiunto puro.

Quindi la C passante per i $p-1$ punti scelti prima e per un punto generico di C' si spezza nella C' stessa e in una parte rimanente. Cioè, in questo caso, il sistema aggiunto puro ammette un sistema residuo [C''] e poichè la dimensione dell'aggiunto puro è $p-1$, quella di [C''] sarà zero e quindi [C''] sarà una curva fondamentale (C § 21).

Indicandola con f avremo (C § 30) $P_f = p_f = 1 = s$.

Dunque (C § 23 (*b*)) : « *Ogni sistema con la sovrabbondanza uguale a uno e con* p = k *possiede una curva fondamentale semplice, o composta, di genere uno, la quale passa per tutti i punti base del sistema* » (C pref. pag. 7).

25. Se con s_1 s'indica la sovrabbondanza del sistema residuo di una curva fondamentale f monovalente, deve essere (C § 24)

$$p_f = s - s_1.$$

Nel nostro caso si ha $p_f = 1$, onde $s_1 = 0$.

Cioè : « *Il sistema aggiunto puro è regolare* ».

Per il suo genere si può osservare che deve essere (C § 24)

$$P' = p + K_f$$

dove K_f non può esser nullo altrimenti sarebbe $D_f = 0$ e quindi il sistema sarebbe un fascio (C § 25) il che si esclude. Dunque

$$P' < p.$$

26. Andiamo al caso iperellittico. Il prof. Castelnuovo applicando alla serie caratteristica il teorema di Clifford (C § 19) trova il seguente limite superiore per la sovrabbondanza :

$$s \leq p - k + 1.$$

Il segno d'uguaglianza va preso quando $p = k$, $s = 1$, oppure quando il sistema è iperellittico, onde il citato autore ne conclude che per i sistemi iperellittici sovrabbondanti è verificata la relazione $s = p - k + 1$: però il ragionamento è invertibile onde può dirsi che :

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema che ha la sovrabbondanza maggior d'uno sia iperellittico è semplicemente espressa dalla relazione* $s = p - k + 1$ ».

27. Rimane il caso $s = 1$ in cui la relazione suddetta è ancora verificata senza che si possa affermare essere il sistema iperellittico. Ci proponiamo ora di deter-

minare in tal caso quali altri criterii siano da considerarsi per potersi assicurare della iperellitticità, o no del sistema dato.

Sempre nell'ipotesi $s=1$, $p=k$ ammettiamo che [C] sia iperellittico. Allora la serie caratteristica è speciale completa (C § 18), dunque (*) è una g_{2r}^{r} composta con la g_2', d'altra parte, essa deve potersi ottenere col sistema aggiunto puro, quindi la curva generica C' del sistema aggiunto puro taglia la C in $p-1$ coppie della g_2'. Cioè: « *Se C' passa per un punto M di C, essa passa anche per quel punto M' di C che corrisponde a M nella g_2'* », ma tutte le C per M passano per M' e non hanno altri punti comuni fuori di A (**): si ha dunque sulla C' una involuzione di gruppi (di due punti ognuno) che si tratta di dimostrare essere razionale. Il che risulta subito quando si consideri che il sistema dato [C] segna sulla curva generica dell'aggiunto puro una serie che è una g^{p-1}_{2p-2} e la quale è evidentemente composta con la involuzione precedente. Dunque questa involuzione è razionale (***). Si ha quindi sulla C' una g_2'.

Segue:

« *Il sistema aggiunto puro è iperellittico* » e di più, tenendo conto della osservazione fatta precedentemente « *tutte le curve del sistema aggiunto puro passanti per un punto del piano passano in conseguenza per un solo altro punto* ».

Inoltre:

« *La serie caratteristica dell'aggiunto puro è composta con la g_2'* » (****).

Segue che « *il genere dell'aggiunto puro non può essere inferiore a* $p-2$ ». Infatti, per $p-2$ punti generici passa un fascio di C' (perchè la dimensione di [C'] è $p-1$) le quali passano in conseguenza per i $p-2$ punti corrispondenti. Dunque questo fascio ha la sovrabbondanza uguale almeno a $p-2$. Ma in un fascio la sovrabbondanza uguaglia il genere (C § 19), dunque il genere di [C'] non può essere inferiore a $p-2$ (quindi (§ 26) le sole due ipotesi $p'=p-1$, $=p-2$).

28. Viceversa ammettiamo che il sistema aggiunto puro sia iperellittico e di più che tutte le sue curve passanti per un punto del piano passino in conseguenza per un altro punto determinato dal primo. Intanto, per il solo fatto $p=k$, $s=1$ segue (come abbiamo già osservato al § 24) che presi $p-1$ punti generici, per essi passa un fascio di C avente altri $p-1$ punti base così che i $2p-2$ punti del gruppo appartengono a una sola C, a quella individuata dai $p-1$ punti generici scelti avanti. Allora, assumiamo $p-2$ punti $A_1, A_2, \ldots A_{p-2}$ in posizione

(*) Bertini – La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico (§ 32) Ann. di mat. Serie II, Tomo XXII, 1894).

(**) Bertini – loc. cit. § 52.

(***) Bertini – loc. cit. § 31.

(****) Bertini – loc. cit. § 32.

generica. Tutte le C' per essi formano un fascio avente gli altri punti base in altri $p-2$ punti $A_1' A_2' \ldots A'_{p-2}$ corrispondenti dei primi nelle g_2' supposte giacenti sulle C'. Invece tutte le C per $A_1, A_2, \ldots A_{p-2}$ formano una rete (perchè $k=p$). Preso un altro punto M generico del piano, per $A_1, A_2, \ldots A_{p-2}$ e M passa una sola C' e ∞^1 C i cui rimanenti punti base stanno sulla C'. Ma se M coincide con A_i' ($i=1, 2, \ldots p-2$), allora per i punti $A_1, A_2, \ldots A_{p-2}, A_i'$ passa ancora un fascio di C' perchè il passaggio delle C' per A_i' non impone alla C' niuna nuova condizione, e così vi passa una rete di C perchè se ve ne passasse un fascio quei punti servirebbero a individuare un gruppo della serie caratteristica e quindi una C'. Dunque la rete delle C individuata da $A_1A_2 \ldots A_{p-2}$ passa anche per $A_1' A_2' \ldots A'_{p-2}$ e quindi il fascio delle C' per $A_1 A_2, \ldots A_{p-2}, A_1' A_2', \ldots, A'_{p-2}$ segna sopra ogni C della rete una g_2'. Il sistema [C] è iperellittico.

Quindi:

« *La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema [C] sia iperellittico è che lo sia l'aggiunto puro e di più che le curve di quest'ultimo passanti per un punto del piano passino in conseguenza per un altro punto* ».