GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI

PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI

NELLE UNIVERSITÀ ITALIANE

FONDATO NEL 1863

PROSEGUITO DAL PROFESSORE

ALFREDO CAPELLI

Volume XXXVI — (5° della 2ª Serie)

NAPOLI
BENEDETTO PELLERANO EDITORE
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
Via Gennaro Serra 20,
1898.

GIORNALE

DI MATEMATICHE

DI BATTAGLINI

PER IL PROGRESSO DEGLI STUDI

NELLE UNIVERSITA ITALIANE

LE MOLTIPLICITÀ NELLE INTERSEZIONI DELLE CURVE PIANE ALGEBRICHE

CON ALCUNE APPLICAZIONI AI PRINCIPII DELLA TEORIA DI TALI CURVE.

MEMORIA ESTRATTA DA ALCUNE LEZIONI

di CORRADO SEGRE, a Torino.

Le dimostrazioni classiche delle formole di Plücker tra i caratteri di una curva piana algebrica consistono nel considerare le intersezioni di questa curva con la 1ª polare di un punto generico del piano, e con la curva Hessiana; e si riducono a vedere quante di queste intersezioni cadano nei punti singolari della curva fondamentale. Perciò, volendole esporre con rigore, ed anche con riguardo a singolarità superiori di quelle solite, occorre da prima studiare la moltiplicità d'intersezione di due curve piane in un loro punto comune. Questa moltiplicità d'intersezione si può determinare in più modi: o direttamente, per mezzo del risultante delle due curve, dalle cui equazioni si elimini una variabile; oppure sciogliendo le singolarità che le due curve hanno nel punto comune, per mezzo di trasformazioni Cremoniane (quadratiche, ad esempio); od ancora separando i vari rami o cicli dell'una curva che passano pel punto, e sostituendo le serie di potenze con cui essi vengon rappresentati analiticamente nell'equazione dell'altra curva; ecc. Questi ultimi metodi sembrano i più rapidi e sicuri; specialmente in casi un po' complicati, nei quali l'uso del primo metodo porterebbe a calcoli di una lunghezza eccessiva. All'opposto il 1º metodo è più diretto, ed esige minor numero di cognizioni analitiche e geometriche; sicchè sembra il più opportuno per una prima trattazione, in scuola, dell'ordinaria teoria delle curve piane algebriche.

In un corso sulle singolarità superiori delle curve piane algebriche svolto nell'anno 1894-95, io ho appunto proceduto così: dopo d'aver studiate, per mezzo del risultante, le moltiplicità d'intersezione di due curve, ne ho profittato per ricavare le ordinarie formole di Plücker; poi son passato alle trasformazioni Cremoniane del piano, alla separazione dei rami o cicli per mezzo di esse, ed alla rappresentazione analitica dei rami stessi; ed applicando infine quelle trasformazioni e gli sviluppi in serie che rappresentano i rami ho dimostrato le formole che estendono quelle di Plücker a singolarità qualunque.

Qui riproduco, con qualche aggiunta e modificazione, la prima parte di quel corso. Ho solo soppresso alcuni sviluppi pei quali posso rimandare, senz'altro, ai classici trattati di Salmon, Cremona, Clebsch-Lindemann, ecc.; mentre ne ho conservati altri, sebbene si riferiscano a cose notissime ed elementari, perchè mi pajono essenziali per ottenere un vero rigore nella trattazione, una piena esattezza nei risultati.

Torino, settembre 1897.

I.

Intersezioni di due curve piane. Moltiplicità d'intersezione (*).

1. Abbiansi in un piano due curve f, g, degli ordini n, m, rappresentate in coordinate omogenee di punti xyz dalle equazioni

$$f \equiv \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_n y^n = 0$$
$$g \equiv \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \ldots + \beta_m y^m = 0,$$

ove α_i indica una forma di x, z d'ordine $n-i$, e β_j una forma delle stesse variabili d'ordine $m-j$.

Eliminando y fra quelle equazioni si ha

$$\mathrm{R} \equiv \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \ldots & \ldots & \alpha_n & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & \beta_0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & \beta_m \end{vmatrix} = 0,$$

(*) Cfr. Noether: *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (1883, Mathem. Annalen t. 23).

ove le linee (orizzontali) composte con le α sono in numero di m, e quelle composte con le β sono n. Si sa che la $\mathrm{R}=0$ è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di (almeno) un valore di y (finito od infinito) che soddisfi le due equazioni $f=0$, $g=0$. Suppongasi, qui e nel seguito, che le soluzioni (xyz) comuni a queste equazioni siano in numero finito, cioè che le due curve f, g non abbiano comune una *parte* (curva). In tale ipotesi, intendiamo che il punto fondamentale $x=z=0$ sia preso fuori dei punti comuni ad f e g, e anche fuori delle rette che congiungono questi punti a due a due. Allora ogni punto comune ad f e g avrà le coordinate x, z soddisfacienti l'equazione $\mathrm{R}=0$; e viceversa ogni soluzione (xz) di quest'equazione (diversa, s'intende, dalla soluzione $x=z=0$), od in altri termini ogni fattor lineare di R, corrisponderà ad *un solo* punto comune a f, g. Quindi i punti *distinti* comuni ad f, g saranno tanti quanti sono i fattori lineari *distinti* di R, cioè le soluzioni *distinte* dell'equazione $\mathrm{R}=0$.

Per determinare l'ordine di R, si consideri un termine qualunque (non nullo) dello sviluppo del determinante che rappresenta R: quello che proviene dal prendere dalle successive linee 1ª, 2ª, ..., $(m+1)$ª, $(m+2)$ª, ... gli elementi di posti $i_1, i_2, \ldots, j_1, j_2, \ldots$, (ove $i_1 i_2 \ldots j_1 j_2 \ldots$ sarà una permutazione dei primi $m+n$ numeri naturali), cioè gli elementi

$$\alpha_{i_1-1}\,\alpha_{i_2-2}\ldots\alpha_{i_m-m}\quad \beta_{j_1-1}\,\beta_{j_2-2}\ldots\beta_{j_n-n}.$$

L'ordine di questo termine sarà

$$(n-i_1+1)+(n-i_2+2)+\ldots+(n-i_m+m)$$
$$+(m-j_1+1)+(m-j_2+2)+\ldots+(m-j_n+n)$$
$$= mn + \frac{m(m+1)}{2} + mn + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$
$$= mn.$$

È dunque mn l'ordine di R.

In conseguenza il numero delle intersezioni (*distinte*) di f, g sarà mn, oppure minore di mn: ciò a seconda che R ha mn radici o fattori lineari distinti, oppur no.—Invece di esprimersi così, si suol dire che *le curve* f, g *hanno sempre* mn *intersezioni*, come R ha sempre mn fattori lineari: basterà, per potersi esprimere in tal modo, contare ogni punto O comune ad f, g un conveniente numero I di volte, dicendo che I intersezioni delle due curve cadono in O. La scelta che subito si presenta per questo numero I, cioè per la *moltiplicità d'intersezione* di f, g in un punto comune O, consiste nell'assumerla uguale alla moltiplicità che ha per R la corrispondente radice (x, z), cioè all'esponente a cui compare in R il corrispondente fattore lineare. Quella sarà per noi la definizione della moltiplicità d'intersezione I. Diremo pure che le due curve hanno in O un *incontro* I—*punto*.

2. Per avere la moltiplicità d'intersezione di due date curve f, g, prive di parti comuni, in un loro punto O, occorre dunque fissare nel piano un punto A che non sia comune ad f, g, nè sia su alcuna retta congiungente due punti comuni; ed assunto A come punto fondamentale delle coordinate $x=z=0$, formare la risultante R delle equazioni di f e g, proveniente dall'eliminazione di y: ossia, in termini meno precisi, determinare nel fascio A il gruppo $R=0$ delle rette che projettano le intersezioni di f e g. La moltiplicità in R di quel fattore lineare che rappresenta la retta AO dà la moltiplicità d'intersezione in O di f e g.

È facile vedere, e risulterà indirettamente da quanto diremo fra poco, che quella definizione è invariantiva, non conduce a risultati diversi se si muta il sistema di riferimento, e quindi anche il punto A: purchè sempre A soddisfi le condizioni che abbiam dette.

Si ottiene spesso qualche abbreviazione nella scrittura togliendo l'omogeneità alle formole, ponendo cioè $z=1$, il che equivale a scrivere x e y al posto dei rapporti (coordinate non omogenee) $x:z$ e $y:z$. Allora R diventa un polinomio nella sola variabile x. E la moltiplicità d'intersezione di f, g nel punto O, esterno alla retta $z=0$ ed avente le coordinate (non omogenee) $x_0 y_0$, sarà la moltiplicità della soluzione $x=x_0$ nell'equazione $R=0$. Così se O viene assunto come punto fondamentale (*origine*) $x=y=0$, la moltiplicità d'intersezione di f e g in O sarà l'esponente a cui compare la variabile x come fattore in R, cioè l'esponente del termine di grado più basso del polinomio R.

Una delle due linee date sia una retta; sicchè si tratti della moltiplicità di intersezione nel punto O, origine, di una retta $y=\lambda x$ con una curva f, la cui equazione abbia come termini del minimo ordine in xy termini d'ordine s (≥ 1), cioè

$$f \equiv \varphi_s(xy) + \varphi_{s+1}(xy) + \ldots + \varphi_n(xy)$$

ove le φ sono forme binarie degli ordini indicati dai loro indici. In questo caso si otterrà R con la semplice sostituzione di $y=\lambda x$ in f. Si vede così che la moltiplicità d'intersezione in O di f con una retta generica passante per O è s; ed è maggiore di s solo per quelle rette che verificano l'equazione $\varphi_s(xy)=0$. Si dice che O è s—*plo* per f, e che le rette φ_s ne son le *tangenti*.

3. Alcune proprietà del risultante di due forme binarie dànno utili proposizioni sulle moltiplicità d'intersezione delle curve.

Per ottenere rapidamente quelle proprietà conviene adoperare l'espressione

del risultante, non in funzione dei soli coefficienti, bensì in funzione delle radici di una delle due forme binarie (*). Conservando le notazioni del n. 1, cioè

$$f \equiv \alpha_0 + \alpha_1 y + \ldots + \alpha_n y^n$$

$$g \equiv \beta_0 + \beta_1 y + \ldots + \beta_m y^m,$$

e chiamando $y_1, y_2, \ldots y_n$ le n radici y dell'equazione $f=0$, si ha pel risultante R di f e g l'espressione

$$R = (-1)^{mn} \alpha_n^{\ m} g(y_1) g(y_2) \ldots g(y_n).$$

Ciò posto, se questa si applica, supponendo che g sia il prodotto di due o più forme $g', g'', \ldots$, essa dà subito che: « il risultante di f e del prodotto $g'g''\ldots$ è uguale al prodotto dei risultanti di f e g', di f e g'', . . , ». Se invece la si applica a formare il risultante di f e $\lambda f + \mu g$, dove λ, μ sono polinomi in y di ordini $p-n$, $p-m$, si ottiene che questo risultante è

$$(-1)^{pn} \alpha_n^{\ p} \mu(y_1) g(y_1) \ldots \mu(y_n) g(y_n)$$

$$= (-1)^{mn} \alpha_n^{\ m} g(y_1) \ldots g(y_n) \times (-1)^{(p-m)n} \alpha_n^{\ p-m} \mu(y_1) \ldots \mu(y_n),$$

cioè: « il risultante di f e $\lambda f + \mu g$ è uguale al prodotto del risultante di f e g pel risultante di f e μ ».

Ritornando ora alle curve, e basandoci sulla definizione data della moltiplicità d'intersezione, deduciamo le proposizioni seguenti:

In un punto comune a due curve f, g, *l'una delle quali, per esempio* g, *si componga di due o più parti (distinte o no), la moltiplicità d'intersezione di* f *e* g *è uguale alla somma delle moltiplicità d'intersezione, in quel punto, di* f *con le singole parti nominate di* g (**).

Se f, g, λ, μ *sono forme qualunque in coordinate di punti, tali che i prodotti* λf *e* μg *sian dello stesso ordine, la moltiplicità d'intersezione delle due curve* f, g *in un punto comune è uguale alla differenza fra le moltiplicità d'intersezione, nel medesimo punto, di* f *con la curva* λf + μg, *e di* f *con la curva* μ.

(*) Dimostrazioni *razionali* (cioè senza ricorrere alle radici) delle proprietà medesime si posson vedere nel § 11 delle *Vorlesungen über Invariantentheorie*, I Band. del sig. Gordan.

(**) S'intende che la moltiplicità d'intersezione di due curve in un punto che non sia comune ad entrambe va posta uguale a zero.—E così pure, nel seguito, la moltiplicità d'intersezione di due forme di cui una si riduca ad una costante non nulla sarà da porsi uguale a zero.

In particolare: *se* f , g *sono curve di ordini* n , m , *ove* m $\geq$ n , *e* λ *è una forma d'ordine* m − n, *la moltiplicità d'intersezione di* f , g *in un dato punto è uguale alla moltiplicità d'intersezione, nel medesimo punto, di* f *e* g + λf.

4. Consideriamo, insieme con la curva f d'ordine n, un *sistema lineare di curve d'ordine* m : $\lambda g + \lambda_1 g_1 + \ldots$, ove $\lambda, \lambda_1, \ldots$ sono i parametri del sistema. Sia O un punto di f, pel quale passino le curve $g, g_1, \ldots$: per O passerà pure ogni altra curva di quel sistema. Supporremo che nè f nè una sua parte sia contenuta in tutte le curve del sistema. Formiamo la risultante, rispetto alla variabile y, delle due forme f e $\lambda g + \lambda_1 g_1 + \ldots$; la indicheremo ancora per brevità con R. Sarà evidentemente una forma d'ordine mn delle variabili x, z, nella quale i coefficienti saranno a loro volta forme di grado n dei parametri $\lambda, \lambda_1, \ldots$ Se il punto O è l'origine, $x = 0$ sarà una soluzione dell'equazione R = 0, qualunque siano $\lambda, \lambda_1, \ldots$; per conseguenza nella forma R il termine che contiene x coll'esponente più basso lo conterrà con un esponente I > 0, sarà $x^{\mathrm{I}} z^{mn-\mathrm{I}}$ moltiplicato per una certa forma Θ di grado n di $\lambda, \lambda_1, \ldots$. *La moltiplicità d'intersezione, in un punto* O, *della curva* f *con la curva generica di un dato sistema lineare* $\lambda g + \lambda_1 g_1 + \ldots$ *ha un valore* I *ben determinato: si avrà in* O *una moltiplicità d'intersezione con* f *maggiore di* I *solo per quelle curve del sistema lineare i cui parametri annullano una certa forma.*—Non sono tutte le curve che annullano Θ quelle che dànno una moltiplicità d'intersezione > I. Se O è s-plo per f, e l'asse $x = 0$ è stato scelto in modo che tagli f fuori di O in $n - s$ punti distinti, i quali non siano punti base pel sistema lineare dato, la Θ è anche annullata da quelle curve del sistema le quali passano per uno di quegli $n - s$ punti. Solo dividendo Θ per le $n - s$ forme lineari di $\lambda, \lambda_1, \ldots$ che col loro annullarsi esprimono questi passaggi si ottiene la forma, che, uguagliata a zero, dà le curve del sistema aventi in O con f più che I intersezioni.—

Il sistema lineare d'ordine m sia *un fascio*: lo rappresenteremo (togliendo, per brevità di scrittura, l'omogeneità, nelle coordinate e nei parametri) con $g + \mu g_1$. L'equazione R=0 è divisibile per x^{I}: fatta la divisione, rimane come termine indipendente da x un polinomio in μ. Consideriamo una di quelle curve del fascio che annullano questo polinomio senza passare per altri punti comuni ad f e alla retta x=0: una curva cioè che abbia con f in O più che I intersezioni. Possiamo, per brevità ancora, supporre che sia la curva g, cioè la curva del fascio per cui μ=0. Per questo valore di μ la funzione $\mathrm{R} : x^{\mathrm{I}}$ verrà ad esser divisibile ancora per una certa potenza x^i di x: sicchè R è divisibile per $x^{\mathrm{I}+i}$, sono I+i le intersezioni in O di f e g. Ora un noto teorema di Cauchy (della continuità delle funzioni algebriche) (*) applicato all'equazione $\mathrm{R} : x^{\mathrm{I}} = 0$ fra x e μ, la

(*) Cfr. ad esempio Briot *et* Bouquet: *Théorie des fonctions elliptiques*, 2e éd., pag. 31 ; Jordan: *Cours d'analyse*, 2e éd., t. I, pag. 342.

quale per μ=0 ammette x=0 come soluzione i–pla ci dice, che, se μ si prende convenientemente piccola in valor assoluto (modulo), quell'equazione ammetterà delle soluzioni x piccole in valor assoluto quanto si vuole. Queste soluzioni corrispondono a punti comuni ad f e $g + \mu g_1$, i quali tenderanno verso O col diminuire di μ: giacchè per ipotesi f e g non hanno altri punti in comune sulla retta x=0. Dunque: *se le curve generiche di un fascio hanno con* f *in* O *la moltiplicità d'intersezione* I, *mentre una curva particolare* g *del fascio ha in* O *con* f *moltiplicità d'intersezione maggiore di* I, *una curva del fascio abbastanza prossima a* g *avrà una o più intersezioni con* f *diverse da* O *ma prossime quanto si vuole ad* O. In questo enunciato, col dire che due curve dello stesso ordine sono *abbastanza vicine* intendiamo dire che, dopo moltiplicata, se occorre, l'una di esse per un conveniente fattore, le differenze tra i coefficienti omologhi delle due equazioni hanno i moduli minori di un conveniente limite. — Ponendo una certa condizione, possiamo precisare meglio. Supponiamo che, dopo tolti da R, mediante divisione, tutti i fattori che dipendono dalla sola x e non da μ (rappresentanti quei punti che stanno su f e su tutte le curve del fascio), il discriminante della nuova funzione di x non sia nullo identicamente: basterà perciò che *vi sia una curva del fascio, la quale, fuori dei punti base, incontri* f *in punti tutti distinti* (*). Allora il teorema sulle funzioni algebriche già adoperato dà un risultato più preciso: poichè per $\mu = 0$ l'equazione che noi consideriamo ha la soluzione x=0 come i–pla, per μ abbastanza piccola in valor assoluto essa ammetterà esattamente i diverse radici x di modulo minore di un limite dato ad arbitrio, purchè convenientemente piccolo. Dunque, nella fatta ipotesi, potremo dire che: *se la curva particolare* g *del fascio ha in* O *con* f *la moltiplicità d'intersezione* I+i, *una curva del fascio abbastanza prossima a* g *avrà precisamente* i *intersezioni con* f, *distinte fra loro e da* O, *prossime quanto si vuole ad* O.

Tutto ciò vale anche se I=0. Ne possiamo trarre una nuova definizione per la moltiplicità d'intersezione i di due curve, f d'ordine n, e g d'ordine m, in un punto comune O: nell'ipotesi che l'una di esse, ad esempio f, sia priva di parti multiple, e non abbia alcuna parte comune con l'altra. Un fascio *generico* di curve d'ordine m, nel quale stia g, sarà tale che la curva generica del fascio taglierà f in mn punti, tutti distinti e variabili: invero f è così incontrata, ad esempio, da una curva d'ordine m composta di m rette convenienti (non passanti pei punti multipli di f, nè tangenti ad f, nè incrociantisi su f). Quel fascio d'ordine m è dunque nelle condizioni dianzi supposte. Inoltre è qui I=0, perchè O non è punto base del fascio. Abbiamo dunque la proposizione seguente: *Sia* i *la moltiplicità d'intersezione in un punto* O *di due curve* f , g *degli ordini* n , m, *tali che* f, *ad esempio, non contenga parti multiple, nè abbia parti comuni con* g

(*) Si potrebbe dimostrare, ma ciò esigerebbe qualche considerazione un po' più lunga — e d'altronde non ci occorre qui —, che questa condizione è sempre soddisfatta *se* f *non ha componenti multiple.*

una curva d'ordine m, *abbastanza prossima a* g, *e generica, vale a dire tale che tagli* f *in* mn *punti distinti fra loro e distinti dai punti comuni ad* f e g, *avrà precisamente* i *di queste intersezioni con* f *prossime quanto si vuole ad* O. — Questa proposizione mette bene in chiaro la natura geometrica, invariantiva, di quel numero che abbiam chiamato « moltiplicità d'intersezione » ; e dà ragione di questo nome.

II.

Determinazione della moltiplicità d'intersezione in alcuni casi.

5. Occupiamoci della moltiplicità d' intersezione delle due curve f, g nel punto O, supponendo che questo sia s—plo per f ed r—plo per g. Assunto O come origine, dovranno tutti i termini di f contenere x, y almeno a grado s; per conseguenza la α_i del n. 1 quando $i<s$ conterrà il fattore x^{s-i}. Similmente la β_j per $j<r$ conterrà il fattore x^{r-j}. La moltiplicità d'intersezione in O di f e g è data dall'esponente della potenza di x che entra come fattore nel determinante R del detto n. 1. Per ottenerla moltiplichiamo le prime $r-1$ linee (orizzontali) di quel determinante rispettivamente per $x^{r-1}, x^{r-2}, \dots, x$, e le $s-1$ linee di posti $(m+1), (m+2), \dots$ rispettivamente per $x^{s-1}, x^{s-2}, \dots, x$. Con ciò la 1ª colonna (linea verticale) diventerà divisibile per x^{r+s-1}, la 2ª colonna per $x^{r+s-2}, \dots$, la $(r+s-1)^{\text{ma}}$ per x. Ne segue che R contiene x a potenza almeno uguale a

$$\frac{(r+s)(r+s-1)}{2} - \frac{r(r-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} = rs.$$

Dunque: *la moltiplicità d'intersezione in un punto è maggiore od uguale al prodotto delle moltiplicità che nel punto hanno le due curve.*

6. Importa stabilire in quali casi quella moltiplicità d'intersezione di f e g sarà maggiore del prodotto rs. A tal fine ci serviremo di un procedimento dovuto al sig. Voss (*).

La detta moltiplicità d'intersezione è maggiore di rs quando nel polinomio R è nullo il coefficiente del termine in x^{rs}. La questione si riduce dunque a calcolare questo coefficiente. Ora ciò si può fare nel seguente modo. Si operino nel determinante R le moltiplicazioni e divisioni, indicate dianzi (n. 5), di linee e colonne per potenze di x, il cui effetto sarà di dividere R per x^{rs}; indi si ponga nel risultato $x=0$: si avrà così il coefficiente cercato.

(*) V. a pag. 533 del t. 27 (1886) dei Mathem. Annalen. (Tengo conto anche di una piccola semplificazione indicata dal sig. Noether a pag. 144 del t. 40 degli stessi Annali).

Riscriviamo il determinante R, separandone le linee in quattro gruppi, (1) di r linee, (2) di $m-r$, (3) di s, (4) di $n-s$; e le colonne in due gruppi, cioè (I) di $r+s$, (II) di $m+n-r-s$; così:

$$\begin{array}{c|ccccc|ccccc|}
 & & & \text{(I)} & & & & & \text{(II)} & & \\
\hline
\mathrm{R}\equiv & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{r+s-1} & & \alpha_{r+s} & \alpha_{r+s+1} & \dots & 0 & \\
 & 0 & \alpha_0 & \dots & \alpha_{r+s-2} & & \alpha_{r+s-1} & \alpha_{r+s} & \dots & 0 & \\
(1) & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & & \alpha_{s+1} & \alpha_{s+2} & \dots & 0 & \\
\hline
 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & & \alpha_s & \alpha_{s+1} & \dots & 0 & \\
 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-2} & & \alpha_{s-1} & \alpha_s & \dots & 0 & \\
(2) & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & \alpha_n \\
\hline
 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{r+s-1} & & \beta_{r+s} & \beta_{r+s+1} & \dots & 0 & \\
 & 0 & \beta_0 & \dots & \beta_{r+s-2} & & \beta_{r+s-1} & \beta_{r+s} & \dots & 0 & \\
(3) & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & 0 & 0 & \dots & \beta_r & & \beta_{r+1} & \beta_r & \dots & 0 & \\
\hline
 & 0 & 0 & \dots & \beta_{r-1} & & \beta_r & \beta_{r+1} & \dots & 0 & \\
 & 0 & 0 & \dots & \beta_{r-2} & & \beta_{r-1} & \beta_r & \dots & 0 & \\
(4) & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & \beta_m
\end{array}$$

scrivendo $\alpha_{r+s}, \dots$ s'intende che quando venisse una α con indice $>n$, sarebbe un simbolo che sostituisce lo zero; e analogamente per le β. — Mettiamo ora in evidenza nelle α e β i termini più bassi rispetto ad x; sia cioè, ordinando secondo le potenze crescenti di x (e ponendo per brevità $z=1$),

$$\begin{array}{lll}
\text{per} & i \leq s, & \alpha_i \equiv a_i x^{s-i} + \dots \\
 & i \geq s, & \alpha_i \equiv a_i + \dots \\
 & j \leq r, & \beta_j \equiv b_j x^{r-j} + \dots \\
 & j \geq r, & \beta_j \equiv b_j + \dots,
\end{array}$$

e vediamo che cosa diventano queste quantità nei singoli posti che occupano nel determinante R, quando su questo si facciano le operazioni che abbiam dette. La α_i (dove i si prende ad arbitrio) sta in ogni linea dei gruppi (1) e (2). Consideriamola nella k–esima linea di R: sarà evidentemente nell'incontro di questa con la colonna $(i+k)$–esima. Supponiamo da prima che questa faccia parte del gruppo di colonne (I): sarà dunque $i+k \leq r+s$. Allora se $k>r$, cioè se l'elemento α_i si prende nella regione (I2) del determinante R, sarà $i<s$; e poichè quell' elemento non subisce allora altre operazioni che la divisione per $x^{r+s-i-k}$, dopo di questa conterrà ancora x a potenza $(s-i)-(r+s-i-k)=k-r$, che è per ipotesi >0: dunque facendo poi $x=0$ esso svanirà. Svaniscono dunque tutti gli elementi della regione (I2). –Invece se $k \leq r$, cioè se α_i si prende nella regione (I1), essa viene prima moltiplicata per x^{r-k} e poi divisa per $x^{r+s-i-k}$: in conclusione rimane divisa per x^{s-i}. Quindi, se $i \leq s$, posto $x=0$, rimarrà in quel posto a_i; e se invece $i>s$ la divisione per x^{s-i} fa sì che, ponendo poi $x=0$, quell'elemento si annullerà. — Analogamente: nella regione (I4) tutti gli elementi svaniranno; e nella (I3) rimarranno solo, e saran da sostituirsi con b_j, quelle β_j che hanno l'indice $j \leq r$ (al posto delle altre si metteranno degli zeri).—Venendo al gruppo di colonne II, e più precisamente alle regioni (II2), (II4), i cui elementi non hanno subito nè moltiplicazioni nè divisioni per potenze di x, quando vi si ponga $x=0$ le α_i diverranno 0 se $i<s$ e si ridurranno ad a_i se $i \geq s$; ed analogamente per le β_j.—Sviluppando ora il determinante R così modificato, secondo i determinanti d'ordine $r+s$ e $m+n-r-s$ estratti rispettivamente dai gruppi di colonne (I) e (II), l' unico determinante non nullo che si avrà dalle (I) sarà quello che proviene dalle linee (1) e (3): e si conclude che il coefficiente del termine in x^{rs} nel polinomio R di x è

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{s-1} & a_s & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & a_s \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & b_r \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_s & a_{s+1} & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_s & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & a_n \\ b_r & b_{r+1} & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & b_r & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & b_m \end{vmatrix}$$

Ora il 1° di questi determinanti è il risultante delle equazioni

$$\varphi_s \equiv a_0 x^s + a_1 x^{s-1} y + \dots + a_s y^s = 0$$

$$\psi_r \equiv b_0 x^r + b_1 x^{r-1} y + \dots + b_r y^r = 0 ,$$

le quali rappresentano (n. 2) i gruppi delle s ed r tangenti in O ad f e g: il suo annullarsi significherebbe dunque che queste curve hanno una tangente comune in O. Ed il 2° determinante è il risultante delle equazioni

$$a_s + a_{s+1} y + \dots + a_n y^{n-s} = 0$$

$$b_r + b_{r+1} y + \dots + b_m y^{m-r} = 0 ,$$

le quali determinano le intersezioni di f e g con la retta $x=0$, dalle quali sia tolto il punto O contato rispettivamente s ed r volte. Per l'ipotesi (n. 1) che il punto fondamentale A non stia su alcuna retta congiungente due punti comuni ad f e g, quest'ultima coppia di equazioni non può ammettere una soluzione y comune, all'infuori eventualmente della soluzione $y=0$, che si avrebbe nel caso che la retta $x=0$ fosse tangente in O ad ambe le curve. Del resto, per poter d'or innanzi dire che quel 2° determinante è essenzialmente diverso da zero, converremo che il punto fondamentale A sia preso fuori delle tangenti comuni ad f e g in O: sicchè la retta $x=0$ non sarà mai fra queste tangenti.—Concludiamo finalmente: *La condizione necessaria e sufficiente perchè la moltiplicità d'intersezione delle due curve nel punto* O, r*–plo ed* s*–plo per esse, sia maggiore del prodotto* rs, *è che le curve abbiano ivi almeno una tangente comune.*

7. Poniamo ora che effettivamente f e g abbiano comune una tangente t in O. Si tratterà, in questo n.° e nei seguenti fino al n. 12, di applicare procedimenti simili a quelli dei n.i 5 e 6 alla determinazione della moltiplicità d'intersezione di f e g in O, in vari casi.

Da prima introduciamo solo la considerazione di un numero $h \geq 1$, tale che la tangente t abbia in O con f e con g delle moltiplicità d'intersezione rispettivamente $\geq s+h$ e $\geq r+h$. Assunta la t come asse $y=0$, quell'ipotesi equivarrà a dire che α_0 contiene come divisore non solo x^s ma x^{s+h}, e che similmente β_0 contiene il fattore x^{r+h}; ossia che son nulle le costanti a_0 e b_0, e si ha

$$\alpha_0 \equiv a x^{s+h} + \dots$$

$$\beta_0 \equiv b x^{r+h} + \dots$$

Operando allora sul determinante R come s'è fatto al n. 5 si ottiene negli elementi della 1ª colonna la x elevata a potenza superiore di h a quella che si veva allora. Dunque: *la moltiplicità d'intersezione di due curve in un punto* r*–plo ed* s*–plo per esse, con una tangente comune ad incontro almeno* (r+h)*-punto ed* (s+h)*-punto, è maggiore od uguale a* rs + h.

Per vedere poi quando è che quella moltiplicità è maggiore di $rs+h$, operiamo come al n. 6, con la sola modificazione di dividere la 1ª colonna per $x^{r+s+h-1}$ anzi che per x^{r+s-1}. Allora come coefficiente di x^{rs+h} nel polinomio R si ottiene quello stesso prodotto di due determinanti che nel n. 6 si era trovato come coefficiente di x^{rs}: con la differenza che ora nella 1ª colonna del 1° determinante in luogo di a_0 e b_0 si dovrà scrivere a e b (mentre nelle altre a_0 e b_0 assumono il valore zero). Il 1º determinante è dunque

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \dots 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots a_s \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \dots 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots b_r \end{vmatrix} = (ab_1 - a_1 b) \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots 0 \\ 0 & a_1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \dots a_s \\ b_1 & b_2 \dots 0 \\ 0 & b_1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \dots b_r \end{vmatrix}$$

ossia è uguale al prodotto di $(ab_1 - a_1 b)$ pel risultante di

$$a_1 x^{s-1} + a_2 x^{s-2} y + \dots + a_s y^{s-1} = 0 ,$$

$$b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} y + \dots + b_r y^{r-1} = 0 ,$$

cioè dei due gruppi di $s-1$ ed $r-1$ tangenti in O ad f e g, che rimangono togliendo (una volta) la t dai gruppi φ_s e ψ_r di s ed r tangenti. Quanto al 2º dei determinanti su nominati esso rimane quale era nel n. prec.; e quindi, come vi si disse, essenzialmente diverso da zero. Concludiamo che: *la moltiplicità d'intersezione è superiore ad* $rs + h$: 1º) *quando coincidono una delle* $s-1$ *tangenti in* O *ad* f *che rimangono oltre alla* t *ed una delle* $r-1$ *tangenti in* O *a* g *che rimangono oltre alla* t; 2º) *quando, assumendo* O *come origine e la tangente* t *come retta* $y=0$, *cosicchè le equazioni delle due curve, ordinate secondo le potenze crescenti delle variabili, siano*

$$f \equiv ax^{s+h} + \dots + y(a_1 x^{s-1} + \dots) + \dots\dots$$

$$g \equiv bx^{r+h} + \dots + y(b_1 x^{r-1} + \dots) + \dots\dots ,$$

si abbia

$$ab_1 - a_1 b = 0. \quad (*)$$

(*) Questa relazione tra i coefficienti delle due curve, e così altre che incontreremo poi, esprimono dei *contatti superiori* (osculazioni) che hanno luogo fra quei *rami* (o *cicli*) delle curve f e g i quali son tangenti in O a t.

Merita di esser rilevato il caso seguente, che ci si presenterà nelle applicazioni. Se $a = 0$ e b non è 0, la condizione $ab_1 - a_1 b = 0$ si riduce ad $a_1 = 0$. Ora $a = 0$ significa che f e t hanno in O moltiplicità d'intersezione maggiore di $s+h$; mentre $a_1 = 0$ significa che t assorbe due (almeno) delle s tangenti in O ad f. Dunque: *se* O *è* s*–plo per* f, r*–plo per* g, *e* t *ha in* O *moltiplicità d'intersezione* r + h *con* g, *e* > s + h *con* f, *la moltiplicità d'intersezione in* O *di* f *con* g *è maggiore di* rs + h *solo quando una delle* s − 1 *tangenti in* O *ad* f *che rimangono oltre alla* t *sia pur tangente in* O *a* g: *in particolare quando* t *assorbe due almeno) delle* s *tangenti in* O *ad* f.

Così se $s = 1$, f avrà come unica tangente la t, e la moltiplicità d'intersezione di f e g nelle fatte ipotesi non potrà essere maggiore di $r + h$. Ponendo $r + h = k$, l'ipotesi che la moltiplicità d'intersezione in O di f e t sia $> s + h$ risulterà certo soddisfatta, se supporremo che la detta moltiplicità d'intersezione sia $> k$. Adunque: *se la curva* g *passa per* O *con moltiplicità qualunque, avendovi incontro* k*–punto con la retta* t, *mentre la curva* f *passa semplicemente per* O, *avendovi incontro più che* k*–punto con la tangente* t, *la moltiplicità d'intersezione di* g, f *in* O *sarà esattamente* k.

8. Abbiamo osservato or ora che: se la tangente comune t ad f e g nel punto O s–plo, r–plo, ha ivi incontro $(r + h)$-punto con g, ma più che $(s + h)$-punto con f, ed inoltre assorbe almeno due delle s tangenti ad f in O, allora le intersezioni in O di f e g saranno almeno $rs+h+1$. Esaminiamo ora in quali casi queste intersezioni in O siano in numero maggiore di quello.

Le ipotesi fatte per la tangente t di f equivalgono a mettere nel nº preced. $a = 0$, $a_1 = 0$. In conseguenza poniamo:

$$a_0 \equiv a' x^{s+h+1} + \dots , \quad a_1 \equiv a'_1 x^s + \dots ,$$

conservando pel resto le notazioni di prima. Si facciano ora nel determinante R le stesse moltiplicazioni di linee per potenze di x che si fecero al n. 5: col solo divario, che la linea di posto $m + 1$ si moltiplichi ora per x^s anzi che per a^{s-1}. Diventerà allora la 1ª colonna divisibile per x^{r+s+h} (anzi che per x^{r+s-1}), la 2ª per x^{r+s-1} (anzi che per x^{r+s-2}), e poi le altre colonne per le stesse potenze di x come al n. 5. Eseguite quelle divisioni, e posto poi $x = 0$, si ha, operando come ai n.i 6, 7, che il coefficiente di x^{rs+h+1} in R è il prodotto di un determinante essenzialmente diverso da zero pel seguente determinante (d' ordine $r+s$):

$$\begin{vmatrix} a' & a'_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_s \\ b & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & bx^{h-1} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_r \end{vmatrix}$$

Questo, sviluppato secondo le prime tre colonne, risulta uguale al prodotto di

$$a_2 b^2 x^{h-1} + b_1 (a' b_1 - a'_1 b)$$

pel determinante risultante di

$$a_2 x^{s-2} + a_3 x^{s-3} y + \dots + a_s y^{s-2} = 0\,,$$

$$b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} y + \dots + b_r y^{r-1} = 0\,,$$

cioè risultante dei due gruppi di $s-2$ ed $r-1$ tangenti in O ad f e g, che rimangono togliendo t due volte dal gruppo delle s tangenti ad f, e una volta dal gruppo delle r tangenti a g. Dunque: *Se le due curve* f, g *hanno comune, nel punto* s*–plo*, r*–plo* O, *una tangente* t, *la quale abbia con* g *in* O *incontro* (r + h)*-punto e conti fra le* r *tangenti di* g *in* O *solo una volta, mentre abbia in* O *con* f *incontro più che* (s + h)*-punto, ed inoltre conti due volte almeno fra le* s *tangenti ad* f*; la moltiplicità d'intersezione di* f *e* g *in* O *sarà almeno uguale a* rs + h + 1. *E sarà maggiore solo nei casi seguenti:* 1°) *quando* f *e* g *abbiano comune un'ulteriore tangente in* O. 2°) *se* h = 1, *sicchè*

$$f \equiv a' x^{s+2} + \dots + y(a'_1 x^s + \dots) + y^2(a_2 x^{s-2} + \dots) + \dots .$$

$$g \equiv b x^{r+1} \;\; + \dots + y(b_1 x^{r-1} + \dots) + \dots \dots ,$$

quando sia soddisfatta la condizione

$$a_2 b^2 - a'_1 b\, b_1 + a' b_1^2 = 0.$$

3°) *se* h > 1, *sicchè*

$$f \equiv a' x^{s+h+1} + \dots + y(a'_1 x^s + \dots) + \dots \dots$$

$$g \equiv b x^{r+h} \;\; + \dots + y(b_1 x^{r-1} + \dots) + \dots \dots ,$$

quando sia

$$a' b_1 - a'_1 b = 0.$$

9. Possiamo, sempre seguendo lo stesso metodo, ottenere una proposizione più generale di quelle stabilite al n. 7. Supponiamo cioè, non solo, come ivi s'era fatto, che le due curve f, g abbiano comune la tangente t $(y=0)$, per modo che le moltiplicità d'intersezione in O di f e g con t siano maggiori od uguali a $s+h$ ed $r+h$; ma, di più, che t conti fra le s tangenti di f in O e fra le r tangenti di g in O un certo numero di volte, maggiore od uguale a τ: sicchè le forme φ_s e ψ_r siano divisibili per y^τ (ed è $\tau \leq r$, s). Sarà allora da porre nel n. 6

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{\tau-1} = 0$$

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{\tau-1} = 0\,;$$

ossia, oltre alle ipotesi del n. 7

$$\alpha_0 \equiv a x^{s+h} + \dots$$

$$\beta_0 \equiv b x^{r+h} + \dots ,$$

avremo ora, se si esclude il caso di $\tau = 1$ già trattato nel n. 7,

$$\text{per } 0 < i < \tau \qquad \alpha_i \equiv a'_i\, x^{s-i+1} + \dots$$

$$\text{per } 0 < j < \tau \qquad \beta_j \equiv b'_j\, x^{r-j+1} + \dots ,$$

mentre poi per i valori di i e j che sono $\geq \tau$ adoperiamo ancora le espressioni (primi termini) di α_i e β_j date nel n. 6. Nel primitivo determinante R si avrà così la prima colonna col fattore x a potenza superiore di h unità, e poi le successive colonne fino alla τ–esima (inclusa) col fattore x a potenza superiore di un'unità, rispetto a quelle che si avevano ai numeri 5 e 6. In conseguenza, mentre allora si trovava in R il fattore x^{rs}, ora si vede che vi sarà x elevato almeno alla potenza $rs + h + \tau - 1$.

Ma è facile riconoscere che se, oltre ad essere $\tau > 1$, è anche $h > 1$, come per ora supporremo, in R entrerà x a potenza $rs + h + \tau$. Basta perciò modificare lievemente le moltiplicazioni adoperate nel n. 5 delle linee di R: moltiplicare cioè le prime $r-1$ linee rispettivamente per $x^r, x^{r-2}, x^{r-3}, \dots, x$ e le $s-1$ linee di posti $(m+1), (m+2), \dots$ per $x^s, x^{s-2}, x^{s-3}, \dots, x$. In tal modo la 1ª colonna diventa divisibile per x^{r+s+h}, la 2ª per x^{r+s} (mercè l'ipotesi che sia $h>1$), la 3ª per $x^{r+s-2}, \dots$, la τ-esima per $x^{r+s-\tau+1}$, la $(\tau+1)$-esima per $x^{r+s-\tau}$; e poi la $(\tau+2)$-esima solo più per $x^{r+s-\tau-2}$, la $(\tau+3)$-esima per $x^{r+s-\tau-3}, \dots$, la $(r+s-1)$-esima per x. Si vede così che effettivamente R nel caso attuale è divisibile per $x^{rs+h+\tau}$.

Per determinare poi il coefficiente del termine di grado $rs+h+\tau$ in R, facciamo le moltiplicazioni di linee e divisioni di colonne per potenze di x, ora indicate; indi poniamo $x=0$. Accadrà anche questa volta, come al n. 6, che tutti gli elementi delle regioni (I2) e (I4) svaniranno. Per conseguenza il coefficiente cercato risulterà ancora come prodotto di due determinanti: di cui l'uno, composto con le due regioni (II2), (II4), i cui elementi non hanno subito modificazioni di sorta, non può annullarsi (come si disse al n. 6); e l'altro, d'ordine $r+s$, sarà:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
a & a'_1 & 0 & 0 & 0 & \dots a_\tau & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\
0 & ax^{h-2} & a'_1 & a'_2 & a'_3 & \dots a'_{\tau-1} & a_\tau & a_{\tau+1} & a_{\tau+2} & \dots 0 \\
0 & 0 & 0 & a'_1 & a'_2 & \dots a'_{\tau-2} & 0 & a_\tau & a_{\tau+1} & \dots 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a'_1 & \dots a'_{\tau-3} & 0 & 0 & a_\tau & \dots 0 \\
. & . & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & . & . & . & \dots a_s \\
b & b'_1 & 0 & 0 & 0 & \dots b_\tau & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\
0 & bx^{h-2} & b'_1 & b'_2 & b'_3 & \dots b'_{\tau-1} & b_\tau & b_{\tau+1} & b_{\tau+2} & \dots 0 \\
0 & 0 & 0 & b'_1 & b'_2 & \dots b'_{\tau-2} & 0 & b_\tau & b_{\tau+1} & \dots 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & b'_1 & \dots b'_{\tau-3} & 0 & 0 & b_\tau & \dots 0 \\
. & . & . & . & . & \dots & . & . & . & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & . & . & . & \dots b_r
\end{array}\right|$$

Per sviluppare questo determinante occorre distinguere due casi, secondo che τ è maggiore od uguale a 2.

Sia $\tau > 2$. Allora, sviluppando anzitutto secondo i determinanti estratti dalle colonne 1ª, 2ª, 3ª, $(\tau+2)$-esima, si ha (astraendo dal segno):

$$(ab'_1 - a'_1 b)(a'_1 b_\tau - a_\tau b'_1) \times \left|\begin{array}{ccccccccc}
a'_1 & a'_2 & a'_3 & \dots a'_{\tau-2} & a_\tau & a_{\tau+1} & a_{\tau+2} & \dots 0 \\
0 & a'_1 & a'_2 & \dots a'_{\tau-3} & 0 & a_\tau & a_{\tau+1} & \dots 0 \\
0 & 0 & a'_1 & \dots a'_{\tau-4} & 0 & 0 & a_\tau & \dots 0 \\
. & . & . & \dots & . & . & . & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & . & . & . & \dots a_s \\
b'_1 & b'_2 & b'_3 & \dots b'_{\tau-2} & b_\tau & b_{\tau+1} & b_{\tau+2} & \dots 0 \\
0 & b'_1 & b'_2 & \dots b'_{\tau-3} & 0 & b_\tau & b_{\tau+1} & \dots 0 \\
0 & 0 & b'_1 & \dots b'_{\tau-4} & 0 & 0 & b_\tau & \dots 0 \\
. & . & . & \dots & . & . & . & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & . & . & . & \dots b_r
\end{array}\right|$$

Si sviluppi poi questo nuovo determinante secondo i determinanti di 2º ordine estratti dalle colonne 1ª e $(\tau-1)$-esima, il che dà il fattore $(a'_1 b_\tau - a_\tau b'_1)$; poi secondo quelli estratti dalle attuali colonne 2ª e τ-esima, il che dà una seconda volta quel fattore; poi secondo quelli estratti dalle colonne 3ª e $(\tau+1)$-esima; e così via, fino allo sviluppo secondo le attuali colonne di posti $(\tau-2)$ e $2(\tau-2)$, il che dà una $(\tau-2)$-esima volta quello stesso fattore $(a'_1 b_\tau - a_\tau b'_1)$. Si ottiene così $(ab'_1 - a'_1 b) \times (a'_1 b_\tau - a_\tau b'_1)^{\tau-1}$ moltiplicato pel determinante d'ordine $r+s-2\tau$

$$\left|\begin{array}{ccccc}
a_\tau & a_{\tau+1} & a_{\tau+2} & \dots & 0 \\
0 & a_\tau & a_{\tau+1} & \dots & 0 \\
. & . & . & \dots & . \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_s \\
b_\tau & b_{\tau+1} & b_{\tau+2} & \dots & 0 \\
0 & b_\tau & b_{\tau+1} & \dots & 0 \\
. & . & . & \dots & . \\
0 & 0 & 0 & \dots & b_r
\end{array}\right|$$

che è il risultante dei due gruppi di $(s-\tau)$ ed $(r-\tau)$ tangenti ad f e g in O, che rimangono togliendo la t contata τ volte dai gruppi φ_s e ψ_r di s ed r tangenti.

Sia invece $\tau = 2$. Allora lo sviluppo del determinante primitivo secondo le prime quattro colonne risulta uguale al prodotto di

$$x^{h-2}\,(ab_2 - a_2 b)^2 - (ab'_1 - a'_1 b)\,(a'_1 b_2 - a_2 b'_1)$$

pel determinante risultante ora scritto (nel quale si ponga $\tau = 2$). Quindi: se è $h > 2$ non si avrà nessuna modificazione essenziale nel coefficiente che si tratta di esaminare in R, lo si otterrà cioè dal caso precedente ponendovi $\tau = 2$; ma se invece è $h = 2$, si ottiene in quel coefficiente il seguente fattore, al posto di quelli che si avevan prima:

$$(ab_2 - a_2 b)^2 - (ab'_1 - a'_1 b)\,(a'_1 b_2 - a_2 b'_1).$$

Concludiamo la seguente proposizione:

Le due curve f, g *abbiano nel punto* s–*plo*, r–*plo* O *una tangente comune* t, *la quale nel numero complessivo*, s *od* r, *delle tangenti in* O *conti almeno* τ *volte, essendo* $\tau > 1$; *e la quale inoltre abbia con* f *e* g, *nel punto* O, *moltiplicità d'intersezione almeno uguale ad* s+h, *ed* r+h, *essendo* h>1. *La moltiplicità d'intersezione di* f *e* g *in* O *sarà maggiore od uguale a* rs + h + τ. *Sarà maggiore solo nei casi seguenti*: 1º) *Quando si abbia un'ulteriore coincidenza di una tangente in* O *ad* f *con una tangente in* O *a* g.—2º) *Quando, assunto* O *come origine e* t *come retta* y = 0, *sicchè le equazioni delle due curve, ordinate secondo le potenze crescenti di* y *e (subordinatamente) di* x, *siano*

$$f \equiv ax^{s+h} + \ldots + y\,(a'_1 x^s + \ldots) + y^2\,(a'_2 x^{s-1} + \ldots) + \ldots\ldots$$

$$+\, y^{\tau-1}\,(a'_{\tau-1}\; x^{s-\tau+2} + \ldots) + y^{\tau}\,(a_\tau\, x^{s-\tau} + \ldots) + \ldots\ldots$$

$$g \equiv bx^{r+h} + \ldots + y\,(b'_1 x^r + \ldots) + y^2\,(b'_2 x^{r-1} + \ldots) + \ldots\ldots$$

$$+\, y^{\tau-1}\,(b'_{\tau-1}\, x^{r-\tau+2} + \ldots) + y^{\tau}(b_\tau\, x^{r-\tau} + \ldots) + \ldots\ldots,$$

risulti verificata o l'una o l'altra delle relazioni seguenti:

$$ab'_1 - a'_1 b = 0$$

$$a'_1 b^{\tau} - a_\tau b'_1 = 0,$$

purchè però non siano in pari tempo τ *ed* h *uguali a* 2. — 3º) *Quando* $\tau = h = 2$ *ed inoltre, conservando le notazioni precedenti, ha luogo la relazione*:

$$(ab_2 - a_2 b)^2 - (ab'_1 - a'_1 b)\,(a'_1 b_2 - a_2 b'_1) = 0.$$

10. Esaminiamo ora il caso che sia h=1, con τ qualunque. Facendo le stesse moltiplicazioni che si sono adoperate nel precedente nº 9 di linee di R per potenze di x, diventa la 1ª colonna divisibile per x^{r+s+1}, la 2ª per x^{r+s-1} (anzi che per x^{r+s}), e poi la 3ª per x^{r+s-2} e così via, come nel n. 9. Eseguendo queste divisioni, indi ponendo $x = 0$, si ha che il coefficiente del termine più basso in R, cioè del termine in $x^{rs+\tau}$, è uguale al prodotto di un determinante, non nullo, proveniente dalle colonne (II), per quest'altro determinante:

$$\begin{vmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots a_\tau & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\
0 & a & a'_1 & a'_2 & a'_3 & \ldots a'_{\tau-1} & a_\tau & a_{\tau+1} & a_{\tau+2} & \ldots 0 \\
0 & 0 & a & a'_1 & a'_2 & \ldots a'_{\tau-2} & 0 & a_\tau & a_{\tau+1} & \ldots 0 \\
0 & 0 & 0 & a & a'_1 & \ldots a'_{\tau-3} & 0 & 0 & a_\tau & \ldots 0 \\
. & . & . & . & . & \ldots . & . & . & . & \ldots . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots . & . & . & . & \ldots a_s \\
b & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots b_\tau & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\
0 & b & b'_1 & b'_2 & b'_3 & \ldots b'_{\tau-1} & b_\tau & b_{\tau+1} & b_{\tau+2} & \ldots 0 \\
0 & 0 & b & b'_1 & b'_2 & \ldots b'_{\tau-2} & 0 & b_\tau & b_{\tau+1} & \ldots 0 \\
0 & 0 & 0 & b & b'_1 & \ldots b'_{\tau-3} & 0 & 0 & b_\tau & \ldots 0 \\
. & . & . & . & . & \ldots . & . & . & . & \ldots . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots . & . & . & . & \ldots b_r
\end{vmatrix}$$

E questo, sviluppato secondo i determinanti di 2º ordine estratti dalle linee 1ª e $(\tau+1)$–esima, poi secondo quelli estratti dalle attuali colonne 2ª e $(\tau+2)$–esima, 3ª e $(\tau+3)$–esima, ... τ–esima e (2τ)–esima, risulta uguale al prodotto di $(ab_\tau - a_\tau b)^\tau$ pel determinante risultante dei due gruppi di $s-\tau$, $r-\tau$ tangenti di f e g in O che rimangono oltre alla t contata τ volte. Dunque:

Se le due curve f, g *hanno nel punto* s–*plo*, r–*plo* O *una tangente comune, la quale conti un certo numero di volte* $\geq \tau$ *fra le* s, r *tangenti di* f, g *in* O, *la moltiplicità d'intersezione delle due curve in questo punto sarà almeno uguale ad* rs + τ; *e sarà maggiore*: 1º) *quando si abbia un'ulteriore coincidenza di una tangente in* O *ad* f *con una tangente in* O *a* g; 2º) *quando, assunto* O *come origine e* t *come retta* y = 0, *sicchè le equazioni delle due curve, ordinate secondo le potenze ascendenti delle variabili, siano*

$$f \equiv ax^{s+1} + \ldots + y^{\tau}(a_\tau\, x^{s-\tau} + \ldots) + \ldots$$

$$g \equiv bx^{r+1} + \ldots + y^{\tau}(b_\tau\, x^{r-\tau} + \ldots) + \ldots,$$

risulti verificata la condizione

$$ab_\tau - a_\tau b = 0.$$

11. In particolare, se $a=0$, $a_\tau=0$, cioè se la tangente t ha con f in O incontro più che $(s+1)$—punto, ed in pari tempo conta più che τ volte fra le tangenti di f in O, la condizione precedente è soddisfatta; e però la moltiplicità d'intersezione di f, g in O sarà almeno uguale ad $rs+\tau+1$.

Importa, per qualche applicazione, esaminare ancora quando è che quella moltiplicità sarà maggiore di questo numero: al n. 8 s' era fatta la ricerca analoga per $\tau=1$ ed h qualunque. Poniamo, oltre alle notazioni già introdotte,

$$a_0 \equiv a' x^{s+2} + \ldots ; \; a_\tau \equiv a'_\tau x^{s-\tau+1} + \ldots .$$

Moltiplichiamo poi le prime $r-1$ linee di R rispettivamente per x^{r-1} (non più x^r), $x^{r-2}, \ldots x$, e le $s-1$ linee di posti $(m+1), (m+2) \ldots$ ancora per x^s, x^{s-2}, $x^{s-3}, \ldots x$. Si potrà, dopo ciò, dividere la 1ª colonna per x^{r+s+1}, la 2ª per x^{r+s-1}, la 3ª per $x^{r+s-2}, \ldots$, la $(\tau+1)$—esima per $x^{r+s-\tau}$, la $(\tau+2)$—esima per $x^{r+s-\tau-2}$, la $(\tau+3)$-esima per $x^{r+s-\tau-3}, \ldots$ Ponendo nel determinante così ottenuto $x=0$, si ottiene per coefficiente di $x^{rs+\tau+1}$, nel termine più basso di R, il prodotto del solito determinante estratto dal gruppo II di colonne pel determinante seguente:

$$\begin{vmatrix}
a' & a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 & \ldots & a'_\tau & a_{\tau+1} & a_{\tau+2} & a_{\tau+3} & \ldots & 0 \\
0 & 0 & a'_1 & a'_2 & a'_3 & \ldots & a'_{\tau-1} & 0 & a_{\tau+1} & a_{\tau+2} & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & a'_1 & a'_2 & \ldots & a'_{\tau-2} & 0 & 0 & a_{\tau+1} & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a'_1 & \ldots & a'_{\tau-3} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
. & . & . & . & . & \ldots & . & . & . & . & \ldots & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & . & . & . & . & \ldots & a_s \\
b & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_\tau & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & b & b'_1 & b'_2 & b'_3 & \ldots & b'_{\tau-1} & b_\tau & b_{\tau+1} & b_{\tau+2} & \ldots & 0 \\
0 & 0 & b & b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_{\tau-2} & 0 & b_\tau & b_{\tau+1} & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & b & b'_1 & \ldots & b'_{\tau-3} & 0 & 0 & b_\tau & \ldots & 0 \\
. & . & . & . & . & \ldots & . & . & . & . & \ldots & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & . & . & . & . & \ldots & b_r
\end{vmatrix}$$

Sviluppiamo questo determinante secondo i determinanti di 3º ordine estratti dalle colonne 1ª, 2ª, $(\tau+2)$—esima. Se $\tau=1$, il solo determinante non nullo che si estrae da esse vale $(a_2 b^2 - a'_1 bb_1 + a' b_1^2)$. Se invece $\tau>1$, esso vale $-b(a'_1 b_\tau - a_{\tau+1} b)$; e proseguendo in tal caso lo sviluppo, secondo i determinanti del 2º ordine estratti dalle colonne 3ª e $(\tau+3)$-esima, 4ª e $(\tau+4)$-esima, ..., $(\tau+1)$-esima e $(2\tau+1)$-esima, si ottiene ogni volta un nuovo fattore $(a'_1 b_\tau - a_{\tau+1} b)$. In conclusione il determinante primitivo risulta uguale al prodotto di $(a_2 b^2 - a'_1 bb_1 + a' b_1^2)$ se $\tau=1$, oppure di $-b(a'_1 b_\tau - a_{\tau+1} b)^\tau$ se $\tau>1$, pel determinante d'ordine $r+s-2\tau-1$:

$$\begin{vmatrix}
a_{\tau+1} & a_{\tau+2} & a_{\tau+3} & \ldots & 0 \\
0 & a_{\tau+1} & a_{\tau+2} & \ldots & 0 \\
. & . & . & \ldots & . \\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_s \\
b_\tau & b_{\tau+1} & b_{\tau+2} & \ldots & 0 \\
0 & b_\tau & b_{\tau+1} & \ldots & 0 \\
. & . & . & \ldots & . \\
0 & 0 & 0 & \ldots & b_r
\end{vmatrix}$$

Questo determinante non è nullo se le due curve f, g hanno comune in O soltanto la tangente $y=0$, e se questa fra le tangenti di g conta soltanto τ volte. Concludiamo:

Se le due curve f, g *hanno nel punto* s-*plo*, r-*plo* O *una tangente comune* t, *la quale abbia con* g *in* O *incontro* (r+1)-*punto soltanto, e conti fra le tangenti di* g *in* O *esattamente* τ *volte, mentre fra le tangenti di* f *in* O *conti un numero di volte maggiore di* τ, *ed abbia con* f *in* O *incontro più che* (s+1)-*punto, la moltiplicità d'intersezione in* O *delle due curve sarà almeno uguale a* rs+τ+1. *E sarà maggiore di questo numero solo nei casi seguenti*: 1º) *quando* f *e* g *abbiano comune un'ulteriore tangente in* O. 2º) *nel caso* 2º *dell'enunciato del n.* 8, *cioè quando* $\tau=1$ *ed è*

$$f \equiv a'x^{s+2} + \ldots + y(a'_1 x^s + \ldots) + y^2(a_2 x^{s-2} + \ldots) + \ldots ,$$

$$g \equiv bx^{r+1} + \ldots + y(b_1 x^{r-1} + \ldots) + \ldots ,$$

dove

$$a_2 b^2 - a'_1 bb_1 + a' b_1^2 = 0;$$

3°) *se* $\tau > 1$, *ed è*:

$$f \equiv \ldots + y\,(a'_1 x^s + \ldots) + \ldots + y^{\tau+1}\,(a_{\tau+1} x^{s-\tau-1} + \ldots) + \ldots\ldots$$

$$g \equiv b x^{r+1} + \ldots\ldots + y^{\tau}\,(b_{\tau} x^{r-\tau} + \ldots) + \ldots\ldots,$$

quando si abbia

$$a'_1 b_{\tau} - a_{\tau+1} b = 0.$$

12. In casi speciali il procedimento seguito negli articoli precedenti potrà dare risultati anche più precisi per la moltiplicità d'intersezione di due curve. Così tratteremo ora espressamente il caso che *il punto comune* O *sia semplice per una curva, e multiplo comunque per l'altra.*

La curva g abbia O semplice, con la tangente $y=0$ ad incontro i–punto. La curva f abbia in O moltiplicità qualunque (>1); e indichiamo con k la moltiplicità d'intersezione in O di f con la tangente $y=0$, e con l l'esponente più basso a cui compaja la x nei termini di f che contengono y al primo grado (1). È per mezzo dei tre caratteri i, k, l che noi esprimeremo (quando ciò risulterà possibile) la moltiplicità d'intersezione di f e g in O.

Le equazioni di f e g, ordinate secondo le potenze crescenti di y, e subordinatamente secondo le potenze crescenti di x, saranno:

$$f \equiv (ax^k + \ldots) + y\,(a'x^l + \ldots) + y^2(a_2 + \ldots) + y^3(a_3 + \ldots) + \ldots\ldots$$

$$g \equiv (bx^i + \ldots) + y\,(b_1 + \ldots) \quad + y^2(b_2 + \ldots) + y^3(b_3 + \ldots) + \ldots\ldots$$

ove i coefficienti a, a', b, b_1 sono essenzialmente diversi da zero. Formiamo la risultante R di f e g rispetto ad y; e, poichè si tratta solo di conoscere quel termine di R che è più basso rispetto ad x, limitiamoci a scrivere in ciascun

(1) Si può dare di questo carattere l un significato geometrico, proiettivo, ricorrendo alla teoria della polarità (sulla quale ritorneremo in seguito). Prima si osservi che, con una trasformazione della sola coordinata x, si può sempre ottenere che sia $l < k$. Dopo ciò si potrà dire che l *è la moltiplicità d'intersezione in* O *della retta* $y=0$ *con le curve prime polari generiche rispetto ad* f.

elemento del determinante il termine più basso rispetto ad x. Abbiamo così:

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
ax^k & a'x^l & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots \\
0 & ax^k & a'x^l & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\
0 & 0 & ax^k & a'x^l & a_2 & a_3 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & ax^k & a'x^l & a_2 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\
bx^i & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \ldots \\
0 & bx^i & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
0 & 0 & bx^i & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & bx^i & b_1 & b_2 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots
\end{array}\right|$$

Sviluppando secondo le prime due colonne, si vede che al detto termine di R d'ordine minimo rispetto ad x contribuiranno quelle due colonne col più basso, o coi più bassi, tra i seguenti fattori

$$ax^k \cdot b_1, \qquad bx^i \cdot a'x^l, \qquad bx^i \cdot bx^i,$$

purchè però dalle rimanenti colonne si possa estrarre un fattore (complemento algebrico) non nullo, per formare quel termine di R. Se supponiamo inoltre che quest'ultimo fattore sia indipendente da x, – ipotesi che poi riescirà giustificata in certi casi determinati, – esso non muterà ponendo $x=0$ nelle dette colonne 3ª, 4ª, ... Dunque il termine cercato di R entrerà tutto in questo nuovo determinante, ottenuto dal precedente con la modificazione ora detta, e con un'altra ovvia:

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
ax^k & a'x^l & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\
bx^i & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \ldots \\
0 & bx^i & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots
\end{array}\right|$$

Sviluppiamolo secondo le prime tre colonne; e tralasciamo nel determinante del terz'ordine fornito da esse il termine in x^{i+k}, che non può contribuire a dare il termine più basso di R, perchè è più elevato che quello in x^k. Otteniamo il prodotto del trinomio

$$ab_1^2 x^k - a' bb_1 x^{i+l} + a_2 b^2 x^{2i}$$

per un nuovo determinante, che è il risultante dei gruppi di punti d'incontro della retta $x=0$ con le curve f e g, dai quali si tolga il punto O contato rispettivamente 2 volte ed 1 volta: questo risultante si può supporre essenzialmente diverso da zero. Dobbiamo ora distinguere due casi, secondo che a_2 è diversa da zero, oppure è nulla; cioè secondo che O ha per f multiplicità uguale a 2, oppure maggiore. Se è $a_2 \neq 0$, esisteranno effettivamente nel determinante R dei termini di ordini k, $i+l$, $2i$, i quali saranno dati dal trinomio scritto, moltiplicato per una costante: ed è qui che bisognerà cercare il termine d'ordine minimo di R. Se invece è $a_2=0$, mancherà il termine in x^{2i} di quel trinomio: e ciò dimostra che quando, nello sviluppare il determinante primitivo secondo le prime due colonne, abbiam preso da un termine dello sviluppo il fattore $bx^i \cdot bx^i$, il complemento algebrico di questo non conteneva termine costante; nascevano cioè termini di R di grado $> 2i$. Per conseguenza se nel binomio

$$ab_1 x^k - a'b\, x^{i+l},$$

(a cui si riduce il trinomio precedente per $a_2=0$, diviso per b_1) il termine più basso è di grado $\leq 2i$, esso darà certo, a meno di un fattor costante non nullo, il termine più basso di R. Ma se accade il fatto opposto, vale a dire se $k > 2i$ ed $l > i$, allora non si potrà più assegnare immediatamente il termine più basso di R: e solo potremo dire che il suo grado è $> 2i$. – Concludiamo la proposizione seguente:

Il punto O *sia doppio per la curva* f. *Allora se uno dei tre numeri*

$$k \quad , \quad i+1 \quad , \quad 2i$$

è minore degli altri due, esso darà la moltiplicità d'intersezione in O *delle due curve. Se due di quei tre numeri sono uguali fra loro e minori del rimanente, essi daranno ancora la moltiplicità d'intersezione, in generale; e solo la moltiplicità d'intersezione riescirà maggiore nei casi particolari seguenti:*

1°) $\quad i = 1 \quad , k > 2i \quad , \quad a'b_1 = a_2 b$

2°) $\quad k = 2i \quad , l > i \quad , \quad ab_1^2 + a_2 b^2 = 0$

3°) $\quad k = i+1 , \; l < i \quad , \quad ab_1 = a'b.$

Infine se $i=1$, $k=2i$, *vale a dire se i tre numeri* k, $i+1$, $2i$ *sono tutti uguali, la moltiplicità d'intersezione sarà in generale uguale ad essi; e sarà maggiore solo quando*

4°) $\quad i = 1 \; , \; k = 2i \quad , \quad ab_1^2 - a' bb_1 + a_2 b^2 = 0.$

Il punto O *sia più che doppio per la curva* f. *Allora, se è* $k > 2i$ *ed* $l > i$, *la moltiplicità d'intersezione in* O *delle due curve sarà maggiore di* $2i$. *Quando invece quelle due condizioni non si verifichino entrambe, vale a dire quando quello fra i due numeri*

$$k \quad , \quad i+1$$

che non supera l'altro è $\leq 2i$, *quel numero darà la moltiplicità d'intersezione delle due curve in* O, *in generale; e solo questa moltiplicità d'intersezione riescirà maggiore nel caso particolare*

$$k = i+1 \quad , \quad l \leq i \quad , \quad ab_1 = a'b. \quad (^1)$$

13. Ci siamo limitati finora ad esaminare la moltiplicità d'intersezione di due curve f, g, in un punto O, in casi in cui vi è una sola tangente comune. Volendo esaminare la moltiplicità d'intersezione quando vi siano più tangenti comuni, il metodo che abbiamo seguito in quei casi dà origine, pare, ad una complicazione eccessiva. Invece possiamo ottenere qualche risultato relativo a ciò, applicando convenientemente una proposizione del n. 3.

Rappresentiamo con $\varphi_l = 0$ l'equazione del gruppo di tangenti (distinte o no) comuni ad f e g nel punto O; cioè con φ_l il massimo comun divisore delle forme φ_s e ψ_r che rappresentano i gruppi di s ed r tangenti ad f e g nel punto O s–plo, r–plo. Sarà dunque

$$f \equiv \varphi_l\, \varphi_{s-l} + \varphi_{s+1} + \ldots$$

$$g \equiv \varphi_l\, \psi_{r-l} + \psi_{r+1} + \ldots$$

In forza del citato n. 3 la moltiplicità d'intersezione in O di f e g sarà uguale a quella di f e

$$g' \equiv \psi_{r-l} f - \varphi_{s-l}\, g \equiv (\varphi_{s+1}\, \psi_{r-l} - \varphi_{s-l}\, \psi_{r+1}) + \ldots$$

diminuita della moltiplicità d'intersezione in O di f e φ_{s-l}. Ora quest'ultima, se poniamo l'ipotesi che ogni retta φ_{s-l} abbia incontro $(s+1)$–punto (soltanto) con

(1) Si può osservare che il calcolo fatto in questo n. 12 era pure applicabile al caso che O sia *semplice* per f, ma non conduce allora che ad un risultato contenuto nel n. 7. Così pure la proposizione con cui finisce quel n. 7 è contenuta in quella ora stabilita: basta porre qui la condizione $k < i$.

f in O, vale $(s-l)(s+1)$. Osserviamo poi che la g' ha in O moltiplicità $r+s-l+1$ e per tangenti le rette

$$\psi' \equiv \varphi_{s+1}\,\psi_{r-l} - \varphi_{s-l}\,\psi_{r+1} = 0.$$

Fra queste rette non può trovarsi una delle tangenti φ_{s-l} di f; giacchè se un fattor lineare di φ_{s-l} dividesse il binomio ψ' dovrebbe pur dividere φ_{s+1} oppure ψ_{r-l}: il che è escluso dall'ipotesi che le tangenti φ_{s-l} di f abbiano incontro solo $(s+1)$-punto, e che φ_{s-l}, ψ_{r-l} siano primi fra loro. Con ciò rimane anche stabilito che ψ' non è identicamente nullo, cioè che g' non ha in O moltiplicità superiore a quella indicata. Supposto dunque che nessuna delle φ_l divida ψ', e solo in tale supposizione, la moltiplicità d'intersezione in O di f e g' varrà esattamente $s(r+s-l+1)$; e quindi quella di f e g risulta uguale a

$$s(r+s-l+1)-(s-l)(s+1) = rs + l.$$

Dunque: *Due curve* f, g *abbiano nel punto* s*–plo*, r*–plo* O *un certo numero* l *(esattamente) di tangenti comuni, distinte o no, cosicchè indicando il gruppo da esse costituito con* φ_l *sia*

$$f \equiv \varphi_l\,\varphi_{s-l} + \varphi_{s+1} + \dots$$

$$g \equiv \varphi_l\,\psi_{r-l} + \psi_{r+1} + \dots;$$

e supponga si che le tangenti residue φ_{s-l} *di* f *abbiano con questa curva in* O *incontro* $(s+1)$*-punto soltanto. La moltiplicità d'intersezione in* O *di* f *e* g *sarà maggiore od uguale a* $rs+1$; *e sarà maggiore solo quando una delle tangenti comuni* φ_l *verifica l'equazione*

$$\psi' \equiv \varphi_{s+1}\,\psi_{r-l} - \varphi_{s-l}\,\psi_{r+1} = 0.$$

Se in particolare consideriamo il caso che un fattore lineare di φ_l divida anche, ad esempio, φ_{s-l}, esso non potrà dividere il binomio ψ' se non divide φ_{s+1}. Così pure se un fattore lineare di φ_l divide φ_{s+1}, esso non potrà dividere ψ' se non divide φ_{s-l} oppure ψ_{r+1}. Otteniamo così i seguenti corollari:

Se tutte le tangenti di f *in* O *sono ad incontro* $(s+1)$*-punto soltanto, e se ognuna di quelle che sono anche tangenti in* O *a* g *conta fra le tangenti di* f *più volte che fra le tangenti di* g*, la moltiplicità d'intersezione in* O *di* f *e* g *sarà esattamente* $rs+1$.

Se ognuna delle l *tangenti comuni ha con* f *in* O *incontro più che* $(s+1)$*-punto, mentre le rimanenti* $s-1$ *tangenti di* f *in* O *sono ben distinte da quelle ed hanno incontro soltanto* $(s+1)$*-punto con* f*, la moltiplicità d'intersezione di* f *e* g *sarà maggiore di* $rs+1$ *solo quando una tangente comune abbia anche con* g *incontro più che* $(r+1)$*-punto.*

III.

Le tangenti alle curve.

Classe. Le curve come inviluppi.

14. Alla fine del n. 2 abbiamo definito le rette *tangenti* ad una curva f in un punto s–plo come quelle rette che hanno ivi con f moltiplicità d'intersezione $> s$: e ne abbiam trovata l'equazione nel caso che il punto sia l'origine delle coordinate. Se invece si trattasse di un punto qualunque di f, si otterrebbe similmente pel gruppo delle s tangenti la seguente equazione in coordinate omogenee, indicando con $x_1\,x_2\,x_3$ le coordinate di quel punto, e con $y_1, \dots$ le coordinate di punti variabili

$$\sum \frac{\partial^s f}{\partial x_i\,\partial x_k \dots}\, y_i\, y_k \dots = 0;$$

e se x è punto semplice per f

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\, y_i = 0.$$

Si verifica subito che le tangenti così definite coincidono con quelle che son date dalla nota definizione del calcolo differenziale, cioè: le tangenti ad f in un punto O sono i limiti delle rette che congiungono O a punti di f che s'avvicinano indefinitamente ad O. Ne deriva che: quando un punto semplice di f s'avvicina indefinitamente al punto O di f, la tangente in esso ad f ha per limite una tangente di f in O (cioè quella verso cui tende la retta congiungente O al punto mobile).

È evidente che una tangente ad f in un punto che varii su una parte non rettilinea di f non potrà esser fissa: varierà con quel punto. Quindi le tangenti ad una curva sono in numero infinito, se si toglie il caso che la curva si componga tutta di rette.

15. L'equazione ricordata del gruppo delle tangenti conduce naturalmente a considerare, per lo studio delle tangenti, le *curve polari* rispetto alla curva data f. Nel seguito noi supporremo nota la teoria della polarità, sì nel campo binario che nel campo ternario (1). Rileviamo da essa le proposizioni seguenti.

---

(1) V. i trattati classici già citati.

La polarità è invariantiva (proiettiva).

La curva polare r–esima di un punto y rispetto alla curva f d'ordine n è una curva d'ordine $n - r$, rappresentata in coordinate omogenee di punti variabili x dall'equazione

$$\sum \frac{\partial^r f}{\partial x_i \, \partial x_{k \ldots}} \, y_i \, y_k \ldots = 0.$$

Essa è il luogo dei gruppi di punti polari r–esimi di y rispetto ai gruppi di n punti d'incontro di f con le rette passanti per y.

La polare r–esima di un punto P rispetto alla curva, che è polare s–esima dello stesso punto P rispetto ad f, coincide colla polare $(r + s)$–esima di P rispetto ad f.

Se la polare r–esima di un punto (rispetto ad f) passa per un secondo punto, la polare d'ordine r di questo passa pel primo punto.

La polare r–esima di un punto P rispetto alla curva, che è polare s–esima di un altro punto Q (rispetto ad f), coincide colla polare s–esima di Q rispetto alla polare r–esima di P.

Se il punto O è s-plo per f, s'annullano identicamente, ossia sono indeterminate, le polari di O degli ordini minori di s; quella d'ordine s è il gruppo delle s tangenti ad f in O; e le polari di O d'ordine maggiore di s hanno pure O s-plo, con quel medesimo gruppo di tangenti.—Le condizioni perchè un punto O sia s–plo per f (esattamente) si possono esprimere dicendo che è indeterminata la polare d'ordine $s - 1$ di O rispetto ad f (non una polare d'ordine maggiore).

La prima polare di un punto P diverso dal punto O, s–plo per f, ha in O moltiplicità uguale ad $s - 1$ in generale; e maggiore nel solo caso che le s tangenti di f in O coincidano in una retta passante per P. Escludendo questo caso, le $s - 1$ tangenti in O alla prima polare di P costituiscono, nel fascio di rette per O (come campo binario), il primo gruppo polare della retta OP rispetto al gruppo delle s tangenti ad f in O.

16. Ritorniamo alle tangenti della curva. Definiamo come *classe* di una curva f: il numero delle tangenti di f, in punti semplici od in punti multipli, le quali passano per un punto qualunque P del piano; con la condizione che ognuna di quelle tangenti si conti in certi casi, non solo una, ma più volte, come ora fisseremo. La classe, così definita, risulterà indipendente dal punto P.

Per avere le nominate tangenti di f passanti per P, si consideri la curva 1.ª polare di P rispetto ad f, che indicheremo per brevità con Δ(P). In causa delle proposizioni ricordate (n. 15), questa curva passa per tutti i punti multipli di f, ed incontra f ulteriormente in quei suoi punti semplici le cui tangenti (ossia polari di 1.º ordine) passano per P. Il numero complessivo delle intersezioni

di f e Δ(P), o, più precisamente, la somma delle loro moltiplicità d'intersezione nei punti comuni, è espressa da $n(n - 1)$. Conveniamo, anzitutto, che *una tangente ad* f *in uno o più punti semplici conti fra le tangenti tirate da un suo punto* P *tante volte quante sono le intersezioni di* f *colla* 1.ª *polare di* P *che cadono in quei punti semplici.* Ne seguirà, intanto, che: se f non ha punti multipli, il numero delle sue tangenti passanti per un punto qualunque è espresso da $n(n - 1)$. Ossia: *la classe di una curva piana d'ordine* n *priva di punti multipli è* n(n − 1).

Supponiamo ora che f abbia dei punti multipli. Le prime polari dei punti del piano rispetto ad f formano un sistema lineare doppiamente infinito, o rete, che avrà per punti base i punti multipli di f, e nessun altro punto. Una curva generica della rete, la 1.ª polare di un punto generico P, taglia f, come già si disse, nei punti multipli di f e nei punti semplici di f di contatto con le tangenti tirate da P. *Se* f *non è tutta composta di parti multiple, e di rette,* questi punti semplici esistono certamente (n. 14); di più, essi sono fra loro distinti, poichè, come vedremo (n.¹ 18, 25) sono solo in numero finito quei punti semplici di f, non situati su componenti rettilinee, i quali contano più di una volta fra le intersezioni di f con prime polari.

In un punto multiplo O di f le curve generiche della rete di prime polari avranno tutte (n. 4) una stessa moltiplicità d'intersezione I con f; ma vi saranno dei punti eccezionali le cui prime polari avranno con f in O moltiplicità d'intersezione maggiore di I. È facile dimostrare che quei punti eccezionali sono solo i punti delle tangenti ad f in O. In fatti supponiamo che il punto P abbia una 1ª polare Δ(P), la cui moltiplicità d'intersezione con f in O sia $\mathrm{I} + i$, ove $i > 0$. Nella rete delle 1ᵉ polari consideriamo un fascio, che comprenda la curva Δ(P), ma abbia come moltiplicità d'intersezione generica con f in O il numero I. Potremo applicare a questo fascio una proposizione del n. 4: secondo la quale una curva del fascio la quale sia abbastanza prossima alla Δ(P) avrà un certo numero d'intersezioni con f prossime quanto si vuole ad O, pur essendo diverse da O. Anzi, se supponiamo che f non sia tutta composta di parti multiple e di rette, cosicchè, come s'è osservato poc'anzi, le intersezioni variabili di f con una curva generica del fascio siano distinte fra loro, potremo applicare una proposizione più precisa contenuta nel detto n. 4; e dire che una curva del fascio, la quale sia abbastanza vicina alla Δ(P), avrà precisamente i intersezioni con f, distinte fra loro e da O, prossime quanto si vuole ad O. Indicando con Δ(Q) quella curva, cioè con Q il suo polo, avremo che quando il punto Q è abbastanza prossimo a P, per Q passano le tangenti ad f in i diversi punti semplici, prossimi quanto si vuole ad O. Al limite, quando Q tende verso P, e ciascuno di quegli i punti di f tende verso O, la tangente in esso deve tendere verso una tangente ad f in O (n. 14). Dunque P è su una tangente di f in O. Viceversa, se P è su una tangente di f in O, lo si potrà riguardare come limite di un punto Q situato su una tangente ad f in un punto semplice che s'avvicini indefinitamente ad O. La $\Delta(Q)$ passa per questo punto semplice ed ha in O con f moltiplicità d'intersezione I (almeno). Quindi $\Delta(P)$ avrà con f in O moltiplicità d'intersezione maggiore di I.

Possiamo ora enunciare la proposizione seguente: *la classe di una curva qualunque* f *d'ordine* n *è espressa dal numero* $n(n-1)$ *diminuito delle moltiplicità d'intersezione* I, *che nei punti multipli di* f *ha questa curva con la* 1.ª *polare di un punto generico, vale a dire con la* 1.ª *polare di un punto non situato sulle tangenti ad* f *in quei punti multipli.* Effettivamente, se P è un punto che non stia su tangenti ad f in punti multipli, la differenza nominata è la somma delle moltiplicità d'intersezione di f e $\Delta(P)$ in punti semplici di f, ossia il numero complessivo delle tangenti ad f passanti per P, contate quante volte s'è già convenuto di fare (per le tangenti in punti semplici di f). Se poi P sta su una tangente ad f nel punto multiplo O, la proposizione enunciata viene ad essere la convenzione da farsi per fissare il numero delle volte che quella tangente si deve contare fra le tangenti passanti per P, almeno in quanto essa è tangente in O (chè se fosse anche tangente in altri punti, ognuno di questi darebbe un analogo contributo): quel numero è la differenza fra la moltiplicità d'intersezione in O di f con $\Delta(P)$ e la moltiplicità d'intersezione I in O di f con la 1.ª polare di un punto qualunque esterno alle tangenti in O. Se P cade in O si ha in questa differenza il numero complessivo di volte che contano fra le tangenti uscenti da P tutte le tangenti nel punto stesso, prese insieme. Con tali convenzioni la classe, come s'è definita al principio di questo n. 16, risulta indipendente dal punto P.

Il numero I, che abbiamo ripetutamente nominato, dicesi *abbassamento della classe prodotto dal punto multiplo* O a cui esso si riferisce. È evidente che una parte di quanto s'è detto nell'ipotesi che O sia multiplo per f vale anche se O è semplice, purchè si ponga allora $I = 0$.

17. Alle cose esposte si collega la nozione di *moltiplicità di una tangente.* Chiamiamo così *il numero delle volte che la tangente* t *conta fra le tangenti di* f *passanti per un suo punto generico.* Indichiamo con O un punto di contatto di t. Le 1ᵉ polari dei punti di t passano tutte per O e formano un fascio: sia I_1 la moltiplicità d'intersezione generica (n. 4) delle curve di questo fascio colla f in O. Sia ancora I la moltiplicità d'intersezione in O di f colle 1ᵉ polari di punti generici del piano. La differenza $I_1 - I$, se t ha un solo punto di contatto, o, se no, la somma di queste differenze calcolate pei vari punti di contatto darà la moltiplicità della tangente t.

Una considerazione fatta nel precedente n. 16 prova che se f non ha componenti multiple: per un punto Q esterno a t, ma abbastanza vicino al punto P di t, la cui 1ª polare ha con f in O moltiplicità d'intersezione I_1, passano le tangenti ad f in $I_1 - I$ punti semplici distinti, vicini quanto si vuole ad O. Queste tangenti poi sono fra loro distinte, se Q è preso fuori delle rette che son tan-

genti ad f in due o più punti distinti (le quali rette sono in numero finito: v. la fine del n. 19). Facendo per tutti i punti di contatto di t l'osservazione che s'è fatta per O, e sommando, si ottiene la proposizione seguente: *se* f *non ha componenti multiple, e una tangente* t *di* f *è multipla secondo* σ, *per un punto esterno ad essa ma convenientemente prossimo ad un suo punto generico passano* σ *tangenti distinte vicine quanto si vuole a* t.

Poichè la moltiplicità di una tangente è la somma di parti $(I_1 - I)$ corrispondenti rispettivamente ai punti di contatto della tangente, per determinarla basterà aver riguardo separatamente a quei vari punti. Nel seguito ci accadrà, nel considerare un punto di contatto, di chiamare per brevità « moltiplicità della tangente » la parte che riguarda quel solo punto: ma con ciò non intenderemo di escludere l'esistenza di altri punti di contatto, i quali darebbero altri contributi alla vera moltiplicità della tangente.

18. Possiamo determinare subito le moltiplicità delle tangenti ad f in punti semplici, quando si conoscano le moltiplicità delle intersezioni delle tangenti stesse con f. Sia O un punto semplice di f, la cui tangente t abbia con f in O incontro $(\sigma+1)$–punto, essendo σ un numero qualunque > 0. Per determinare la moltiplicità della tangente t di f, prendiamo su essa un punto P diverso da O, e determiniamo la moltiplicità d'intersezione in O della 1.ª polare $\Delta(P)$ di P con f. La $\Delta(P)$ incontra t nel 1º gruppo polare di P rispetto al gruppo di punti d'intersezione di f con t: e poichè quest'ultimo gruppo ha, per ipotesi, O per punto $(\sigma+1)$–plo, e P è diverso da O, quel 1º gruppo polare avrà O per punto σ–plo. Dunque la $\Delta(P)$ ha in O con t incontro σ–punto. Per avere la moltiplicità d'intersezione in O di f e $\Delta(P)$, possiamo applicare una proposizione particolare del n. 7, ove in luogo di g si ha la curva $\Delta(P)$: vediamo così che quella moltiplicità d'intersezione sarà σ. Dunque (n.ⁱ 16, 17): *una tangente a contatto* $(\sigma+1)$*–punto in un punto semplice* O *di* f *è una tangente* σ*–pla* (rispetto al punto O).

Prendiamo ora il punto P in O, affine di vedere quante tangenti condotte da O ad f cadono nella t. In questo caso la 1ª polare $\Delta(O)$ ha, come f, il punto O per punto semplice, con t per tangente ad incontro $(\sigma+1)$-punto. Applicando il teorema generale del n. 7, abbiamo da prima che la moltiplicità d'intersezione delle due curve in O è maggiore od uguale a $\sigma+1$. Per assicurarci poi che è uguale e non maggiore, assumiamo O come origine delle coordinate, e la t come retta $y=0$, sicchè sarà:

$$f \equiv ax^{\sigma+1} + \ldots + a_1 y + \ldots\ldots$$

e la 1ª polare di O:

$$\Delta(O) \equiv (n-\sigma-1)\, ax^{\sigma+1} + \ldots + (n-1)\, a_1 y + \ldots\ldots$$

Perchè la moltiplicità d'intersezione fosse maggiore di $\sigma+1$ dovrebb'essere

$$a\cdot(n-1)\, a_1 - a_1\cdot(n-\sigma-1)\, a = 0\,,$$

ossia $\sigma\, a\, a_1 = 0$, il che non è. Dunque: *una tangente ad incontro* $(\sigma+1)$*-punto in un punto semplice* O *di* f *assorbe* $\sigma+1$ *delle tangenti condotte da* O *ad* f (oltre a quelle che può assorbire pel fatto che essa sia pure tangente ad f in altri punti).

In particolare: se un punto semplice di f ha la tangente che incontri ivi due volte soltanto la curva, senza toccarla altrove, la tangente sarà *semplice*, e conterà *due* volte fra le tangenti passanti pel punto di contatto. Se in un punto semplice di f la tangente ha con f incontro tripunto, senz'esser tangente altrove, la retta stessa sarà tangente *doppia* per f, e conterà *tre* volte fra le tangenti passanti pel punto di contatto. E così via. — Risulterà in seguito (n. 25) che, se f non contiene come parti delle rette (od in caso contrario, se si astrae da tali parti), non vi può essere che un numero finito di punti semplici di f in cui il contatto della curva con la tangente sia più che bipunto. Un punto semplice in cui la tangente abbia incontro bipunto con la curva si chiama un punto semplice *ordinario*. Gli altri punti semplici, con le tangenti ad incontro tripunto, quadripunto, ecc. prendono, com'è noto, il nome di *flessi*, *punti d'ondulazione*, e in generale *flessi superiori*.

19. Consideriamo ora *la curva algebrica* f *come inviluppo*, cioè *come insieme delle sue tangenti*. Se f non si riduce ad un gruppo di rette, le tangenti saranno ∞^1 come i punti di f. Rappresentando con $x_1\, x_2\, x_3$ le coordinate omogenee di punto, la tangente ad f nel suo punto generico (semplice) x avrà coordinate $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ tali che (n. 14)

$$(1) \qquad \rho \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Eliminando ρ, x_1, x_2, x_3 tra queste tre equazioni e

$$(2) \qquad \Sigma\, \xi_i\, x_i = 0\,,$$

si avrà, come subito si vede, un'equazione algebrica fra i rapporti delle ξ, ossia un'equazione algebrica omogenea fra le ξ. Quest'equazione sarà soddisfatta, non solo dalle rette ξ tangenti ad f nei suoi punti semplici, ma anche dalle rette ξ che passano pei punti multipli di f: poichè se x è un punto multiplo di f le equazioni (1), (2) sono soddisfatte da $\rho = 0$ e $\Sigma\, \xi_i\, x_i = 0$, senz'altra condizione per le ξ. Segue che l'equazione ottenuta si potrà dividere per certe potenze di forme lineari delle ξ, cioè di quelle forme lineari che rappresentano i fasci di rette uscenti dai punti multipli di f. Fatta la divisione rimarrà un'equazione algebrica per rappresentare l'insieme delle tangenti di f: anche le tangenti in punti multipli, se si tien conto che queste sono i limiti di tangenti in punti semplici. Dunque: *le tangenti ad una curva algebrica costituiscono una varietà algebrica.*

Una varietà ∞^1 algebrica di rette del piano è ciò che corrisponde per dualità ad una varietà algebrica ∞^1 di punti del piano, cioè ad una curva piana algebrica, considerata come luogo di punti. Sia f una curva piana algebrica, non composta esclusivamente di rette, e che non abbia componenti multiple; P un suo punto variabile e t la tangente in esso. In una trasformazione duale (reciprocità) a P e t corrisponderanno una retta p' ed un suo punto T'. Se ν è la classe di f, cioè il numero di rette t uscenti da un punto generico, ν sarà il numero di punti T' giacenti su una retta generica, cioè l'ordine del luogo dei punti T'. E poichè (n. 18) su una data t il corrispondente punto P (di contatto) è caratterizzato dalla proprietà che *due* delle ν rette t passanti per esso cadono in quella data; così per un dato punto T' la retta p' che gli è associata è quella retta che in esso incontra doppiamente il luogo dei punti T', cioè la tangente in esso a questo luogo. Possiamo quindi invertire l'ultima proposizione così: *nel piano una* ∞^1 *algebrica di rette si compone, oltre che di eventuali fasci di rette, delle tangenti ad una curva algebrica.*

Se, nel ragionamento precedente, t è una tangente multipla di f, si vede che T' verrà ad essere un punto multiplo, di ugual moltiplicità per la curva luogo dei punti T'. Così la legge di dualità piana muta le curve in curve, i punti s—pli in tangenti s—ple, le tangenti in quei punti nei punti di contatto di queste tangenti, ecc. — Ad esempio trasformando per dualità i risultati generali del preced. n. 18 abbiamo: *Se un punto di una curva ammette una sola tangente, la quale sia tangente semplice, ma assorba* $s+1$ *delle tangenti tirate da esso alla curva, il punto sarà* $s-$*plo per la curva; e questa avrà in esso incontro* $(s+1)$*-punto con la tangente.* —

È facile ora dimostrare che: *una curva algebrica non può ammettere infinite rette che le sian tangenti in due o più punti distinti.* In fatti, supposto che esista una tal curva, alla varietà algebrica f composta di quelle tangenti corrisponderanno per dualità i punti di una curva algebrica f': e l'ipotesi fatta si trasporta in quest'altra, che nei punti generici di f' questa curva ammetta due o più tangenti distinte. Ora ciò è assurdo: perchè f' si ridurrà ad una o più curve semplici da contarsi un certo numero di volte, e nel punto generico di una tal curva semplice vi sarà una sola tangente, la quale sarà evidentemente l'unica tangente ad f' in quel punto.

Di qui, e da osservazioni precedenti, si trae subito che: se una curva, priva di parti multiple, ha la classe ν, per un punto *generico* passano ν tangenti *distinte* di essa.

IV.

Abbassamento di classe prodotto da alcuni punti multipli. Moltiplicità delle tangenti nei punti stessi. Varie specie di punti doppi.

20. Sia O un punto $s-$plo di una curva algebrica f, con le s tangenti tutte distinte. L'abbassamento di classe da esso prodotto sarà la moltiplicità d'intersezione in O di f con la 1ª polare $\Delta(P)$ di un punto P non situato su quelle s tangenti. La $\Delta(P)$ ha (n. 15) O per punto $(s-1)$-plo, e per tangenti in esso il gruppo 1º polare della retta OP rispetto al gruppo delle s tangenti in O ad f. Poichè queste ultime sono distinte fra loro e da OP, saranno pure ben distinte da quel gruppo polare; sicchè le due curve f e $\Delta(P)$ non hanno in O alcuna tangente comune. Quindi (n. 6) la moltiplicità d'intersezione in O di f e $\Delta(P)$ vale $s(s-1)$. *L'abbassamento di classe prodotto da un punto* $s-$*plo a tangenti distinte è* $s(s-1)$.

Per avere la moltiplicità di quelle tangenti di f, consideriamone una, e sia t, e rappresentiamo con $s+\sigma$ la sua moltiplicità d'intersezione con f in O: sicchè, assunto O come origine e t come retta $y=0$, sarà

$$f \equiv a\,x^{s+\sigma} + \ldots + y\,(a_1\,x^{s-1} + \ldots) + \ldots\ldots,$$

ove a ed a_1 sono $\neq 0$. Dobbiamo calcolare la moltiplicità d'intersezione in O di f con la 1ª polare di un punto generico di t. Possiam prendere per questo punto $y=0$, $z=0$, sicchè quella 1ª polare diventa

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv (s+\sigma)\,a\,x^{s+\sigma-1} + \ldots + y\,(\overline{s-1}\,a_1 x^{s-2} + \ldots) + \ldots\ldots$$

Applicando il n. 7, ove quest'ultima curva prende il posto di g, sicchè $r=s-1$, l'espressione $ab_1 - a_1 b$ di là diventa ora

$$a\cdot(s-1)\,a_1 - a_1\cdot(s+\sigma)\,a = -(\sigma+1)\,aa_1,$$

e non s'annulla; per conseguenza la moltiplicità d'intersezione in O delle due curve è $s(s-1)+\sigma$. Se da questa sottragghiamo l'abbassamento di classe prodotto da O avremo (n. 17) la moltiplicità della tangente t (come tangente in O). Dunque: *una tangente ad incontro* $(s+\sigma)$-*punto, in un punto* $s-$*plo a tangenti distinte, è una tangente* $\sigma-$*pla.*

21. Possiamo abbandonare la restrizione che le s tangenti ad f nel punto $s-$plo O siano distinte, se mettiamo invece quest'altra restrizione: che ognuna di quelle

tangenti abbia con f in O incontro $(s+1)$–punto, e non superiore. Supponiamo che delle s tangenti nominate ne coincidano $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, essendo $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_k=s$, cosicchè le tangenti distinte siano k $(\leq s)$, e le τ siano ≥ 1. Allora la 1ª polare rispetto ad f di un punto generico avrà O per punto $(s-1)$–plo, con un gruppo di $s-1$ tangenti tale che $\tau_1-1, \tau_2-1, \ldots, \tau_k-1$ cadono rispettivamente nelle dette tangenti di f. Per avere la moltiplicità d'intersezione in O di questa polare con f, possiamo dunque applicare quel corollario del n. 13 che riguarda il caso che le tangenti ad f abbiano in O con f incontro $(s+1)$-punto, e che ognuna di esse conti fra le tangenti di f più volte che fra le tangenti dell'altra curva. Ne segue che la detta moltiplicità d'intersezione vale

$$s(s-1) + (\tau_1-1) + (\tau_2-1) + \ldots + (\tau_k-1) = s^2 - k.$$

Dunque *l'abbassamento di classe prodotto da un punto* $s-$*plo, di cui tutte le tangenti abbiano con la curva nel punto stesso incontro* $(s+1)$-*punto soltanto, è espresso da* s^2-k, *indicando con* k *il numero* $(\leq s)$ *delle tangenti distinte.*

Dimostriamo ora che *le dette tangenti nel punto* $s-$*plo, ad incontro* $(s+1)$-*punto, sono tangenti semplici per la curva.* Assunto O come origine, e la tangente che conta τ_1 volte come asse $y=0$, sarà:

$$f \equiv y^{\tau_1}\,u^{\tau_2}\,v^{\tau_3}\,w^{\tau_4} \ldots + \varphi_{s+1} + \ldots\ldots,$$

ove $u, v, w, \ldots$ sono forme lineari di x, y, che uguagliate a zero rappresentano le ulteriori tangenti in O ad f; e φ_{s+1} non è divisibile per nessuna di esse, e nemmeno per y. Per avere la moltiplicità della tangente $y=0$ cerchiamo, come al n. 20, la moltiplicità d'intersezione in O di f colla 1ª polare

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv y^{\tau_1}\,u^{\tau_2-1}\,v^{\tau_3-1} \ldots (\tau_2\,u'vw \ldots + \tau_3\,v'uw \ldots + \ldots) + \varphi'_{s+1} + \ldots\ldots,$$

ove $u', v', \ldots$ (costanti), e φ'_{s+1} indicano le derivate rispetto ad x di $u, v, \ldots$ e φ_{s+1}. Applicando il teorema generale del n. 13, dobbiamo considerare la forma che là s'indicava con ψ' e che qui diventa

$$\varphi_{s+1}\,(\tau_2 u'vw \ldots + \tau_3 v'uw \ldots + \ldots) - uvw \ldots \varphi'_{s+1},$$

e verificare se questa contiene come fattore una delle forme che rappresentano le tangenti comuni in O. Quanto ad $u, v, w, \ldots$, è chiaro che nessuna divide quell'espressione. Per vedere se la divide y, poniamovi $y=0$. Indicando con ax^{s+1} il termine indipendente da y in φ_{s+1}, termine che non può mancare, il risultato sarà dato da x^{s+k-1} moltiplicato per

$$a(\tau_2 u'v'w' \ldots + \tau_3 u'v'w' \ldots + \ldots\ldots) - u'v'w' \ldots (s+1)\,a$$

$$= (\tau_2 + \tau_3 + \ldots - s - 1)\,au'v'w' \ldots = -(\tau_1 + 1)\,au'v'w' \ldots,$$

e quindi non è nullo. Dunque nemmeno y non divide l'espressione ψ' relativa al teorema del n. 13; e però, in base a questo, potremo dire che la moltiplicità d'intersezione in O di f con quella 1ª polare è

$$s(s-1) + \tau_1 + (\tau_2 - 1) + (\tau_3 - 1) + \ldots = s^2 - k + 1.$$

E siccome per la moltiplicità d'intersezione in O di f con una 1ª polare generica si era trovato $s^2 - k$, concludiamo (n. 17) che effettivamente la tangente $y = 0$ (in quanto riguarda il punto di contatto O) è tangente semplice.

Completiamo la ricerca relativa all'attuale punto s-plo O determinando la moltiplicità d'intersezione in O di f con la 1ª polare di O medesimo. Posto

$$f \equiv \varphi_s + \varphi_{s+1} + \ldots,$$

quella 1ª polare sarà

$$\Delta(\mathrm{O}) \equiv (n-s)\,\varphi_s + (n-s-1)\,\varphi_{s+1} + \ldots,$$

e l'espressione ψ' del n. 13 diventa qui $(n-s)\,\varphi_{s+1} - (n-s-1)\,\varphi_{s+1}$, ossia φ_{s+1}; che non è annullata da nessuna delle tangenti φ_s. Dunque, le due curve avendo O s-plo, con le stesse tangenti, la moltiplicità d'intersezione sarà $s^2 + s$. Deducendone $s^2 - k$ abbiamo (n. 16): *se nel punto s-plo O di f sono k le tangenti distinte, e tutte hanno incontro (s+1)-punto con la curva, esse assorbiranno s+k fra le tangenti condotte alla curva da O.*

22. Trattiamo ora il caso che nel punto s-plo O la curva f ammetta una tangente t la quale presenti simultaneamente tutte due le particolarità, che, staccatamente, abbiamo supposte nei n.ⁱ 20 e 21: cioè t abbia con f in O incontro $(s+\sigma)$-punto, ove $\sigma > 1$; e t conti un numero qualunque di volte $\tau > 1$ fra le s tangenti di f in O. Le rimanenti $s - \tau$ (≥ 0) tangenti siano tutte distinte. Prendiamo O per origine e t per asse $y = 0$, sicchè:

$$f \equiv ax^{s+\sigma} + \ldots + y(a'_1 x^s + \ldots) + y^2(a'_2 x^{s-1} + \ldots) + \ldots\ldots$$

$$+ y^{\tau-1}(a'_{\tau-1} x^{s-\tau+2} + \ldots) + y^{\tau}(a_\tau x^{s-\tau} + \ldots) + \ldots\ldots,$$

Aggiungeremo la condizione $a'_1 \neq 0$. Come 1ª polare generica rispetto ad f possiamo prendere quella del punto $x = z = 0$, ossia $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, cioè

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv a'_1 x^s + \ldots + y(2a'_2 x^{s-1} + \ldots) + \ldots\ldots$$

$$+ y^{\tau-2}(\overline{\tau-1}\, a'_{\tau-1} x^{s-\tau+2} + \ldots) + y^{\tau-1}(\tau a_\tau x^{s-\tau} + \ldots) + \ldots\ldots$$

Questa curva ha O come punto $(s-1)$-plo, del quale $\tau-1$ tangenti cadono nella t, e questa retta ha con la curva in O incontro s-punto, in causa della condizione $a'_1 \neq 0$. Per avere la moltiplicità d'intersezione, in O, di questa curva con la f possiamo applicare la proposizione del n. 11. Basterà porre in quella, al posto di g, r, τ rispettivamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $s-1$, $\tau-1$. Si ottiene per la moltiplicità cercata il valore $s(s-1)+\tau$, in generale; e per vedere quando sia maggiore bisognerà distinguere due casi. Se $\tau = 2$ (che corrisponde al caso $\tau = 1$ del n. 11), si ha la condizione:

$$a_2 a'^2_1 - a'_1 \cdot a'_1\, 2a_2 + a' \cdot 4a_2^2 = 0,$$

ossia

$$a'^2_1 = 4a'\, a_2,$$

avendo indicato, come nel citato n. 11, con a' il coefficiente del termine in x^{s+2} della f, cosicchè se $\sigma > 2$ è $a' = 0$ e quella condizione è impossibile in causa dell'ipotesi $a'_1 \neq 0$. Se invece $\tau > 2$, si ha la condizione

$$a'_1 \cdot \tau a_\tau - a_\tau \cdot a'_1 = 0,$$

che non è possibile. Dunque: *un punto s-plo, nel quale siano* $\tau (> 1)$ *tangenti coincidenti in una retta t, mentre le altre tangenti (se ne rimangono) siano distinte, e tale inoltre che t vi abbia incontro più che (s+1)-punto con la curva, ma solo s-punto con la prima polare di un punto generico, abbassa la classe di* $s(s-1)+\tau$ *unità: fatta eccezione solo pel caso che t assorba due tangenti nel punto alla curva ed abbia ivi con questa incontro (s+2)-punto, e che ponendo*

$$f \equiv ax^{s+2} + \ldots + y(a'_1 x^s + \ldots) + y^2(a_2 x^{s-2} + \ldots) + \ldots$$

si abbia

$$a'^2_1 = 4\,a\,a_2,$$

nel qual caso speciale l'abbassamento di classe sarà maggiore.

Determiniamo la moltiplicità della tangente t. A tal fine consideriamo la

1ª polare

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv (s+\sigma)\, a\, x^{s+\sigma-1} + \ldots + y\,(sa'_1\, x^{s-1} + \ldots) + \ldots\ldots$$

$$+\, y^{\tau-1}\big(\overline{s-\tau+2}\, a'_{\tau-1}\, x^{s-\tau+1} + \ldots\big) + y_\tau\big(\overline{s-\tau}\, a_\tau\, x^{s-\tau-1} + \ldots\big) + \ldots\ldots$$

Se $\tau < s$ essa ha O $(s-1)$-plo, con τ tangenti in t, ad incontro $(s-1+\sigma)$-punto, e le altre tangenti diverse da quelle di f. Per determinare la moltiplicità d'intersezione con f applichiamo il n. 9 con $r = s-1$: abbiamo che essa varrà $s(s-1)+\tau+\sigma$; e solo sarebbe da esaminare il caso (2º dell'enunciato del n. 9) che sia

$$a \cdot sa'_1 - a'_1 \cdot (s+\sigma)\, a = 0\,,$$

oppure:

$$a'_1 \cdot (s-\tau)\, a_\tau - a_\tau \cdot sa'_1 = 0\,,$$

relazioni impossibili entrambe; e poi il caso (3º di quella proposizione) che sia $\tau = \sigma = 2$ ed inoltre

$$[a \cdot (s-2)a_2 - a_2 \cdot (s+2)a]^2 - [a \cdot sa'_1 - a'_1 \cdot (s+2)a][a'_1 \cdot (s-2)a_2 - a_2 \cdot sa'_1] = 0$$

cioè

$$a'^2_1 = 4aa_2.$$

Quest'ultimo caso è possibile, e sarà il solo in cui la moltiplicità d'intersezione superi il detto valore. — Se poi è $\tau = s$, la 1ª polare $\frac{\partial f}{\partial x}$ ha O s-plo, con la retta $y = 0$ come tangente ad incontro $(s+\sigma-1)$-punto, e le altre $s-1$ tangenti ben diverse da quella, in causa dell'ipotesi $a'_1 \mathrel{=}\!|\!= 0$. Per averne la moltiplicità d'intersezione con f possiamo dunque applicare ora il risultato del n. 8, ponendovi $r = s$, $h = \sigma - 1$. Otteniamo il valore $s^2 + \sigma$, che rientra nella precedente espressione $s(s-1)+\tau+\sigma$ ponendovi $\tau = s$. Solo occorre anche esaminare i casi eccezionali del detto n. 8: e si trova che il caso 3º) $(h > 1$, cioè$)$ $\sigma > 2$ non dà una relazione possibile, e che il 2º) con $\sigma = 2$ pure è impossibile se $\tau = s > 2$ (avvertendo che allora la a_2 di quella proposizione viene a prendere il valore 0), mentre se $\tau = s = 2$ esso diventa possibile e ci riporta alla relazione $a'^2_1 = 4aa_2$ di poco fa. — In conclusione la moltiplicità d'intersezione di f con la 1ª polare di un punto generico di t è sempre $s(s-1)+\tau+\sigma$: tranne il caso che sia $\tau = \sigma = 2$, $a'^2_1 = 4aa_2$, nel qual caso essa è maggiore. — Sottragghiamo ora da quell'espressione l'abbassamento di classe $s(s-1)+\tau$ che prima s'era trovato, e concludiamo la seguente notevole proposizione: *Se una tangente ad una curva in un punto s-plo ha ivi incontro $(s+\sigma)$-punto con la*

curva, essa sarà tangente σ-pla. Essa è dovuta ad HALPHEN (1), ed è valida senz'alcuna restrizione. Qui però essa risulta dimostrata solo sotto le seguenti condizioni: che se nel punto s-plo O vi sono tangenti diverse da quella t che s'è considerata, esse siano distinte fra loro; che la 1ª polare di un punto generico non abbia con t in O incontro più che s-punto; che infine non si tratti del caso eccezionale rilevato nell'enunciato precedente (relativo all'abbassamento di classe) di questo stesso n.º. Nei precedenti n.i 18 e 20 si erano già dimostrati dei casi particolari di quel teorema.

23. Infine, seguendo sempre lo stesso procedimento, applichiamo i risultati del n. 12 a determinare *l'abbassamento di classe prodotto da un punto doppio a tangenti coincidenti.* Sia, come al nº citato,

$$f \equiv (ax^k + \ldots) + y\,(a'\,x^l + \ldots) + y^2(a_2 + \ldots) + y^3(a_3 + \ldots) + \ldots\ldots,$$

ove supporremo: che a, a', a_2 siano $\mathrel{=}\!|\!= 0$, e che $l > 1$, $k > 2$; di modo che l'origine O sia per f un punto doppio, con la retta $y = 0$ come unica tangente. L'abbassamento di classe prodotto da O sarà la moltiplicità d'intersezione in O di f con la 1ª polare

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv (a'x' + \ldots) + y\,(2a_2 + \ldots) + y^2(3a_3 + \ldots) + \ldots\ldots,$$

la quale ha in O un punto semplice, con la tangente $y = 0$ ad incontro l-punto Otterremo dunque quella moltiplicità d'intersezione dal n. 12, ponendovi $i = l$, $b = a'$, $b_1 = 2a_2$. Avremo che essa è uguale, in generale, a quello dei due numeri k, $2l$ che non supera l'altro. Ed esaminando i casi eccezionali, si vede subito che i primi tre non sono qui possibili, e che il 4º diventa:

$$k = 2l \quad , \quad a'^2 = 4\,a\,a_2.$$

Dunque: *Se un punto doppio ha una sola tangente, la quale abbia in esso incontro k–punto con la curva ed incontro l–punto con la 1ª polare di un punto generico, l'abbassamento di classe prodotto dal punto doppio sarà in generale*

---

(1) *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes* (Mémoires présentés par divers savants etc. t. 26, 1877), pag. 42. — Merita di esser avvertito che quella proposizione ha servito di partenza al sig. ZEUTHEN, nella memoria *Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumerative* (Acta mathematica, t. 1, 1882), per stabilire varie formole relative alle curve con singolarità superiori.

espresso da quello dei due numeri k, 21 *che non supera l'altro. E solo quell'abbassamento sarà maggiore quando sia* k = 21, *e, ponendo*

$$f \equiv (ax^{2l} + \ldots) + y(a'x^l + \ldots) + y^2(a_2 + \ldots) + \ldots\ldots,$$

si abbia

$$a'^2 = 4\,a\,a_2.$$

24. Alla questione precedente si collega una *distinzione dei punti doppi in varie specie.*

Un *punto doppio a tangenti distinte*, o *nodo*, abbassa la classe di 2 unità (n. 20). Se le tangenti hanno in esso incontro tripunto soltanto (nodo ordinario), esse sono tangenti semplici. Se una tangente ha incontro $(\sigma + 2)$-punto, essa è tangente σ − pla (n. 20). — La singolarità duale al nodo (n. 19) è data da una tangente doppia con due diversi punti di contatto. Al nodo ordinario corrisponde la tangente doppia ordinaria, i cui punti di contatto sono punti semplici per la curva.

Un *punto doppio le cui tangenti coincidano in una retta ad incontro tripunto* dicesi *cuspide o regresso ordinario*, o *di* 1^a *specie*. Esso abbassa la classe di 3 unità (n. 21). *La tangente in esso è tangente semplice, ed assorbe tre delle tangenti condotte dal punto alla curva* (n. 21). — Per dualità alla cuspide ordinaria corrisponderà una tangente doppia avente un solo punto di contatto, semplice per la curva: la tangente in un *flesso ordinario* (n. 18). Questa considerazione porta anche subito a questa conseguenza: un punto doppio, le cui tangenti coincidano in una retta che sia tangente semplice per la curva, è una cuspide ordinaria; vale a dire la sua tangente ha incontro tripunto con la curva. In altre parole: se un punto doppio ha le tangenti coincidenti in una retta ad incontro più che tripunto, questa retta sarà tangente doppia almeno; e viceversa.

Un punto doppio con le tangenti coincidenti in una retta ad incontro quadripunto abbassa la classe di 4 unità almeno (n. 22, o n. 23). Se l'equazione della curva si può porre, con le solite convenzioni, sotto la forma

$$ax^4 + \ldots + y(a'x^2 + \ldots) + y^2(a_2 + \ldots) + \ldots\ldots = 0,$$

ed è $a'^2 \neq 4\,a\,a_2$ l'abbassamento di classe prodotto dal punto sarà precisamente di 4 unità; se invece $a'^2 = 4\,a\,a_2$ l'abbassamento di classe sarà almeno di 5 unità. Nel 1º caso il punto doppio dicesi *tacnodo*. Esso costituisce il caso più generale di punto doppio con una sola tangente la quale sia tangente doppia (n. 22). Per dualità dà origine alla stessa singolarità. — Nel caso che $a'^2 = 4\,aa_2$ si ha, in generale, la così detta *cuspide* o *regresso di* 2^a *specie*. Ma non ci fermiamo su questa singolarità e sulla condizione (diseguaglianza) che devon verificare i coefficienti perchè si abbia realmente quella, e non una singolarità che produca un abbassamento di classe maggiore di 5.

V.

Hessiana di una curva piana, e numero dei flessi. Singolarità della Hessiana, ed abbassamento del numero dei flessi prodotto da punti multipli.

25. Si chiama *Hessiana* della curva piana f d'ordine n il luogo di quei punti le cui coniche polari si spezzano. Essa vien rappresentata uguagliando a zero il determinante delle seconde derivate di f rispetto alle tre coordinate omogenee. Si sa, e si dimostra subito ricorrendo alla detta definizione ed alla teoria della polarità (n. 15), che la Hessiana passa per tutti i punti multipli di f, ed inoltre incontra f solo in quei punti semplici ognun dei quali è tale che la tangente ad f nel punto abbia ivi incontro più che bipunto con f. Ne segue che se di f fa parte una retta, oppure una linea multipla, la retta stessa, o la linea staranno pure nella Hessiana di f. Dimostreremo ora che solo in questi casi f ha comuni infiniti punti colla Hessiana.

Indichiamo con O un punto semplice di f, il quale non stia su una retta che faccia parte di f: cosicchè la tangente t in O ad f avrà ivi con f una moltiplicità d'intersezione finita $(\leq n)$ che rappresenteremo con $\sigma+1$. Preso O come origine e quella tangente t come asse $y = 0$, avremo:

$$f \equiv ax^{\sigma+1} + \ldots + y(a_1 + bx + \ldots) + y^2(a_2 + \ldots) + \ldots\ldots,$$

dove, per le ipotesi fatte su t e su O (punto semplice), saranno a ed a_1 diverse da zero. Cerchiamo, nella Hessiana H di f, quello fra i termini privi della variabile y che è del minimo grado rispetto ad x. A tal fine, nello scrivere il determinante H basterà prender solo in ciascun elemento il termine privo della y e più basso rispetto ad x. Abbiamo così:

$$\begin{vmatrix} \sigma(\sigma+1)\,ax^{\sigma-1} & b & (\sigma+1)(n-\sigma-1)\,ax^{\sigma} \\ b & 2a_2 & (n-1)\,a_1 \\ (\sigma+1)(n-\sigma-1)\,ax^{\sigma} & (n-1)\,a_1 & (n-\sigma-1)(n-\sigma-2)\,ax^{\sigma+1} \end{vmatrix}.$$

Ne deriva che in H il termine più basso fra quelli privi di y sarà

$$-\,\sigma(\sigma+1)(n-1)^2\,aa_1^{\,2}\cdot x^{\sigma-1}:$$

poichè questo termine esiste certo, essendo, come s'è detto, a e a_1 non nulli.

Ciò posto, se γ è una parte di f (che può essere anche *tutta* f) contenente il punto O, non potrà γ stare anche in H. Invero, poichè O è semplice per f, O non sarà contenuto dalla residua parte di f; e quindi il termine di γ più basso fra quelli privi della y sarà di grado $\sigma+1$ come l'analogo termine di f. Ora se la funzione γ fosse un divisore di H, il termine di H più basso fra quelli che non contengono y dovrebbe essere almeno del grado del termine analogo di γ, cioè almeno del grado $\sigma+1$. Invece abbiamo trovato che il suo grado è $\sigma-1$. Giungiamo così alla seguente proposizione: *condizione necessaria e sufficiente perchè la curva* f, *od una sua parte, sia contenuta nella Hessiana di* f, *è che* f, *o quella sua parte, si componga tutta di linee, multiple per* f, *o rette.*

26. Il fatto che, nelle ipotesi poste prima, il termine di H più basso fra quelli che non contengono y sia di grado $\sigma-1$, cioè che $\sigma-1$ sia la moltiplicità d'intersezione in O di t con H, permette di assegnare subito la moltiplicità d'intersezione in O di f ed H. Basta applicare la proposizione finale del n. 7, e si ottiene così che quest'ultima moltiplicità vale $\sigma-1$. *In un flesso ordinario di* f *cade una sola intersezione di* f *colla Hessiana; mentre in un punto semplice tale che la tangente vi abbia contatto* $(\sigma+1)$-*punto* $(\sigma>1)$ *con* f *cadono* $\sigma-1$ *intersezioni di* f *colla Hessiana.* Possiamo anche esprimere ciò, in modo convenzionale, dicendo che un tal punto semplice di f *equivale a* $\sigma-1$ *flessi ordinari*, *assorbe* $\sigma-1$ *flessi ordinari*.

Se la curva f non ha componenti multiple, nè componenti rettilinee, il numero delle sue intersezioni con la curva Hessiana, d'ordine $3(n-2)$, sarà finito (n. 25), ed uguale a $3n(n-2)$. Quelle intersezioni che cadono in punti semplici di f daranno i flessi di questa curva, contando ogni punto nel modo detto come equivalente ad un certo numero di flessi ordinari. Se f non ha punti multipli, si ha così che il numero dei flessi (ordinari) di f è uguale a $3n(n-2)$: il che sarà un modo abbreviato di enunciare che $\Sigma(\sigma-1)=3n(n-2)$, estendendo la somma a tutti i punti di f, oppure a quelli soltanto pei quali $\sigma>1$. Se invece f ha punti multipli, diremo *abbassamento nel numero dei flessi di* f *prodotto da un punto multiplo* la moltiplicità d'intersezione, in quel punto, di f colla sua Hessiana. Ed avremo allora che il numero dei flessi (ordinari), vale a dire la somma $\Sigma(\sigma-1)$ calcolata pei punti *semplici* di f, è uguale a $3n(n-2)$, diminuito degli abbassamenti prodotti dai vari punti multipli.

Volendo occuparci di questi abbassamenti del numero dei flessi, conviene che esaminiamo ora il *comportamento della Hessiana di* f *in un punto multiplo di questa curva.*

27. Supponiamo dunque che il punto O sia s-plo, con $s>1$, per la curva f d'ordine $n\,(>1)$. Se $s=n$ la conica polare di un punto qualunque ha sempre un punto doppio in O, e però la Hessiana è in questo caso identicamente nulla. Possiamo dunque limitarci ai casi in cui $s<n$. Assumendo O come origine, potremo scrivere

$$f\equiv\varphi_s+\varphi_{s+1}+\varphi_{s+2}+\ldots+\varphi_n,$$

ove le φ sono forme di x, y degli ordini indicati dai loro indici. Per vedere come si comporta in O la Hessiana H di f, cercheremo quali sono i suoi termini degli ordini più bassi (¹). Indichiamo cogli apici superiori 1 e 2 apposti ad una φ le derivazioni di questa funzione rispetto ad x e y, rispettivamente; sicchè $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^{11}, \varphi^{12}, \varphi^{22}$ indichino $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$. L'Hessiana H di f sarà rappresentata da

$$\begin{vmatrix} \varphi_s^{11}+\varphi^{11}_{s+1}+\ldots & ,\ldots, & (n-s)\varphi_s^1+(n-s-1)\varphi^1_{s+1}+\ldots \\ \varphi_s^{12}+\varphi^{12}_{s+1}+\ldots & ,\ldots, & (n-s)\varphi_s^2+(n-s-1)\varphi^2_{s+1}+\ldots \\ (n-s)\varphi_s^1+(n-s-1)\varphi^1_{s+1}+\ldots & ,\ldots, & (n-s)(n-s-1)\varphi_s+(n-s-1)(n-s-2)\varphi_{s+1}+\ldots \end{vmatrix}$$

ove la 2ª colonna, che non s'è scritta, si ricaverà dalla 1ª mutando nelle φ il primo apice, che è 1, in un 2. Trasformiamo quel determinante, moltiplicando la 3ª colonna per $-s+1$ (che è $\neq 0$) ed aggiungendole poi le prime due colonne moltiplicate rispettivamente per $(n-s)x$, $(n-s)y$. La 3ª colonna diverrà:

$$(n-1)\,\varphi^1_{s+1}+2\,(n-1)\,\varphi^1_{s+2}+3\,(n-1)\,\varphi^1_{s+3}+\ldots$$

$$(n-1)\,\varphi^2_{s+1}+2\,(n-1)\,\varphi^2_{s+2}+3\,(n-1)\,\varphi^2_{s+3}+\ldots$$

$$(n-1)(n-s)\,\varphi_s+2(n-1)(n-s-1)\,\varphi_{s+1}+3(n-1)(n-s-2)\,\varphi_{s+2}+\ldots,$$

Dividiamola per $n-1$ (che è $\neq 0$). Poi aggiungiamo alla 3ª linea, moltiplicata per $-s+1$, le prime due moltiplicate rispettivamente per $(n-s)x$, $(n-s)y$. I primi due elementi della 3ª linea diverranno ciò che prima eran diventati i primi due elementi della 3ª colonna; e l'ultimo elemento verrà ad essere la somma

(¹) Il sig. Brill (*Ueber die Hesse'sche Curve*, Math. Ann. t. 13, 1877-78) ha calcolato *il 1º termine* di H, deducendone le conseguenze che vedremo. Il calcolo che noi qui facciamo di *più termini* è stato adoperato più tardi, per le Hessiane di superficie, dal sig. Rohn (*Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche*, Math. Ann. t. 23, 1883-84).—Alcune osservazioni singolari sui *contatti delle tangenti di* f *con la Hessiana* si possono trovare nella mia Nota: *Sulla forma Hessiana* (Rend. R. Accad. Lincei ser. 5, t. 4, 1895).

delle φ_{s+i} (per $i=0, 1, 2, \ldots$) moltiplicate rispettivamente per

$$(i+1)(n-s-i)(-s+1)+(n-s)\,i\,(s+i)=-(s-1)(n-s)+i(i+1)(n-1).$$

Se, per riavere un determinante simmetrico, dividiamo la 3ª linea per $n-1$, e poniamo, per brevità,

$$\frac{(s-1)(n-s)}{n-1}=\rho,$$

avremo che H è uguale al prodotto di $\left(\frac{n-1}{s-1}\right)^2$ per

$$\left|\begin{array}{lll} \varphi_s{}^{11}+\varphi^{11}{}_{s+1}+\varphi^{11}{}_{s+2}+\ldots, & \ldots, & \varphi^1{}_{s+1}+2\varphi^1{}_{s+2}+3\varphi^1{}_{s+3}+\ldots \\ \varphi_s{}^{12}+\varphi^{12}{}_{s+1}+\varphi^{12}{}_{s+2}+\ldots, & \ldots, & \varphi^2{}_{s+1}+2\varphi^2{}_{s+2}+3\varphi^2{}_{s+3}+\ldots \\ \varphi^1{}_{s+1}+2\varphi^1{}_{s+2}+3\varphi^1{}_{s+3}+\ldots, & \ldots, & -\rho\varphi_s-(\rho-2)\varphi_{s+1}-(\rho-6)\varphi_{s+2}-(\rho-12)\varphi_{s+3}-\ldots \end{array}\right|$$

28. Prima di procedere allo sviluppo di questo determinante conviene osservare che il breve calcolo ora fatto vale senza modificazioni, nemmeno nei coefficienti, quando in luogo delle due variabili x, y si abbia un numero qualunque di variabili. Se queste sono più di due, si dovrà solo scrivere nei determinanti, dopo le linee e colonne 1ª e 2ª caratterizzate dall'avere le φ per primo apice superiore rispettivamente 1 e 2, altre linee e colonne col primo apice superiore 3, 4, ... Se invece si vuole applicare il calcolo fatto al campo binario, cioè al caso di una sola variabile x, dovremo cancellare la 2ª linea e la 2ª colonna. Dunque in questo caso, che appunto c'importa considerare pel seguito, l'Hessiana di f è

$$\left(\frac{n-1}{s-1}\right)^2 \times \left|\begin{array}{ll} \varphi_s{}^{11}+\varphi^{11}{}_{s+1}+\ldots, & \varphi^1{}_{s+1}+2\varphi^1{}_{s+2}+\ldots \\ \varphi^1{}_{s+1}+2\varphi^1{}_{s+2}+\ldots, & -\rho\varphi_s-(\rho-2)\varphi_{s+1}-\ldots \end{array}\right|.$$

Essa ha quindi come termine più basso $-\rho\left(\frac{n-1}{s-1}\right)^2\varphi_s{}^{11}\varphi_s$; ossia, ponendo $\varphi_s\equiv ax^s$ con $a\neq 0$ se il punto O ($x=0$) è esattamente s-plo per f:

$$-s(n-1)(n-s)\,a^2\,x^{3s-2}.$$

Dunque: *un punto* s*-plo per una forma binaria d'ordine* > s *è multiplo secondo* 2s − 2 *per la forma Hessiana.*—Notiamo subito che, quantunque ciò risulti dimostrato solo nell'ipotesi $s>1$, pure rimane vero anche se $s=1$; cioè un punto

che sia semplice per la forma binaria non può far parte dell'Hessiana, giacchè la sua polare di 2º ordine ha in esso un punto semplice, non ha punto doppio.

Possiamo ora risolvere subito la questione di vedere in quali casi l'Hessiana di una forma binaria svanisce identicamente. Se O è un punto di una forma siffatta, esso non può esser semplice; se no non annulla l'Hessiana, come ora s'è detto. Sia dunque s-plo, con $s>1$. Allora nell'espressione dell'Hessiana il termine più basso è quello dianzi scritto. Perchè esso svanisca, essendo $n>1$, $a\neq 0$, occorre che sia $s=n$. D'altronde se la forma binaria d'ordine n ha il punto O per n-plo la forma Hessiana sarà indeterminata. Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la Hessiana di una forma binaria d'ordine* n *svanisca identicamente è che la forma si riduca ad un elemento* n*-plo* (¹).

29. Dopo questa digressione, ritorniamo al determinante ottenuto alla fine del n. 27 come Hessiana (a meno di un fattor costante) della curva f. Sviluppiamo quel determinante, cambiato di segno, scrivendo in una stessa linea, oppure collegando mediante { }, i termini di uno stesso ordine, a partire dall'ordine minimo. Indicando per brevità con $h(\varphi)$ la Hessiana nel campo binario di una forma binaria φ di x,y, cioè l'espressione $\varphi^{11}\varphi^{22}-(\varphi^{12})^2$, otteniamo che H è uguale a $-\left(\frac{n-1}{s-1}\right)^2$ moltiplicato per

$$\begin{aligned} &\rho\;\varphi_s\;h(\varphi_s)\\ &+(\rho-2)\varphi_{s+1}h(\varphi_s)+\rho\varphi_s(\varphi_s{}^{11}\varphi^{22}{}_{s+1}+\varphi_s{}^{22}\varphi^{11}{}_{s+1}-2\varphi_s{}^{12}\varphi^{12}{}_{s+1})\\ &+\{(\rho-6)\varphi_{s+2}h(\varphi_s)+(\rho-2)\varphi_{s+1}(\varphi_s{}^{11}\varphi^{22}{}_{s+1}+\varphi_s{}^{22}\varphi^{11}{}_{s+1}-2\varphi_s{}^{12}\varphi^{12}{}_{s+1})+\rho\varphi_s h(\varphi_{s+1})\\ &+\rho\varphi_s(\varphi_s{}^{11}\varphi^{22}{}_{s+2}+\varphi_s{}^{22}\varphi^{11}{}_{s+2}-2\varphi_s{}^{12}\varphi^{12}{}_{s+2})+\varphi_s{}^{11}(\varphi^2{}_{s+1})^2+\varphi_s{}^{22}(\varphi^1{}_{s+1})^2-2\varphi_s{}^{12}\varphi^1{}_{s+1}\varphi^2{}_{s+1}\}\\ &+\text{termini d'ordine superiore.}\end{aligned}$$

Il 1º termine, il più basso, è d'ordine $3s-4$. La forma φ_s che vi compare rappresenta, come sappiamo, le tangenti in O ad f. Quel 1º termine manca solo: quando $\rho=0$, cioè $s=n$, nel qual caso l'Hessiana è identicamente nulla; e quando $h(\varphi_s)\equiv 0$, cioè (n. 28) φ_s è la potenza s-esima di una forma lineare, le s tangenti in O ad f coincidono. Dunque: *la Hessiana di una curva* f *d'ordine* n

---

(¹) Hesse ha dato nel t. 42 (1851) del Journal di Crelle il teorema più generale, che le forme ad un numero qualunque di variabili, il cui determinante Hessiano svanisce identicamente, sono le forme d'ordine n con un punto n-plo. Invece Gordan e Nöther, trattando più completamente la questione nella Memoria *Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet* (Math. Ann. t. 10, 1876), hanno dimostrato che il teorema di Hesse è vero solo se il numero delle variabili è 2, 3, 4.

con punto s–plo O, *quando* s < n *e le* s *tangenti ad* f *in* O *non coincidono tutte in una, ha in* O *la moltiplicità* 3s – 4 *e per tangenti quelle* s *tangenti di* f *ed il gruppo di* 2s – 4 *rette che ne è l'Hessiano.* Queste tangenti in O alla Hessiana di f saranno tutte distinte fra loro, se tali sono le tangenti ad f; ma (per la prima proposizione del n. 28) *se* s′ (< s) *tangenti di* f *in* O *coincidono in una, in questa coincideranno* s′ + (2s′ – 2) *cioè* 3s′ – 2 *tangenti all' Hessiana.*

La Hessiana di f *avrà in* O *moltiplicità maggiore di* 3s – 4 *solo quando le* s *tangenti in* O *ad* f *coincidano tutte.* In tal caso, ponendo

$$\varphi_s \equiv y^s,$$

lo sviluppo dell'Hessiana, a meno del fattore $-\left(\frac{n-1}{s-1}\right)^2$, diventa:

$$\rho\, s(s-1)\, y^{2s-2}\, \varphi^{11}_{s+1}$$

$$+(\rho-2)s(s-1)y^{s-2}\varphi_{s+1}\varphi^{11}_{s+1}+\rho y^s h(\varphi_{s+1})+\rho s(s-1)y^{2s-2}\varphi^{11}_{s+2}+s(s-1)y^{s-2}(\varphi^1_{s+1})^2$$

$$+ \text{termini superiori}$$

L'attuale primo termine non può, nelle nostre ipotesi ($s > 1$, $s < n$), svanire se non quando $\varphi^{11}_{s+1} \equiv 0$, cioè quando φ_{s+1} contiene x solo al 1° grado. Tolto questo caso, avremo che: *se le* s *tangenti in* O *ad* f *coincidono in una, il punto* O *ha moltiplicità* 3s – 3 *per la Hessiana, e* 2s – 2 *tangenti in esso a questa coincidono nella tangente di* f. Quanto alle rimanenti $s-1$ tangenti dell' Hessiana, cioè $\varphi^{11}_{s+1} = 0$, esse si possono ottenere così. Si consideri la polare d'ordine $s+1$ di O rispetto ad f, cioè $(n-s)y^s + \varphi_{s+1} = 0$; quel gruppo di $s-1$ rette φ^{11}_{s+1} è la 2ª polare di un punto qualunque della tangente in O ad f, $y = 0$, rispetto alla curva d'ordine $s+1$; oppure anche, osservando che la Hessiana di questa si riduce (come segue anche dalle cose precedenti) a $y^{2s-2} \cdot \varphi^{11}_{s+1} = 0$, il gruppo delle $s-1$ rette φ^{11}_{s+1} è il gruppo delle rette che congiungono O ai flessi della detta polare d'ordine $s+1$ di O rispetto ad f.

La Hessiana di f *avrà in* O *moltiplicità almeno uguale a* 3s–2 *quando le* s *tangenti in* O *ad* f *coincidono, in una retta la quale, contata* s *volte, faccia parte della polare d'ordine* s + 1 *di* O *rispetto ad* f. Si possono anche esprimere queste condizioni così: il punto O (s–plo per f) è tale che la sua polare d'ordine $s+1$ ha un punto $(s+1)$-plo P. Ciò equivale, per la teoria della polarità, a dire che: *il punto* O (s–*plo per* f) *è* (s + 1)-*plo per la* 1ª *polare di un certo punto* P. Se si pone ancora

$$\varphi_s \equiv y^s,$$

l'ulteriore condizione perchè O sia multiplo almeno secondo $3s-2$ per l'Hessiana è, come abbiamo trovato:

$$\varphi_{s+1} \equiv y^s(ax + by),$$

essendo a, b costanti. Sostituendo nello sviluppo dell'Hessiana si trova ora come 1° termine, a meno di un fattor costante non nullo,

$$y^{2s-2}[\,(n-s)\,\varphi^{11}_{s+2} - (n-s-1)\, a^2 y^s\,].$$

Dunque: se l'espressione fra [ ] non svanisce, la Hessiana avrà in O esattamente la moltiplicità $3s-2$, e *di nuovo come nel caso precedente* 2s – 2 *tangenti in* O *alla Hessiana cadono nella tangente di* f [1].

La Hessiana avrà in O *moltiplicità almeno uguale a* 3s – 1 se, oltre alle condizioni già poste per φ_s e φ_{s+1} si ha

$$(n-s)\,\varphi^{11}_{s+2} - (n-s-1)\, a^2 y^s \equiv 0.$$

donde, con una doppia integrazione, si ricava

$$\varphi_{s+2} \equiv \frac{n-s-1}{2(n-s)}\, a^2 x^2 y^s + c\, xy^{s+1} + dy^{s+2},$$

essendo c, d nuove costanti. L'equazione della curva f, quando si prenda O come origine e la tangente come asse $y = 0$, deve dunque avere la forma:

$$y^s\left[1 + ax + by + \frac{n-s-1}{2(n-s)}\, a^2x^2 + cxy + dy^2\right] + \varphi_{s+3} + \ldots = 0.$$

30. Ponendo $s = 2$ nei risultati precedenti troviamo la *moltiplicità dell' Hessiana in un punto doppio di* f.

Se O è un *nodo* per f l'Hessiana avrà pure in O un punto doppio, e precisamente un nodo con le stesse tangenti di f.

Se O è una *cuspide ordinaria* o *di* 1ª *specie* per f, l' Hessiana avrà O per

---

[1] Nella Memoria del sig. E. Kötter: *Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung*, 1888 (Math. Ann. t. 34) è stabilito un teorema molto generale sulla moltiplicità e sulle tangenti dell' Hessiana in un punto singolare di f: esso contiene in sè tutti i casi qui considerati (veggasi l'enunciato alla fine di quella Memoria, dove in luogo di $\nu + \sigma < \rho$ si deve leggere $\nu + \sigma < 2\rho$).

punto triplo, e due delle sue tangenti in questo punto coincideranno con la tangente ad f.

Se O è un *tacnodo* di f, l'Hessiana avrà ancora in generale questo punto per punto triplo (1); con la sola particolarità che la 3ª tangente ad essa in O, la quale è rappresentata in generale da $\varphi_3^{11}=0$, nel caso attuale che φ_3 contiene il fattore y viene a coincidere anch'essa con la tangente $y=0$ di f: vale a dire tutte tre le tangenti dell'Hessiana in O coincidono con la tangente ad f.—L'Hessiana avrà in O moltiplicità maggiore di 3 solo quando φ_3 contiene il fattore y^2, sicchè

$$f \equiv y^2(1+ax+by)+\varphi_4+\ldots.$$

Allora f ha in O un tacnodo particolare, che per certe ragioni si potrebbe chiamare *tacnodo simmetrico* od *armonico*: l'Hessiana di f vi ha in generale un punto quadruplo, di cui due tangenti cadono nella tangente ad f (2).

L'Hessiana ha un punto quintuplo in O se questo punto ha per f singolarità (una particolare cuspide superiore) tale che

$$f \equiv y^2\left(1+ax+by+\frac{n-3}{2n-4}a^2x^2+cxy+dy^2\right)+\varphi_5+\ldots$$

31. Veniamo finalmente all'abbassamento prodotto nel numero dei flessi della curva f d'ordine n dai suoi punti multipli; vale a dire (n. 26) alla moltiplicità d'intersezione, in questi punti, di f colla Hessiana. Dovremo limitarci ad alcuni casi.

Sia anzitutto O s—plo per f, sicchè

$$f \equiv \varphi_s+\varphi_{s+1}+\varphi_{s+2}+\ldots,$$

e lo sviluppo dell'Hessiana sarà quello scritto sul principio del n. 29. La moltiplicità d'intersezione in O per le due curve non muterà (n. 3) (1) se si altera l'equazione della seconda, sottraendone la prima moltiplicata per $\rho\cdot h(\varphi_s)$: con che si ottiene:

$$-2\varphi_{s+1}h(\varphi_s)+\rho\varphi_s(\varphi_s^{11}\varphi^{22}_{s+1}+\varphi_s^{22}\varphi^{11}_{s+1}-2\varphi_s^{12}\varphi^{12}_{s+1})$$
$$+\text{ termini superiori.}$$

Ora questa nuova curva ha in O moltiplicità $3s-3$, almeno. Se supponiamo che le tangenti di f in O, cioè le rette φ_s, sian distinte ed abbiano con f incontro $(s+1)$-punto soltanto, nessuna di esse potrà annullare l'insieme dei termini scritti, d'ordine $3s-3$, della nuova curva; poichè non annullerà nè l'Hessiano $h(\varphi_s)$, nè la forma φ_{s+1}. In quell'ipotesi dunque ha luogo effettivamente la moltiplicità $3s-3$, e di più le tangenti in O a quella curva saran diverse dalle tangenti ad f. Quindi (n. 6) la moltiplicità d'intersezione cercata varrà $s(3s-3)$. *Un punto s-plo di f abbassa in generale di* $3s(s-1)$ *unità il numero dei flessi; l'abbassamento è maggiore solo quando: o le s tangenti ad f in quel punto non sono tutte distinte, oppure una di esse ha ivi incontro più che* $(s+1)$*-punto con f.*

In particolare *il numero di flessi assorbiti da un nodo ordinario è* 6. Un punto doppio assorbe più che 6 flessi: quando una tangente ha in esso incontro più che tripunto, e quando le due tangenti coincidono.

Esaminiamo appunto il caso del punto doppio a tangenti coincidenti:

$$f \equiv y^2+\varphi_3+\varphi_4+\ldots+\varphi_n.$$

L'equazione trovata per l'Hessiana (n. 29) nel caso che $\varphi_s \equiv y^s$ si riduce, per $s=2$, a

$$\rho\, y^2\varphi_3^{11}+\left\{(\rho-2)\,\varphi_3\,\varphi_3^{11}+\rho y^2\left[\frac{1}{2}h(\varphi_3)+\varphi_4^{11}\right]+(\varphi_3^1)^2\right\}+\text{ termini superiori.}$$

La moltiplicità d'intersezione di questa curva con f in O non muterà se da questa curva si sottrae f moltiplicata per $\rho\varphi_3^{11}$: sicchè essa diventa

$$(\varphi^1_3)^2-2\varphi_3\,\varphi_3^{11}+\rho y^2\left[\frac{1}{2}h(\varphi_3)+\varphi_4^{11}\right]+\text{ termini superiori.}$$

---

(1) Non quadruplo, in generale, come dicono il BRILL (loc. cit., in nota a pag. 178), ed il KÖTTER (loc. cit., nota a pag. 147-8).

(2) Il sig. WÖLFFING, nella Memoria *Ueber die Hesse'sche Covariante einer ganzen rationalen Function von ternären Formen* (Math. Ann. t. 36, 1889), ha incontrato pel primo, sembra, questa specie particolare di tacnodi, e la particolarità che essi presentano per l'Hessiana.—Veggasi anche una mia Nota *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie,* nei Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, ser. 5, t. 6º, settembre 1897.

(1) Invece di applicare, qui e poco dopo (pel caso di O doppio a tangenti coincidenti), il n. 3, si potrebbe profittare del n. 13: ma con ciò non si avrebbe alcun vantaggio sensibile.

I termini scritti sono del 4° ordine. Perchè la retta $y=0$ annulli il loro insieme, cioè annulli $(\varphi_3{}^{\prime})^2 - 2\varphi_3\,\varphi_3{}^{11}$, dovrà annullare φ_3: invero se si indica con ax^3 il termine di φ_3 indipendente da y, l'analogo termine in $(\varphi^1{}_3)^2 - 2\varphi_3\,\varphi_3{}^{11}$ sarà $(3ax^2)^2 - 2ax^3 \cdot 6ax = -3a^2 x^4$, e svanisce solo se $a=0$, cioè se φ_3 contiene il fattore y. Se ciò non accade, la curva considerata ha in O un punto quadruplo, con le tangenti diverse dalla $y=0$: e però la moltiplicità d'intersezione con f in O sarà 8. Se invece φ_3 è divisibile per y, quella curva avrà in O un punto quadruplo con la $y=0$ come tangente, oppure avrà in O moltiplicità maggiore di 4: in ogni modo le sue intersezioni con f che cadono in O saranno più di 8. Dunque: *una cuspide ordinaria abbassa il numero dei flessi di* 8 *unità; ogni altro punto doppio a tangenti coincidenti (tale cioè che la tangente unica abbia incontro più che tripunto) produce nel numero dei flessi un abbassamento maggiore di* 8.

ERRATA—CORRIGE

Pag. 9, nell'ultima delle linee (3) del determinante, dopo β_{r+1}, invece di β_r si legga β_{r+2}.

Pag. 15 linea 12, si raddrizzi l'esponente τ in y^τ.

Pag. 18 linea 4 da sotto, invece di b^τ leggasi b_τ.

Pag. 19, nella 2ª linea dopo il determinante, invece di $(\tau+1)$ leggasi $(r+1)$.

Pag. 35 linea 3, invece di ≥ 1 leggasi ≥ 1.