Ponendo finalmente $a_p - \alpha_p$, ed $m_p - \alpha_p$ in luogo di a_p ed m_p sarà

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1-\alpha_1 & m_2-\alpha_2 & \cdot & m_n-\alpha_n \\ m_1-\alpha_1 & a_2-\alpha_2 & \cdot & m_n-\alpha_n \\ m_1-\alpha_1 & m_2-\alpha_2 & \cdot & m_n-\alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1-\alpha_1 & m_2-\alpha_2 & \cdot & a_n-\alpha_n \end{vmatrix}$$

che può mettersi sotto la forma

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdot & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 1 & a_1 & m_2 & \cdot & m_{n-1} & m_n \\ 1 & m_1 & a_2 & \cdot & m_{n-1} & m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & m_1 & m_2 & \cdot & a_{n-1} & m_n \\ 1 & m_1 & m_2 & \cdot & m_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

come si vede sottraendo in questo determinante dalle ultime n verticali la prima ordinatamente moltiplicata per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ Facendo poi le stesse supposizioni nello sviluppo ottenuto nel teorema generale, avremo

$$\Delta_1 = \Delta + \varphi(m) \sum_{n}^{1} \frac{\alpha_p}{a_p - m_p}.$$

Macerata, Maggio 1868.

EUCLIDE COME TESTO DI GEOMETRIA ELEMENTARE

PER

J. M. WILSON M. A.

MEMORIA LETTA INNANZI ALLA SOCIETA' MATEMATICA DI LONDRA

Estratta dal Giornale The Educational Times, *Sett.* 1868 *e tradotta da* R. R.

Spero non abbiasi a reputare estraneo ad una Società Matematica l'andar vagliando i meriti o demeriti d'un libro così distinto, come gli *Elementi di Geometria* di Euclide. Il posto tutt' ora occupato da questo libro nell'istruzione à ultimamente richiamata e ridestata l'attenzione de' nostri distinti Matematici, quella delle Commissioni d'inchiesta su le Scuole, e di parecchi tra coloro che sono addetti all' insegnamento. Dal vostro Segretario mi è stato richiesto di esporre qualche osservazione intorno a questo soggetto, avendo io ultimamente pubblicato la prima parte di un testo di Geometria, che sotto molti aspetti differisce da quello di Euclide; ed io vi ho acconsentito nella speranza, che la discussione che ne seguirà, e la pubblicità, che, spero, le sarà data contribuiranno materialmente all' avvanzamento del nostro insegnamento geometrico. Non ho molto di nuovo a dire, perchè non ho che ripetere ciò è stato detto o pure pensato da buon numero di persone; però è probabile che ora si possa essere uditi.

Gli elementi di Euclide, composti meglio che due mila anni addietro, sono quasi universalmente insegnati in Inghilterra, ed essi sono l'unico testo di Geometria riconosciuto. In ciascun' altra branca delle Matematiche, come in Aritmetica, Algebra, Meccanica, Astronomia, a mano a mano che la scienza progredisce, si scrivono nuovi Elementi, i quali arrecano accrescimento all'attuale numero di conoscenze, e spandono tutta la nuova luce che può essere stata diffusa dalle più recenti scoperte su i primi principii, rendono più semplici quelli che derivano dai più elevati punti di vista della scienza, ed inoltre hanno il gran vantaggio di *consolidare* l'esperienza acquistata nell'insegnamento per mezzo delle opere precedenti.

Imperocchè è d'uopo ricordarsi che ogni scienza, e la Geometria tra queste, in principio si segue con poca regolarità di piano; essendo che, a sviluppo avanzato d'una scienza, e quando questa è molto progredita si può formare una completa rivista di tutte le sue diramazioni, e disporre con ordine logico le sue dottrine. E anche più tempo occorre innanzi che si possano scrivere tali Trattati intorno ad una scienza, da poter essere adottati nell'insegnamento elementare.

Per poter scrivere simili Trattati richiedesi un concetto scientifico della materia, a fine di non cadere in serii errori; richiedesi in molti casi, e specialmente nelle cose applicate, conoscenza storica dello svolgimento della scienza ed è necessaria l'esperienza dell'insegnamento, o piuttosto quella intima conoscenza dei processi mentali che di rado s' acquista da chiunque, ma solo da chi à insegnato ai fanciulli ed ha osservato i fenomeni che gli si son presentati con tutta quella attenzione con la quale avrebbe osservato ogni altra classe di fenomeni.

Io penso esservi nel lavorio di ciascuna scienza tre differenti stadii per comporre un'Opera; cioè quello per le opere d' esplorazione, quello per le opere di esposizione, e finalmente quello pei Trattati d' istituzione. Ora gli Elementi di Euclide, come furono scritti, appartengono al primo e secondo stadio: la conoscenza della Geometria, quando quel libro fu scritto, non era per nulla paragonabile a ciò che essa è attualmente, e non era possibile, anche che si fosse voluto, scrivere un Trattato d'istituzione. Come opera d' esposizione geometrica quel libro è affatto antiquato, come Trattato d' istituzione non s' intese di farlo ed è del tutto inadatto (*). E al tempo di Euclide non era quello il primo libro di Geometria messo nelle mani di uno scolare (**). Io intanto contesto, in primo luogo, che nella questione se l'Euclide debbasi o pur no adottare, l'*onus probandi* sta negli Euclidisti.

Vi è un altro argomento, che è primo tra tutti gli altri, per bandire l'Euclide. Noi abbiamo l'esperienza di altre nazioni contro l'ammessibilità di questo libro. Non va mai ripetuto abbastanza, in questa controversia, che la Francia, la Germania, l'Italia (***) e l'America sono d'accordo nell'adottare gli stessi metodi d' insegnare si in Geometria come nelle altre scienze; esse scrivono istituzioni per proprio uso. Noi intanto in Inghilterra dobbiamo avere qualche straordinario fondamento per ammettere il libro d'Euclide, contrariamente all'opinione d'ogni altra nazione. Stupisco nel vedere come poco ciò si sappia, e come poco faccia impressione quando si è saputo. Per mettersi a livello con quei del Continente in questa materia abbiam bisogno di una scuola di ostinati riformatori come quei che hanno apportato grande riforma nelle nostre Università.

Dopo queste osservazioni preliminari, passo a parlare di due difetti dell' Euclide, risultanti l' uno dal considerare quel libro come opera d' esposizione della scienza geometrica, l' altro dal considerarlo come trattato d' istituzione; e quindi suggerirò alla Società quel che abbia a fare per l'avvanzamento della Geometria in Inghilterra.

(*) Innegabilmente *taluni* giovanetti apprendono la geometria nell' Euclide, comunque malamente fosse insegnata; e il puro esercizio di ripetere e di scrivere euclideo passato a traverso la mente di fanciulli che nulla afferrano dello spirito della Geometria, e non mai traggono una sola deduzione, non è punto inutile. Però è possibile di ritenere questo esercizio nel ragionamento accurato e consecutivo, e aggiungervi eleganza, ed anche un senso d' originalità — uno spirito geometrico — ma questo non può ottenersi col libro d' Euclide.

(**) Il *σύγγραμμα ψευδαριαν* si è perduto.

(***) Grazie all' illuminato Consiglio d' Istruzione Superiore, questo pregio ora l' Italia lo ha perduto; perchè esso raccomanda, e quindi *comanda* che nei Ginnasi, Licei, e scuole elementari s' insegni l' Euclide!!! *(Il traduttore)*

Sarebbe noioso se volessi considerare le definizioni, gli assiomi e le proposizioni partitamente per farne rilevare i piccoli errori. Ciò fu fatto dal prof. De Morgan nel *Companion to the British Almanack* per l' anno 1849; e la sostanza delle osservazioni di sì distinto Professore fu fusa in parecchie edizioni di Euclide, così che è assai probabile che sia familiare a molti di noi. Questi errori alla spicciolata formano una massa considerevole di difetti. Un credente nella infallibilità di Euclide farà bene di leggere l'articolo del De Morgan. A me spetta maggiormente di mostrare come in Euclide vi sia qualche cosa che è in opposizione con la vera scienza; difetto fondamentale questo, e del quale non può andare esente neppure un'edizione migliore di quella del Simson, o di qualunque altra come si voglia modificata.

La Geometria è la scienza che investiga le relazioni delle figure, e mostra l'inseparabile attinenza tra certi fatti. Col riferirsi alle condizioni, e quindi alle conseguenze delle condizioni, e ultimamente alla conclusione, si può dire che la Geometria è una permanente dimanda, *perchè ciò è così?* Perchè la perpendicolare è la più corta distanza d'un punto da una retta? Come le condizioni del perpendicolarismo conducono a questa conclusione? Ora questa quistione è tanto lontana dal problema di condurre la perpendicolare a una retta, quanto dalla questione com' è fatta la carta su cui si conduce la perpendicolare. Una volta assunto o mostrato che vi è sempre una perpendicolare, e soltanto una, possiamo, senza impedimento alcuno, ragionare sulle proprietà di questa perpendicolare. La pruova che un poligono regolare di 28 lati si possa iscrivere in un circolo sta nell' affermare che un angolo retto al centro può immaginarsi diviso in 7 parti uguali, che le corde degli archi che questi angoli sottendono sono tra loro uguali, e da ciò dedurre che il poligono è equiangolo come è equilatero. Non v'ha attinenza alcuna tra la possibilità di eseguire meccanicamente, e sotto certe condizioni, il concetto di cui si tratta, e lo esporre le conseguenze inevitabili d' una tale costruzione quando si potesse mandare ad effetto.

È questo un esempio del rigettare le costruzioni ipotetiche e un tale rigetto, che sventuratamente è legge per Euclide, è stato la cagione d'un indicibile confusione d'idee, ed à necessitato l' intralciato ordine del primo libro. Vediamo infatti in questo libro le proprietà di due triangoli messe in opera per dimostrare la più semplice proprietà d'un triangolo; proprietà de' triangoli esposte preliminarmente per provare che la somma degli angoli consecutivi intorno a un punto è eguale a 4 retti! Noi siamo usi a vedere queste imperfezioni, la cui assurdità per ciò non così facilmente ci colpisce, a meno che non fossimo avvezzi ad una Geometria scientifica. L' opera d'Euclide considerata come singolare fatto geometrico richiede attenzione. Questo Autore ha costruito una serie di teoremi sotto il peso della sua difficile e singolare legge; ed io ammiro ciò come ogni altro ingegnoso e difficile esperimento ginnastico. *C'est magnifique, mais ce n'est pas la Géometrie.* Una volta tolta questa restrizione, la classificazione rendesi possibile; e la classificazione (cioè il raggruppamento di soggetti tra loro affini) è la vera essenza della scienza. Se la chimica s'insegnasse con la condizione di non adoperarsi alcun materiale, se non prima fosse stato costrutto e chimicamente esaminato, così che i silicati dovessero studiarsi pria d'usare il vetro per raccorre l'ossigeno, la restrizione sarebbe appena più dannosa allo studio scientifico della chimica di quanto lo è allo studio della Geometria. Senza dubbio vi sarebbe in ciò grande abilità, ma sarebbe una sventura; l'ingenuità usurperebbe il posto della precisione scientifica e dell'ordine logico, e certamente renderebbe impossibile molti progressi.

Questo è pertanto il primo e fondamentale difetto d'Euclide; difetto che ha ostacolato alla scienza, imponendole una regola fondata sulla sola curiosità e che ha per ciò introdotto confusione nello svolgimento delle idee geometriche, e à dato a tutta la scienza l'aspetto di un artifizio con l'oscurare la differenza tra una regola convenzionale, (la pura regola d'un gioco) e le necessarie e immutabili leggi del pensiero.

Altro difetto d'Euclide è stato quello di trascurare del tutto il metodo della sovrapposizione. In verità questo metodo egli l'adopera ne'teoremi fondamentali 4º e 8º, ma poi l'evita in seguito per quanto più può, quasi fosse un metodo da schivare, e non puramente geometrico, mentre nel fatto è desso il principio su cui si fondano tutti i casi d'eguaglianza e disuguaglianza. Abbandonarlo è un difetto, perchè traveste la natura della pruova geometrica; ed è per una perdita, poichè la sovrapposizione fa sempre rilevare l'importanza de'dati sulla conclusione. Ciascuno sa che l'idea della sovrapposizione frequentemente ricorre, allorchè uno raccoglie nella mente le sue conoscenze di Geometria elementare; e questa è una pruova che il metodo è naturale.

Ancora, la maniera con cui Euclide tratta delle parallele è difettosa. Trattate come volete delle parallele, e la nozione dell'identità di direzione non può sfuggire. La retta à due qualità affatto l'una dall'altra indipendente, la lunghezza, cioè, e la direzione, nè l'una può farsi dall'altra dipendere, senza stabilire preliminarmente un assunto. La direzione essendo una nozione fondamentale, l'angolo vien tosto definito come la differenza di direzione misurata dalla quantità di rotazione richiesta per descrivere l'angolo, e le parallele sono rette che hanno la stessa direzione. Il *postulato* di Euclide è una delle conseguenze di questa definizione. Osservate che noi non possiamo in modo alcuno pretendere di sopprimere l'idea di direzione, parliamo della direzione di una forza e la rappresentiamo con una retta; e l'essenza dei *quaternioni* sta appunto nel trattare la direzione e la lunghezza di una retta come idee fondamentalmente distinte, e nozioni elementari. Questa definizione delle parallele s'adagia sopra una proprietà positiva delle rette in quanto sono condotte, non già sopra una proprietà negativa del loro indefinito prolungamento.

E ancora, la noia e l'ineleganza del terzo e quarto libro richiederebbero se ne parlasse; ma a me basta soltanto far notare che noi ci riferiamo a pochi principii, allorchè richiamiamo le nostre conoscenze del circolo. Non v'à propriamente che sei o sette teoremi principali che abbraccian tutte le proprietà di questa figura, i quali non pertanto non sono cospicui in Euclide.

Non fo alcuna osservazione sul libro quinto, perchè esso è morto, ed io non combatto co' morti. I matematici possono decantarne i pregi, ed io ho qualche simpatia per essi, ma fortunatamente non potranno ridargli la vita galvanizzandolo. Il libro sesto non è morto.

La nozione di proporzione è elementare, ma non semplice. Poche persone non istrutte, se pure ve n'à qualcuna, mancano di tale nozione, ma pochissime possono dichiararla. V'è qualche cosa d'incerto nel processo della mente allorchè giudica che quattro grandezze sono in proporzione; ma è fuor di dubbio che nessun essere umano potè mai seguire il processo della quinta definizione d'Euclide. Questi pone una proprietà delle grandezze proporzionali, ingegnosa è vero, perchè evita ogni quistione intorno agl'incommensurabili, e s'adagia unicamente su i multipli invece delle parti; il che, poichè ogni costruzione ipotetica è esclusa, egli considera come ovvio a farsi; ma formare di questa proprietà una definizione non è conforme al senso comune, come disse il De Morgan. Un rapporto non può essere geometricamente rappresentato, e intanto l'eguaglianza dei rapporti dev'essere definita sia con un accidente geometrico, sia con un essenziale aritmetico. E qui c'imbattiamo in un gran difetto d'Euclide, che ha partorita la sventurata conseguenza di separare la Geometria dall'Aritmetica. Forse ciò avvenne per lo stato imperfetto delle nozioni d'Aritmetica al tempo in cui Euclide scriveva (*). La proporzione involve necessariamente le nozioni aritmetiche, e però possiamo con ogni dritto introdurla nella Geometria. Ora sforzandoci di mettere da parte le considerazioni aritmetiche, ne travestiamo le loro attinenze, con molto imbarazzo, e con nostro serio discapito.

Infine non mi occorre mostrare quanto imperfetta sia una tale opera di Geometria; nè ciò importerebbe troppo, se avessimo un libro più elevato. Ma per avventura non ne abbiamo, e soltanto il libro d'Euclide, e un piccolo trattato sulle sezioni coniche formano tutto il retaggio della Geometria che s'insegna in Inghilterra. Non sarebbe fuori proposito l'esporre in un libro elementare di Geometria, e in ultimo luogo, alcuni degli sviluppi posteriori della Geometria, quelli di Archimede, di Kepler, di Newton; non che quelli di Chasles, e de'più grandi Geometri viventi. Ciò può esser fatto, anche tra giusti limiti, come è comprovato dai libri elementari francesi (**); e non può esser fatto finchè ci atteniamo alla pesantezza ed in eleganza dell'Euclide, e facciamo della Geometria il *vile corpus* sul quale si esercitano gli elementi della logica deduttiva. Se gli elementi della logica fossero insegnati separatamente, la Geometria potrebbesi agevolmente emancipare (***).

Se queste osservazioni sono giuste, un libro che à uno scopo così poco scientifico, e à tali serii difetti nel metodo e nella esecuzione, e che secondo il mio

(*) Però lo stato dell'Aritmetica a quanto si può giudicarne dal X libro era sufficientemente avanzato, per potorne fare notevole applicazione alla Geometria.

(**) Fin da molti anni addietro questo si era fatto anche presso di noi. T.

(***) Noi crediamo che la Geometria e in generale le Matematiche debbansi studiare dopo la Logica. (T.)

modo di vedere, è tanto incompleto, non può al certo essere un buon libro da servire come testo, e non pertanto si può esser sicuri che i suoi difetti di un' altra natura sono quelli che maggiormente ci nuocciono. Il difetto che principalmente richiede la nostra attenzione è quello di non essere un tal libro atto all' istruzione. I Maestri insegnerebbero una cattiva Geometria con piacere, se gli alunni l'apprendessero in modo da divenire buoni geometri; ma intorno a questo punto tutti gl' insegnanti sono d'accordo in asserire che pochi sono quei giovani i quali per mezzo dell' Euclide veggano nel fondo della scienza geometrica, e divengano esperti nell' applicarla. Di ciò ne ò testimonianze a dovizia. Un eminente Maestro in Matematiche assicura che molti giovani non apprendono affatto Geometria dall' Euclide, e che quando passano al disegno geometrico, sono obbligati ricominciar il tutto da capo.

Passo da ultimo a far notare taluni speciali difetti d' Euclide, considerandolo unicamente come libro d'istruzione. E primieramente l' *espressione* è molto al di sopra della *sostanza*. I fatti geometrici, in generale, sono semplici, ma sono travestiti e sopraccaricati di formalità di dettato, al quale noi siamo ora avvezzi, ma che si rende inintelligibile agli alunni, i quali han bisogno di molto tempo pria di scovrire la Geometria ascosa sotto la strana fraseologia. Credo che vi siano alcuni i quali pensano esser ciò buono pei giovanetti, e che sia pure ben fatto di rendere la Geometria difficile, mentre temono abbassarsi permettendosi l'uso di una scelta fraseologia. A me par chiaro che ciò che veramente necessita si è di esporre la materia con quanta semplicità, vivezza e naturalezza è possibile, e manodurre i giovani ad esprimere i loro ragionamenti nel proprio linguaggio, dando loro un modello di ben ragionare in inglese. Lo scopo degli uni è di modellare lo stile dello studente su quello di Euclide, il che vuol dire ripetere e imitare, quello degli altri è d'invigorire il suo potere tanto nel ragionare quanto nell'esprimersi nel suo proprio stile e nella sua propria lingua. Egli è così che la Geometria potrà essere insegnata più di buon'ora, il che sarà un guadagno. Si faranno maggiori progressi, i problemi diventeranno più familiari, e rimarrà disponibile per istudi più difficili un vigore mentale, che ora si spende, e si spende male intorno a' primi tre o quattro libri di Euclide.

Il secondo difetto si è che Euclide *non dà a pensare*. Chiunque à esaminato adulti o giovanetti sa che, per quanto facile sia una deduzione, niuno degli esaminati giunge a farla razionalmente. Io esamino centinaja di giovani di 14 in 15 anni, negli esami di ammissione, e m' accorgo dalle loro risposte, che ànno un certo che di comico, che i due o tre libri d'Euclide su i quali hanno stentato, non ànno in essi lasciata alcuna nozione della maniera di provare un teorema, o di risolvere un problema. È vano il dire che sarà sempre così, e che i giovani sono stupidi, mentre il nostro metodo è evidentemente esposto a tanto serie accuse. La mancanza deriva in gran parte dall'ordine confuso e dalla poca attitudine a sviluppare il pensiero del libro d' Euclide. L' oggetto dell' istruzione è di dar potenza, e se il risultamento dell'insegnare Euclide è, in molti casi, unicamente quello di una

certa prontezza nel ripetere le dimostrazioni, senza la potenza di risolvere un solo problema l'istruzione non è valsa a nulla. In Geometria non meno che in Aritmetica e in Algebra, gli esempi e i problemi sono la vera pruova della potenza acquistata dallo studente e del benefizio conseguito.

Ancora, qual'è lo scopo propostoci nell'insegnare Euclide? Se consideriamo la geometria come scienza, e l' insegniamo con uno scopo scientifico, dovremmo cercare di meglio disporre la dipendenza de' teoremi secondo le loro reali attinenze, e dovremmo schivare l'artifizioso d'Euclide. Noi abbiam bisogno d'una riforma come quella di Jussieu in botanica. Quando un vero artificiale sistema di botanica pose la Wistaria e il Laburno in due differenti classi, gli stessi Autori del sistema riconobbero che si era appena dato un passo innanzi; e quando noi proviamo per mezzo d'una proprietà del triangolo isoscele, che la somma de' due lati d'un triangolo qualunque è maggior del terzo, credo che sappiamo appena quanto siamo assurdi e violiamo l' ordinamento scientifico. Se la Geometria è un giuoco da eseguirsi con regole definite, l'Euclide è in ciò molto a proposito; ma se è una scienza quanto più presto possiamo disfarcene tanto sarà meglio. Non è maravigliarsi: il progresso della Geometria è stato un continuo avanzamento; e non può credersi, *a priori*, che un libro d' istituzione scritto tanto tempo addietro possa essere un' introduzione atta alla scienza pel tempo nostro. Però faccia o no maraviglia è certo che questo ordinamento illogico ci priva di molte cose buone, che potrebbero essere dedotte dalla Geometria, quando fosse logicamente studiata. Ma in un' epoca come la nostra, in cui gli studii scientifici sono richiesti da per tutto, è nostro debito considerare se i vecchi argomenti possano essere adoperati per apportare i benefizi d' un educazione scientifica, migliorando i nostri metodi. Uno de' vantaggi della scienza sperimentale è quello d'offrire l'opportunità per fare opere originali; e questo vantaggio può ottenersi dalla Geometria, se formiamo deduzioni e problemi molto più importanti che ora non sieno. Essi sono la vera pruova d'una degna istruzione geometrica e possono esser messi in pratica acquistando potenza e conoscenza geometrica.

Infine l' esclusione d'ogni applicazione aritmetica dalle esercitazioni geometriche è una vera perdita, perchè pone nelle nostre conoscenze una divisione tutta convenzionale. Non è questione di contrapporre l'analisi algebrica alla geométria, ma di escluderne l' applicazione a quegli esempii geometrici che possono molto bene essere trattati con l' Aritmetica. Il contrario fa sì che noi perdiamo molto di quella pratica applicazione della Geometria, la quale è assai importante e dilettevole.

Di queste osservazioni alcune forse sono nuove, ed altre viete. Più d' un secolo addietro Euclide era vigorosamente attaccato e vigorosamente difeso da uomini tali come Savile, Barrow, David, Gregory, Wallis e Leibnitz. Anche allora molte Geometrie, comunque molto dissimili dalle nostre, si scrissero e furono commendate come più facili. Montucla consagra molte pagine discutendo intorno ad Euclide, in confronto de' suoi rivali; e in fine così discorre di queste Geometrie;

« Si j'avais à enseigner la géométrie je ne ferais aucune difficulté de m'en servir ; « cependant si je rencontrais un esprit doué d'une grande facilité, de ce génie en- « fin qui annonce le géomètre à venir , je ne lui conseillerais point d' autre livre « qu' Euclide ». Quanto a me disconvengo da questa seconda opinione con altrettanto fervore per quanto convengo sulla prima.

Resta a considerare ciò che una Società come questa abbia a fare pel progresso dell' insegnamento geometrico.

Da prima io sono nella ferma opinione che noi abbiam bisogno di miglioramento. Allorchè si sarà saputo che matematici distinti come quelli che formano questa Associazione ritiene la sostanza delle vedute qui innanzi espresse, cioè che l'Euclide è *antiquato, artifizioso, illogico e inadatto* come libro d'istituzione ; questa opinione avrà peso certamente. Anche la mia piccola pubblicazione è stata cagione che alcuni matematici abbiano ad alta voce espressi quei pensieri che essi tenevano chiusi nel più profondo de' loro cuori, per tema di esser dichiarati come eretici : quanto non sarà più grande l' effetto dell' opinione di coloro che qui seggono !

In secondo luogo si possono incaricare i Segretarii di comunicare un *memorandum* su questo argomento al Consiglio degli studi Matematici in Cambridge , al Collegio degli Esaminatori , e al Comitato sull' insegnamento ; non che ad altri corpi insegnanti , specialmente agli esaminatori nel *Cambridge non-gremial examinations.*

In terzo luogo dobbiamo lentamente riformare l'insegnamento geometrico, scrivendo e insegnando geometrie moderne , e costringendo le Università ad accogliere i nostri alunni.

PAROLE DEL PROF. *HIRST* SULL' INTRODUZIONE AGLI ELEMENTI DI GEOMETRIA DEL PROF. *WRIGHT*.

Estratte dal Giornale The Educational Times, *Nov.* 1868 *e tradotte da* R. R.

Ei pare che per molti anni abbia acquistato sempre più solide basi il convincimento , che le imperfezioni introdotte nell' insegnamento della Geometria nelle scuole e ne'collegi inglesi , abbiano, in massima parte , origine dal fatto , che in Inghilterra , all' opposto di quasi tutte le altre Nazioni , si stia tuttora attaccati ad un libro d'istituzione scritto 2000 anni addietro, e forse con intendimento del tutto diverso da quello col quale lo applichiamo. Nonostante i molti meriti , che non vanno soggetti a questioni, nè ammettono rivalità, gli Elementi d'Euclide non possono, neppure dagli stessi suoi ammiratori , essere dichiarati la miglior possibile *introduzione* allo studio della Geometria . . . . Tra questo libro (gli Elementi di Geometria piana del professor Wright) e i primi sei libri degli Elementi d'Euclide dev' essere necessariamente molta rassomiglianza ; e non per tanto esiste notevole differenza tra le due Opere , la quale deriva dalla diversità di scopo di ciascuna. Un obbietto principale d' Euclide sembra sia stato quello di mostrare quanto poco s' abbia bisogno di *assunti* in Geometria , e come le verità più oscure e le più ovvie , possono essere dimostrate , anche in mezzo a difficoltà non mai occorse, e ad onta di restrizioni non mai imposte. Nell' Opera del Wright , al contrario, si è voluto avvantaggiarsi di talune semplici ed incontrastabili nozioni già possedute dai fanciulli, posponendo di mostrare le loro dipendenze, collo scopo di cominciare il più prestamente la parte più importante del soggetto , cioè il passaggio, con assoluta certezza e nel modo più semplice e diretto, dalle più ovvie proprietà geometriche a quelle che sono meno ovvie, o non lo sono affatto. La superiorità di questo metodo nella istruzione non può essere contrastata da chiunque abbia osservato sia i permanenti e perniciosi effetti dello scoraggiamento prodotto da un preliminare vago, fastidioso e difficile, sia il continuo e benefico influsso dell'incoraggiamento derivante dai primi successi, e dalla soddisfazione che provano i giovanetti nel vedere che ogni sforzo intellettuale produce un reale acquisto di conoscenze. È argomento d'incontrastabile importanza l'assicurare e sostenere sin dalle prime l'interesse del giovane; e quantunque si richiedono per ciò qualità personali dell'insegnante, pure lo scopo, senza dubbio, si raggiunge per mezzo d'un manuale, in cui le difficoltà siano giudiziosamente temperate colla capacità del giovane, e le sottigliezze del soggetto siano adatte alla facoltà di saperle valutare. Si è sostenuto, e non senza ragione, che rendendo in tal modo la Geometria più accessibile , il suo valore come disciplina intellettuale , possa essere scemato. Intanto non è questo il vero caso. La disciplina intellettuale è il concomitante naturale dell'accurato ragionamento sì in Geometria, come in ogni altra scienza; e l' accuratezza del ragionamento dipende essenzialmente da una speciale distinzione serbata ad ogni passo tra l' ipotesi e la conseguenza, e dal modo di passare da quella a questa. Non può dirsi negligenza l' omettere una dimostrazione, quando questa non è necessaria al convincimento; o il posporre una ricerca di relazioni che possibilmente esistono tra assunti elementari e anch' essi incontrastabili. Anche oggi, quando giuste lamentanze si fan sentire da per ogni dove, perchè le materie da studiare nelle nostre Scuole e nei nostri Collegi divengono troppo numerose, dovremmo cercare per quant' è possibile, di combinare la disciplina intellettuale con l' effettivo progresso nelle conoscenze; anzichè continuare a disputare come rendersi patroni di quella disciplina per via di esercizi puramente artificiosi e ginnastici. Richiedonsi importanti cambiamenti nell'ordine, e nel modo d' esprimersi d'Euclide, per poter ammettere più nozioni elementari nel libro di questo autore, e per purgarlo da ogni restrizione arbitraria; in modo da non esser più sufficiente un semplice commentario a quel libro. Per esempio, noi naturalmente al concetto di lunghezza d'una retta colleghiamo quello della più breve distanza tra due suoi punti; ciò ammesso, il teorema che un lato d'un triangolo è minore della somma degli altri due (Teor. prop. 20) diviene una delle più semplici conseguenze di quest' assunto; e invece di stabilire questa conseguenza per mezzo della 5.ª e di altre proposizioni, si deve porla come in altri trattati, al principio del capitolo dei triangoli, per ajutare l'investigazione delle proprietà di queste figure. Inoltre se supponiamo che una figura possa muoversi materialmente, senza alterar la sua forma nè le sue dimensioni, come tacitamente e con riluttanza fa lo stesso Euclide, allora non v' à ragione alcuna perchè la soprapposizione, come pruova dell'egua-glianza non debba essere applicata ovunque meglio convenga al nostro scopo. Per esempio la 26ª d' Euclide, si dimostrerebbe allo stesso modo e al tempo stesso con la sua 4ª; e la formidabile 5ª perderebbe il suo carattere stentato, e diverrebbe una delle più agevoli ad essere dimostrata. Quanto ai problemi d' Euclide occorre appena il dire che il 2° e il 3° debbono essere del tutto cancellati, allorchè sarà permesso l' uso del compasso per descrivere un circolo; ma ciò che più è da notare si è, che s'acquista un doppio vantaggio ammettendo potere studiare le proprietà d' una figura, di cui si conosce soltanto l'esistenza, prima di mostrare come possa costruirsi; in primo luogo la serie dei teoremi non sarebbe interrotta dai problemi, e in secondo luogo l'eleganza e il valor pratico delle soluzioni s'accrescerebbero grandemente, posponendo qualunque problema, finchè l'alunno collo studio dei teoremi non s' avesse renduto familiari quelle proprietà delle figure, che servono quindi alla loro costruzione.