GIORNALE
DI MATEMATICHE
DI BATTAGLINI

FONDATO NEL 1863

QUARTA SERIE

A CURA DI

RENATO CACCIOPPOLI e CARLO MIRANDA

Volume LXXVII (1° della 4ª Serie)
1947 - 48

EDIZIONI B. PELLERANO & S. DEL GAUDIO
VIA MEZZOCANNONE, 39-41
NAPOLI
1947

Col presente volume il Giornale di Matematiche riprende la sua pubblicazione interrotta sette anni or sono dalla morte dell'ultimo direttore, Ernesto Pascal, alla cui memoria la nuova Redazione rivolge qui un reverente pensiero.

Si inizia così la quarta serie del Giornale di Matematiche, fondato in Napoli e diretto da G. Battaglini dal 1863 al 1893; diretto poi da Alfredo Capelli negli anni 1894-1909, e da Ernesto Pascal negli anni 1910-1939.

Nel critico periodo attuale, la nostra iniziativa va incontro a considerevoli difficoltà, coraggiosamente affrontate dalla benemerita Casa Editrice Pellerano e del Gaudio. E' però proprio la considerazione di queste difficoltà che ci convince dell'utilità dell'impresa. Le limitate possibilità di stampa, i conseguenti ritardi nella pubblicazione di lavori di attualità la spesso scarsa diffusione di questi, costituiscono specie nel nostro paese gravi ostacoli ad una completa ripresa degli studi matematici. Pensiamo pertanto che il nostro giornale, soprattuto se, com'è nostro proposito e nostra speranza, modernamente indirizzato e largamente diffuso, possa essere di qualche giovamento agli studiosi.

Non ci proponiamo dunque soltanto di ravvivare una tradizione locale a noi cara. D'altra parte non dimentichiamo che il Giornale di Battaglini ebbe un tempo alta fama internazionale, e che alcuni lavori da esso pubblicati possono annoverarsi fra i classici della letteratura matematica. Il successo di un simile periodico dipende in ultimo dal valore della collaborazione occasionale. Non ambiziosi quindi, e ancor meno presuntuosi, ma semplicemente ottimisti, osiamo augurare alla quarta serie del Giornale di Battaglini le fortune della prima.

Napoli, 1 maggio 1947

Renato Caccioppoli
Carlo Miranda

SUI SISTEMI CONTINUI DI CURVE SOPRA UNA RIGATA ALGEBRICA

NOTA I

DI

GUIDO ZAPPA (a Napoli)

La presente nota è dedicata allo studio di sistemi continui di curve sopra una rigata algebrica con infinite direttrici di grado zero. E' noto che ogni superficie rigata algebrica può porsi in corrispondenza birazionale, di solito con eccezioni, con una rigata proiettiva di questo tipo ([1]). Queste rigate costituiscono il prodotto topologico di una retta per una curva di genere p, e furono studiate, per quanto riguarda i sistemi lineari di curve. dal Maroni ([2]). I principali risultati di questo autore sono riportati nel n. 1 della nostra nota.

I risultati del n. 2 rispondono per quanto si riferisce alla suindicata classe di rigate, alla questione, posta da Severi, di determinare, sopra una rigata algebrica, i sistemi lineari *esorbitanti* ([3]), vale a dire quei sistemi lineari i quali non sono contenuti per intero nel sistema continuo individuato da qualche loro curva particolare. Tutti i sistemi lineari esorbitanti sopra una rigata con infinite direttrici di grado zero sono completamente individuati, e con essi anche i sistemi *esuberanti*, cioè quei sistemi lineari che, pur non essendo esorbitanti, hanno dimensione maggiore di quella del generico sistema lineare contenuto nel sistema continuo da essi individuato.

Il n. 3 è dedicato allo studio del problema della completezza della serie caratteristica di un sistema continuo di direttrici sopra una rigata con infinite direttrici di grado zero. E' noto ([4]) che esi-

([1]) Come risulta da un lavoro di Arturo Maroni, in corso di stampa presso i «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni».

([2]) Arturo Maroni, *Intorno alla determinazione dei sistemi lineari di curve sopra le superficie rigate algebriche.* Rend. Istituto Lombardo (2), 36, pp. 586-600 (1903).

([3]) Francesco Severi, *La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.* Memorie Accad. d'Italia 12, pp. 337-430 (1941). Ved. pag. 384.
Id., *Sulla classificazione delle rigate algebriche,* Rend. di Matem. e delle sue applicazioni, Serie V, vol. 2, pp. 1-32 (1941). Ved. pag. 20. Vedere anche la «Questione» n. 57 a pag. 114 degli stessi Rendiconti.

([4]) Guido Zappa, *Sull'esistenza di curve algebricamente non isolate, a serie caratteristica non completa, sopra una rigata algebrica.* Acta Pont. Acad. Scient. pp. 1-4 (1933).

stono rigate con sistemi continui di direttrici aventi, sopra una curva particolare o sopra la curva generica, serie caratteristica non completa. Qui determino in quali casi, sopra una rigata con infinite direttrici di grado zero, un sistema continuo possiede curve su cui la serie caratteristica del sistema è incompleta.

Infine il n. 4 esamina la deviazione della deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare dal suo valore massimo, dato dall'irregolarità q, e determina, per la suddetta classe di rigate, tutti i casi in cui si presenta tale deviazione; di qui vengono dedotti i casi di sistemi continui con meno di ∞^q sistemi lineari.

Mi propongo di studiare, in una seconda nota, i sistemi continui sopra le altre classi di rigate, attraverso una rappresentazione di esse sopra una rigata con infinite direttrici di grado zero. Ogni sistema continuo delle prime dà luogo sulla seconda ad un sistema continuo con punti base assegnati.

1. — Già nel 1903 ([5]) Maroni aveva determinato tutti i sistemi lineari di curve sopra una rigata con un fascio lineare di direttrici di grado zero. Precisamente, se A è una direttrice di grado zero appartenente al suddetto fascio, ogni sistema lineare completo di curve sopra la rigata è della forma

$$|kA + G_\lambda|$$

ove k è un conveniente intero $\geqq 0$, e G_λ è un conveniente gruppo di λ generatrici della rigata. Riproduciamo, salvo lievi modifiche, la dimostrazione di Maroni per comodità del lettore.

Sia G una qualsiasi curva effettiva (irrudicibile o no) sopra la rigata. Se G non incontra la generica curva di $|A|$, essa consta di curve fondamentali di $|A|$. Ma ogni curva di $|A|$ è irriducibile, perchè se fosse spezzata, conterrebbe come parte una generatrice, e quindi incontrerebbe almeno in un punto ogni curva di $|A|$ contro l'ipotesi che $|A|$ sia formato di direttrici di grado zero. Pertanto ogni curva fondamentale di $|A|$ è una curva di $|A|$ stesso, e di conseguenza, se una curva C non incontra la generica curva di $|A|$, si ha

$$C \equiv kA$$

ove k è un conveniente intero positivo.

Supponiamo ora invece che G incontri A in un gruppo (C, A)

([5]) Loc. cit. in ([2]).

di un numero finito, λ, di punti. Sia G_λ il gruppo delle generatrici passanti per (C, A). Se $\overline{A}$ è un 'altra curva di $|A|$, si ha su C, $(C, \overline{A}) \equiv (C, A)$, e poichè tra i punti di C e le generatrici della rigata intercorre una corrispondenza birazionale, detto $\overline{G}_\lambda$ il gruppo delle generatrici per $(C, \overline{A})$, si ha $\overline{G}_\lambda \equiv G_\lambda$, quindi $(G_\lambda, \overline{A}) \equiv (\overline{G}_\lambda, \overline{A}) \equiv$ $\equiv (C, \overline{A})$. Essendo $\overline{A}$ una qualunque curva di $|A|$, si ha che le curve C e G_λ staccano sopra ogni curva di $|A|$ gruppi equivalenti. e pertanto sono equivalenti o differiscono per curve fondamentali di $|A|$, [6], cioè per curve di $|A|$. Si avrà, in conclusione

$$C \equiv kA + G_\lambda \tag{1}$$

ove k è un conveniente intero ≥ 0.

Secando ambo i membri di (1) con una generatrice R, si ha

$$[C, R] = k\,[A, R] + [G_\lambda, R] = k$$

quindi k è il numero di punti in cui una generatrice incontra G.

La dimensione del sistema lineare $|kA + G_\lambda|$ è data, come ha mostrato lo stesso M a r o n i, dal valore

$$\rho = (k+1)\,(r+1) - 1 \tag{2}$$

r essendo la dimensione della serie $|G_\lambda|$ entro il fascio delle generatrici.

La (2) si dimostra subito per induzione rispetto a k. Infatti il sistema $|kA + G_\lambda|$ seca su A la serie completa $|(G_\lambda, A)|$ di dimensioni r, mentre il resto di A rispetto a $|kA + G_\lambda|$ è il sistema $|(k-1)\,A + G_\lambda|$ la cui dimensione è, per ipotesi, $k(r+1)-1$. Di qui si ha subito la (2).

Si noti ora che se su una rigata si ha una direttrice A di grado zero algebricamente non isolata, il sistema continuo $\{A\}$ è necessariamente un fascio lineare. Infatti $\{A\}$ non può essere di indice > 1, altrimenti per un punto della rigata passerebbero almeno due curve di $\{A\}$ onde due curve di $\{A\}$ avrebbero punti a comune, contro l'ipotesi che tali curve siano di grado zero. Di conseguenza per ogni punto di una data generatrice R passa una ed una sola curva di $\{A\}$, onde, essendo tali curve in corrispondenza biunivoca coi punti di

[6] F. S e v e r i, ***Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche***, (a cura di F. C o n f o r t o ed E. M a r t i n e l l i) Roma, Cremonese, 1941. Ved. pag. 190 e segg.

R, $\{A\}$ è razionale ed è quindi contenuto in un sistema lineare, e pertanto, essendo completo, è esso stesso lineare. Esso è poi certamente ∞^1, perchè altrimenti per un punto passerebbero infinite curve di $|A|$ contro l'ipotesi che le sue curve siano di grado zero.

Se è $k \geq 1$, $\lambda \geq 1$ e $|G_\lambda|$ non ha generatrici fisse, il sistema $|kA + G_\lambda|$ ha la curva generica irriducibile. Infatti in tal caso $|kA + G_\lambda|$ non può avere componenti fisse, in quanto nè $|A|$ né $|G_\lambda|$ ne hanno, e non può essere composto con le curve di un fascio poichè in tal caso tutte le curve di $|kA + G_\lambda|$ passanti per un punto P dovrebbero contenere come parte la curva del fascio passante per P, e ciò non può essere, come si vede facilmente. Per il teorema di B e r t i n i esteso, la curva generica di $|kA + G_\lambda|$ è irriducibile per $k \geq 1$, $\lambda \geq 1$, e $|G_\lambda|$ privo di generatrici fisse. Altrettanto avviene per $k = 1$, $\lambda = 0$.

Negli altri casi, invece, le curve di $|kA + G_\lambda|$ sono riducibili. Infatti, se $k = 0$, ciò è evidente. Se è $\lambda = 0$, $k > 1$, $|kA + G_\lambda|$ deve contenere il sistema lineare formato dai gruppi di k curve di $|A|$, e poichè, in base alla (2), ha la stessa dimensione, k, di questo, coincide con questo, ed è formato da curve riducibili. Infine, se è $k \geq 1$, $\lambda \geq 1$, e $|G_\lambda|$ ha una generatrice fissa R, posto $G_{\lambda-1} = G_\lambda - R$, si ha che $|G_\lambda|$ e $|G_{\lambda-1}|$ hanno la stessa dimensione, e quindi, per la (2), anche $|kA + G_\lambda|$ e $|kA + G_{\lambda-1}|$ hanno la stessa dimensione. Onde $|kA + G_\lambda|$ deve avere la R come componente fissa, e pertanto le sue curve sono riducibili.

Concludendo *sopra una rigata con una direttrice A algebricamente non isolata di grado zero, tutti e soli i sistemi lineari completi di curve effettive sono del tipo $|kA + G_\lambda|$, ove k è un intero ≥ 0, rappresentante il numero dei punti in cui una curva del sistema incontra una generatrice, e G_λ è un gruppo di λ generatrici, λ rappresentando il numero dei punti in cui una curva del sistema incontra A. La dimensione di $|kA + G_\lambda|$ è data da $\rho = (k+1)\,(r+1) - 1$, ove r è la dimensione di $|G_\lambda|$. La curva generica del sistema è irriducibile se e solo se è $k = 1$, $\lambda = 0$ oppure $k \geq 1$, $\lambda \geq 1$ e $|G_\lambda|$ privo di generatrici fisse.*

2. — Gli infiniti sistemi lineari che, per $p > 0$, $|kA + G_\lambda|$ descrive quando $|G_\lambda|$ percorre tutte le serie lineari d'ordine λ nel fascio delle generatrici, costituiscono il sistema continuo $\{|kA + G_\lambda|\}$ concepito come totalità di sistemi lineari.

La dimensione della generica $|G_\lambda|$ per $\lambda \geq p$ è $\lambda - p$, mentre per

$\lambda < p$ è zero. Di conseguenza, in base alla (2), la dimensione del generico sistema lineare di $\{|kA + G_\lambda|\}$ è

$$(3)\qquad \begin{aligned} \rho &= (k+1)(\lambda - p + 1) - 1 &\quad \text{per } \lambda \geqq p, \text{ e} \\ \rho &= k &\quad \text{»} \ \ \lambda < p. \end{aligned}$$

Se, per $\lambda \geqq p$, $\overline{G}_\lambda$ è speciale, e se, per $\lambda < p$, l'indice di specialità di $\overline{G}_\lambda$ supera $p - \lambda$ la dimensione del sistema lineare $|kA + \overline{G}_\lambda|$ diviene maggiore del valore dato dalle (3). Indicato con $\{kA + G_\lambda\}$ il sistema continuo, concepito come totalità di curve, individuato dalla curva $kA + G_\lambda$ con G_λ gruppo generico di λ generatrici, si ha che, quando G_λ tende a $\overline{G}_\lambda$, si può presentare l'una o l'altra delle circostanze seguenti [7]:

a) il sistema $|kA + \overline{G}_\lambda|$, pur avendo dimensione maggiore di quella del sistema generico, è tutto contenuto in $\{kA + G_\lambda\}$. Esso dicesi allora, con S e v e r i, sistema lineare *esuberante*.

b) il sistema $|kA + \overline{G}_\lambda|$ non è contenuto per intero in $\{kA + G_\lambda\}$ In altri termini, non tutte le curve di $|kA + \overline{G}_\lambda|$ possono ottenersi come limiti di curve di $|kA + G_\lambda|$. In tal caso il sistema $|kA + \overline{G}_\lambda|$ si dice *esorbitante*.

Ci proponiamo ora di vedere in quali casi $|kA + \overline{G}_\lambda|$ è esuberante, o in quali altri è esorbitante.

Determiniamo a tal fine anzitutto $(k+1)(r+1)$ curve indipendenti del sistema $|kA + G_\lambda|$. Siano $(kA)^{(1)}, (kA)^{(2)}, \cdots, (kA)^{(k+1)}$, $k+1$ curve indipendenti (ciascuna, naturalmente, spezzata in k curve irriducibili di $|A|$) del sistema $|kA|$, e siano $G_\lambda^{(1)}, G_\lambda^{(2)}, \cdots, G_\lambda^{(r+1)}$ $r+1$ gruppi indipendenti di generatrici in $|G_\lambda|$. Le $(k+1)(r+1)$ curve

$$(4)\qquad (kA)^{(i)} + G_\lambda^{(j)} \qquad (i = 1, \cdots, k+1\,;\ j = 1, \cdots, r+1)$$

sono indipendenti. Data la dimensione del sistema $|kA + \lambda G|$, basterà far vedere che ogni curva di questo si può ottenere come combinazione lineare delle (4). Sia C una curva di $|kA + G_\lambda|$, sia $(kA)^*$ una combinazione lineare di $(kA)^{(1)}, \cdots, (kA)^{(k+1)}$, staccante su una data generatrice R lo stesso gruppo che C, e sia G^*_λ una combinazione lineare di $G_\lambda^{(1)}, \ldots, G_\lambda^{(r+1)}$ staccante su una data direttrice A di $|A|$ lo stesso gruppo che C. Allora la curva $(kA)^* + G^*_\lambda$ stacca sia

[7] F. S e v e r i, loc. cit. in [3], pag. 384.

su R che su A lo stesso gruppo che C, e pertanto coincide con essa, poichè, se due curve distinte di $|kA + G_\lambda|$ staccassero lo stesso gruppo sia su R che su A, il numero delle curve indipendenti di $|kA + G_\lambda|$, eguale a $(k+1)(r+1)$ dovrebbe essere maggiore del numero delle coppie indipendenti di gruppi presi l'uno dalla serie $|(kA, R)|$ su R l'altro dalla serie $|(G_\lambda, A)|$ su A, numero che invece è anch'esso uguale a $(k+1)(r+1)$.

Mettendo in evidenza $(kA)^{(i)}$ in tutti i termini della combinazione lineare che lo contengono si ha che *ogni curva C di $|kA + G_\lambda|$ si può esprimere in uno ed un sol modo come combinazione lineare di $(kA)^{(1)} + \Gamma_\lambda^{(1)}, \ldots, (kA)^{(k+1)} + \Gamma_\lambda^{(k+1)}$, ove i gruppi $\Gamma_\lambda^{(i)}$ sono convenienti gruppi di $|G_\lambda|$, dipendenti da C, e i $(kA)^{(i)}$ sono $k+1$ curve indipendenti prefissate di $|kA|$.*

Tutto questo vale tanto se $|G_\lambda|$ è una serie generica nel fascio delle generatrici, quanto se è una serie di dimensione più alta della normale.

Torniamo ora al problema di vedere se, quando $|\overline{G}_\lambda|$ è una serie contenuta in $\{\overline{G}_\lambda\}$, di dimensione più alta della normale, $|kA + \overline{G}_\lambda|$ sia un sistema esuberante o esorbitante.

Dovremo distinguere due casi. Chiamata r la dimensione della generica serie $|G_\lambda|$ ed $\overline{r}$ quella di $|\overline{G}_\lambda|$, potrà avvenire che:

a) $r \geqq k$. Allora una curva $\overline{C}$ di $|kA + \overline{G}_\lambda|$ si potrà e s p r i m e r e come combinazione lineare delle $k+1$ c u r v e, $(kA)^{(1)} + \overline{\Gamma}_\lambda^{(1)}, \ldots, (kA)^{(k+1)} + \overline{\Gamma}_\lambda^{(k+1)}$, ove $\overline{\Gamma}_\lambda^{(1)}, \ldots, \overline{\Gamma}_\lambda^{(k+1)}$ sono $k+1$ gruppi di $|\overline{G}_\lambda|$ generanti una serie, $\overline{g}_\lambda^s$ di dimensione $s \leqq k \leqq r$. Tale serie, avendo dimensione $\leqq r$, è limite di una serie lineare $\overline{g}_\lambda^s$ contenuta in $|G_\lambda|$ [8]. Si potranno quindi trovare in $\overline{g}_\lambda^s$ $k+1$ gruppi $\Gamma_\lambda^{(1)}, \ldots, \Gamma_\lambda^{(k+1)}$, aventi rispettivamente per limite, per $|G_\lambda|$ tendente a $|\overline{G}_\lambda|$ entro un conveniente sistema ∞^1, $\overline{\Gamma}_\lambda^{(1)}, \ldots, \overline{\Gamma}_\lambda^{(k+1)}$. Di conseguenza la curva $\overline{C}$ è limite di una curva C di $|kA + G_\lambda|$, ottenuta combinando linearmente le $k+1$ curve $(kA)^{(i)} + \Gamma_\lambda^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, k+1)$ con gli stessi coefficienti coi quali si sono combinate le $k+1$ curve

[8] Credo che sia nota la proprietà che *ogni serie contenuta in una serie speciale g_n^s ed avente dimensione $r \leqq n - p$ sia limite di una conveniente serie non speciale d'ordine n e dimensione r.*

Pur non avendola trovata enunciata in alcun luogo, mi dispenso dal dimostrarla, poichè il lettore potrà agevolmente farlo per suo conto.

$(kA)^{(i)} + \overline{\Gamma}_\lambda^{(i)}$ per ottenere $\overline{C}$. Ogni curva di $|kA + \overline{G}_\lambda|$ è pertanto limite di una curva di $|kA + G_\lambda|$ *e il sistema* $|kA + \overline{G}_\lambda|$ *risulta esuberante.*

b) $r < k$. Ancora una curva $\overline{C}$ di $|kA + \overline{G}_\lambda|$ si potrà esprimere come combinazione lineare delle $k+1$ curve $(kA)^{(1)} + \overline{\Gamma}_\lambda^{(1)}, \dots (kA)^{(k+1)} + \overline{\Gamma}_\lambda^{(k+1)}$, ma la serie $\overline{g}_\lambda^{s}$ generata da $\overline{\Gamma}_\lambda^{(1)}, \dots, \overline{\Gamma}_\lambda^{(k+1)}$ non avrà necessariamente dimenzione $\leqq r$. Anzi, se $\overline{C}$ è generica in $|kA + \overline{G}_\lambda|$, tra i gruppi $\overline{\Gamma}_\lambda^{(i)}$ ve ne saranno $h+1$ indipendenti, ove h è il più piccolo tra i due numeri k ed $\overline{r}$, e poichè $k \geqq r+1$, $\overline{r} \geqq r+1$, avremo $h \geqq r+1$. Se $\overline{C}$ fosse limite di una curva C di $|kA + G_\lambda|$, questa dovrebbe potersi rappresentare come combinazione lineare di $k+1$ curve $(kA)^{(1)} + \Gamma_\lambda^{(1)}, \dots, (kA)^{(k+1)} + \Gamma_\lambda^{(k+1)}$, e i gruppi $\Gamma_\lambda^{(1)}, \dots, \Gamma_\lambda^{(k+1)}$, stante l'unicità del modo in cui C e $\overline{C}$ possono esprimersi come combinazioni lineari dovrebbero avere per limite rispettivamente i gruppi $\overline{\Gamma}_\lambda^{(1)}, \dots\dots \overline{\Gamma}_\lambda^{(k+1)}$. E ciò non può essere, perchè tra i gruppi $\overline{\Gamma}_\lambda^{(1)} \dots$, $\overline{\Gamma}_\lambda^{(k+1)}$ ve ne sono $h \geqq r+1$ di indipendenti, mentre tra i gruppi $\Gamma_\lambda^{(1)}, \dots, \Gamma_\lambda^{(k+1)}$ non ve ne possono essere più di r indipendenti. Di conseguenza $\overline{C}$ non è generalmente limite di una curva C di $|kA + G_\lambda|$, e pertanto $|kA + \overline{G}_\lambda|$ *è un sistema esorbitante da* $\{kA + G_\lambda\}$.

Se $|\overline{G}_\lambda|$ è una generica serie avente indice di specialità superiore a quello di $|G_\lambda|$, l'indice di specialità di $|\overline{G}_\lambda|$ supera di una unità quello di $|G_\lambda|$. Potrà aversi entro $\{|\overline{G}_\lambda|\}$ qualche serie particolare $|\overline{\overline{G}}_\lambda|$ avente indice di specialità superiore a quello di $|\overline{G}_\lambda|$. Il sistema $|kA + \overline{\overline{G}}_\lambda|$, se è $\overline{r} < k$, sarà, come si vede con ragionamento analogo a quello fatto nel caso precedente, un sistema esorbitante non solo da $\{kA + G_\lambda\}$, ma anche da $\{kA + \overline{G}_\lambda\}$; se invece è $\overline{r} \geqq k$, il sistema $|kA + \overline{\overline{G}}_\lambda|$, pur essendo, come ogni sistema di $\{|kA + \overline{G}_\lambda|\}$, esorbitante da $\{kA + G_\lambda\}$, non è esorbitante da $\{kA + \overline{G}_\lambda\}$, bensì esuberante rispetto ad esso. E così di seguito. In conclusione:

Se, detta r la dimensione della generica serie $|G_\lambda|$ contenuta in $\{G_\lambda\}$ si ha $k \leqq r$, nessun sistema lineare contenuto in $\{|kA + G_\lambda|\}$ è esorbitante. Un sistema $|kA + \overline{G}_\lambda|$ contenuto in $\{|kA + G_\lambda|\}$ è esuberante se e solo se $|\overline{G}_\lambda|$ ha indice di specialità superiore a quello della generica $|G_\lambda|$ di $\{|G_\lambda|\}$.

Se invece si ha $k > r$, tutti e soli i sistemi lineari $|kA + \overline{G}_\lambda|$ di $\{|kA + G_\lambda|\}$ per cui $|\overline{G}_\lambda|$ ha indice di specialità superiore a quello della generica $|G_\lambda|$ sono esorbitanti da $\{kA + G_\lambda\}$. La generica serie $|\overline{G}_\lambda|$ ha dimensione $r+1$. Se è $k > r+1$, i sistemi lineari $|kA + \overline{\overline{G}}_\lambda|$ per cui $|\overline{\overline{G}}_\lambda|$ ha indice di specialità superiore a quello della generica $|\overline{G}_\lambda|$ formano un sistema esorbitante non solo da $\{kA + G_\lambda\}$, ma anche da $\{kA + \overline{G}_\lambda\}$, se invece $k = r+1$, tali sistemi non sono esorbitanti da $\{kA + \overline{G}_\lambda\}$, ma esuberanti rispetto ad esso. I sistemi lineari $|kA + \overline{\overline{\overline{G}}}_\lambda|$ per cui $|\overline{\overline{\overline{G}}}_\lambda|$ ha indice di specialità superiore a quello della generica $|\overline{\overline{G}}_\lambda|$ sono esorbitanti da $\{kA + \overline{\overline{G}}_\lambda\}$, o esuberanti rispetto ad esso, a seconda che è $k > r+2$ o $k \leqq r < 2$, e così via.

3 — Guardiamo adesso quali sono, sopra una rigata con infinite direttrici di grado zero, i sistemi continui di direttrici con serie caratteristica incompleta.

La dimensione di un sistema lineare $|A + G_\lambda|$ di direttrici è, in base alla (2),

$$\rho = 2r + 1,$$

r essendo la dimensione della serie $|G_\lambda|$.

Supponiamo in un primo tempo $\lambda \geqq p$. Allora la dimensione di $|A + G_\lambda|$ è $2\lambda - 2p + 1 = 2\lambda - p + p^a + 1$, essendo, per ogni rigata, $p_a = -p$ quindi tale sistema (9) è regolare. La serie caratteristica sopra ogni curva. C di $|A + G_\lambda|$ è allora (10) completa. Ciò, del resto risulta anche dal fatto che essendo ∞^p i sistemi lineari contenuti in $\{|A + G_\lambda|\}$, (perchè altrettante sono le serie $|G_\lambda|$ in $\{|G_\lambda|\}$), la dimensione di $\{A + G_\lambda\}$ è $(2\lambda - 2p + 1) + p = 2\lambda - p + 1$, e di conseguenza la serie caratteristica (C, C) di C ha dimensione $2\lambda - p$. Essendo tale serie d'ordine $2\lambda \geqq 2p$ essa non è speciale e quindi, stante la sua dimensione, completa. In conclusione *sopra ogni direttrice di $\{A + G_\lambda\}$, $\lambda \geqq p$, la serie caratteristica è completa.*

Sia ora $\lambda < p$. Abbiamo visto che per $|G_\lambda|$ generica in $\{|G_\lambda|\}$, il sistema $|A + G_\lambda|$ è formato da curve riducibili, perchè $|G_\lambda|$ ha dimensione zero. Occorre quindi fermare l'attenzione sopra i sistemi $|A + \overline{G}_\lambda|$ con $|\overline{G}_\lambda|$ di dimensione $\geqq 1$. Ciascuno di questi sistemi, come risulta dal n. prec., è esorbitante da $\{A + G_\lambda\}$. La generica $|\overline{G}_\lambda|$ ha dimensione 1, e quindi il generico $|A + \overline{G}_\lambda|$ ha dimensione 3.

(9) Loc. cit in (3), pag. 369.

(10) B. Segre, *Un teorema fondamentale della geometria*, etc., Ann. di Mat., 1938.

Occorre ora determinare l'infinità dei sistemi lineari contenuti in $\{|A+\overline{G}_\lambda|\}$. Brill e Noether [11] dimostrarono che sopra una curva di genere p a moduli generali, se è p pari $= 2\pi$, non esistono serie lineari infinite d'ordine $\leqq \pi$, c'è un numero finito di serie ∞^1 d'ordine $\pi+1$, ci sono ∞^2 serie ∞^1 d'ordine $\pi+2$, ∞^4 serie ∞^1 d'ordine $\pi+3, \ldots, \infty^{2h}$ serie ∞^1 d'ordine $\pi+h+1, \ldots, \infty^{2\pi}$ serie ∞^1 d'ordine $2\pi+1 = p+1$. Tutte le serie ∞^1 di dato ordine $\pi+h+1$ costituiscono un numero finito di sistemi continui aventi ciascuno dimensione $2h$. Se invece il genere della curva è dispari $= 2\pi-1$, non esistono serie lineari infinite di ordine $\leqq \pi$, ci sono ∞^1 serie lineari semplicemente infinite d'ordine $\pi+1$, ∞^3 d'ordine $\pi+2, \ldots, \infty^{2h+1}$ d'ordine $\pi+h+1, \ldots, \infty^{2\pi+3}$ d'ordine $\pi+(\pi+1)+1 = p+1$. Anche in tal caso tutte le serie ∞^1 d'ordine $\pi+h+1$ si ripartiscono in un numero finito di sistemi continui di dimensione $2h+1$. Posto, per p pari, $\lambda = \frac{p}{2}+h+1$, e, per p dispari, $\lambda = \frac{p+1}{2}+h+1$, si ottiene di qui che, in ambo i casi, *le serie lineari semplicemente infinite d'ordine λ si ripartiscono in un numero finito di sistemi continui di dimensione $2\lambda-p-2$.*

Se la curva *non è a moduli generali*, le serie lineari semplicemente infinite d'ordine $\lambda \geqq \frac{p}{2}+1$ si ripartiscono in un numero finito di sistemi continui *ciascuno dei quali ha dimensione* $\geqq 2\lambda-p-2$, mentre vi possono essere anche serie lineari semplicemente infinite d'ordine $< \frac{p}{2}+1$.

Ciò permesso, sia $|A+\overline{G}_\lambda|$ un sistema lineare di direttrici con $\frac{p}{2}+1 \leqq \lambda < p$, e $|\overline{G}_\lambda|$ di dimensione 1. La dimensione di $|A+\overline{G}_\lambda|$ è, in base alla (2), eguale a 3, mentre l'infinità dei sistemi lineari contenuti in $\{A+\overline{G}_\lambda\}$ eguaglia quella delle serie lineari ∞^1 appartenenti al sistema continuo di serie ∞^1 che contiene $|\overline{G}_\lambda|$, quindi è $\geqq 2\lambda-p-2$, valendo certamendo il segno $=$ se la rigata è a moduli generali. Di conseguenza la dimensione del sistema continuo $\{A+\overline{G}_\lambda\}$ di direttrici è $\geqq 2\lambda-p+1$, il segno $=$ valendo certamente se la rigata è a moduli generali. *Se la curva C di $|A+G_\lambda|$ non è origine di una falda superlineare entro la varietà delle direttrici di $\{A+\overline{G}_\lambda\}$, la dimensione della serie caratteristica di $\{A+\overline{G}_\lambda\}$ sopra C è $\geqq 2\lambda-p$, ed esattamente eguale a tale numero se la rigata è a moduli generali.*

---

[11] A. Brill e M. Noether. *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.* Mathematische Annalen, 7, pp. 269-310 (1873).

Per poter decidere se la serie caratteristica su C è o no completa, occorre determinarne l'indice di specialità. E a tal fine osserviamo anzitutto che *le generatrici passanti per un gruppo caratteristico di $D \equiv A+\overline{G}_\lambda$ formano un gruppo equivalente a $2\overline{G}_\lambda$.*

Si ha infatti $(C, A+\overline{G}_\lambda) = (C, A) + (C, \overline{G}_\lambda)$, quindi il gruppo delle generatrici passanti pel gruppo caratteristico $(C, A+\overline{G}_\lambda)$ consta di $\overline{G}_\lambda$ e del gruppo H_λ delle generatrici per (C, A). D'altra parte essendo $C \equiv A+\overline{G}_\lambda$, si ha, su A, $(C, A) \equiv (A, A) + (A, \overline{G}_\lambda) = (A, \overline{G}_\lambda)$, quindi $H_\lambda \equiv \overline{G}_\lambda$. Pertanto le generatrici per $(C, A+\overline{G}_\lambda)$ formano il gruppo $H_\lambda + \overline{G}_\lambda \equiv 2\overline{G}_\lambda$, come avevamo affermato.

Essendo $\geqq 2\lambda-p$ la dimensione della serie caratteristica su C, si ha che *tale serie può essere incompleta solo se* è speciale, cioè in base all'osservazione ultima, se *detto $\overline{G}_\lambda^*$ un gruppo di generatrici tale che $C \equiv A+\overline{G}_\lambda^*$, si ha $2\overline{G}_\lambda^*$ speciale*; oppure se C è origine di una falda superlineare di $\{A+\overline{G}_\lambda\}$. *Quando poi la rigata è a moduli generali*, essendo esattamente eguale a $2\lambda-p$ la dimensione della serie caratteristica su C, si ha che qualora si faccia astrazione dal caso in cui C è origine di una falda superlineare, *la serie caratteristica su C è incompleta se e solo se $2\overline{G}_\lambda^*$ è speciale.*

Consideriamo ora il caso $\lambda \leqq \frac{p}{2}$, caso che può presentarsi solo su rigate a moduli particolari. Se $|\overline{G}_\lambda|$ è una serie lineare, di dimensione $\geqq 1$, entro il fascio delle generatrici, la dimensione del sistema $|A+\overline{G}_\lambda|$, e quindi anche quella di $\{A+\overline{G}\}$, è $\geqq 3$, come si vede in modo analogo a quello del caso $\lambda > \frac{p}{2}$. Di conseguenza, se C non è origine di una falda superlineare, la serie caratteristica di $\{A+\overline{G}_\lambda\}$ sopra la curva C di tale sistema ha dimensione $\geqq 2$. Ragionando come nel caso precedente, si vede che la serie caratteristica sopra C può essere incompleta solo se, posto $C \equiv A+\overline{G}_\lambda^*$, la serie $|2\overline{G}_\lambda^*|$ ha dimensione > 2, oppure se C è origine di una falda superlineare; e che, quando $|\overline{G}_\lambda|$ è una serie ∞^1 isolata e pertanto $\{A+\overline{G}_\lambda\}$ ha dimensione esattamente tre, la serie caratteristica su $C \equiv A+\overline{G}_\lambda$ è proprio ∞^2, e pertanto, quando la dimensione di $|2\overline{G}_\lambda|$ è maggiore del suo valore minimo 2 tale serie caratteristica è certo incompleta.

A conclusione di questo n. possiamo pertanto affermare:

Sopra la nostra rigata F si possano avere sistemi continui $\{ A + \overline{G}_\lambda \}$ *di direttrici aventi, su una loro curva C, serie caratteristica incompleta, solo per $\lambda \leqq p-1$. Se è $\lambda > \frac{p}{2}$, potrà aversi una serie caratteristica incompleta soltanto sopra una direttrice che sia origine, entro il suo sistema continuo, di una falda superlineare, oppure sopra una direttrice di un sistema lineare $\{ A + \overline{G}_\lambda{}^* \}$, con $\{ \overline{G}_\lambda{}^* \}$ infinita e $\{ 2\, G_\lambda{}^* \}$ speciale; e si avrà di sicuro, in quest'ultimo caso, una serie caretteristica incompleta, se le serie lineari infinite d'ordine λ entro il fascio delle generatrici sono $\infty^{2\lambda - p - 2}$ e non di più, in particolare se la curva è a moduli generali.*

Se è $\lambda \leqq \frac{p}{2}$, si potra avere una serie caratteristica incompleta soltanto sopra una direttrice origine di una falda superlineare, oppure sopra una direttrice $C \equiv A + \overline{G}_\lambda{}^*$ con $|\overline{G}_\lambda{}^*|$ infinita e $|2\, \overline{G}_\lambda{}^*|$ di dimensione > 2. Si avrà certo, in questo ultimo caso, una serie caratteristica incompleta, se $|\overline{G}_\lambda{}^*|$ è una serie lineare isolata di dimensione 1 entro il fascio delle generatrici.

4. — Completiamo questo studio con l'esame della deficienza della seria caratteristica di un sistema lineare sopra la nostra rigata F. E noto che in generale, se q è l'irregolarità di una superficie. la serie caratteristica di un sistema lineare della superficie stessa sopra una curva del sistema ha deficienza q, e che possono però esistere sistemi particolari per cui tale deficienza è minore di q. Ci proponiamo di determinare sulla nostra rigata i sistemi lineari di direttrici per cui questa deficienza è minore dell'irregolarità della rigata, che come è noto eguaglia il genere p della medesima.

Sia $|A + G_\lambda|$ un sistema lineare di direttrici: se indichiamo con r la dimensione di $|G_\lambda|$, la dimensione di $|A + G_\lambda|$ risulta eguale a $2r+1$, e quindi quella della serie caratteristica di $|A + G_\lambda|$ sopra una sua curva C è eguale a $2r$, cioè, detto i l'indice di specialità di $|G_\lambda|$, a $2\lambda - 2p + 2i$. In base ad un osservazione del n. prec., la dimensione della serie completa che contiene totalmente la serie caratteristica eguaglia la dimensione di $|2\, G_\lambda|$, vale a dire $2\lambda - p + j$, ove si è indicato con j l'indice di specialità di $|2\, G_\lambda|$. La deficienza della seria caratteristica di $|A + G_\lambda|$ è allora eguale a $p + j - 2i$. Tale deficienza sarà minore di p tutte e sole le volte che è $j < 2i$.

Se è $\lambda \geqq p$, si ha $j = 0$ perchè $2\lambda > 2p - 2$. La deficienza sarà

eguale a p se è anche $i = 0$, cioè se $|G_\lambda|$ non è speciale, mentre sarà minore di p se $|G_\lambda|$ è speciale. Essendo la generica serie $|G_\lambda|$ non speciale, si ha che il generico sistema $|A + G_\lambda|$ ha caratteristica di deficienza p, e solo sistemi particolari dan luogo ad una deficienza minore. Il sistema continuo $\{ |A + G_\lambda| \}$ consta allora di ∞^p sistemi lineari, perchè il rapporto tra la dimensione di $\{ A + G_\lambda \}$ e quella di $|A + G_\lambda|$ deve eguagliare il rapporto tra la dimensione della serie caratteristica di $\{ A + G_\lambda \}$ e quella di $|A + G_\lambda|$, rapporto che, per quanto abbiamo osservato, risulta eguale a p.

Se invece è $\lambda < p$, la generica $|G_\lambda|$ ha indice di specialità $i = p - \lambda$, mentre la generica $|2\, G_\lambda|$ è non speciale ($j = 0$) se è $2\lambda \geqq p$, ed ha, indice di specialità $j = p - 2\lambda$ se $2\lambda > p$. In ambo i casi si ha, per $|G_\lambda|$ generica, $j < 2i$, perchè nel primo caso si ha $i > 0$, $j = 0$, e nel secondo è $j = p - 2\lambda < 2p - 2\lambda = 2i$.

Pertanto per $\lambda < p$, il generico sistema $|A + \lambda\, G|$ ha serie caratteristica di deficienza $< p$, e di conseguenza il sistema continuo $\{ |A + G_\lambda| \}$ consta di meno che ∞^p sistemi lineari. Concludendo:

I soli sistemi lineari $|A + G_\lambda|$ di direttrici a serie caratteristica di deficienza $< p$ sopra una rigata di genere p con infinite direttrici di grado zero si hanno quando, detto i l'indice di specialità di $|G_\lambda|$ e j quello di $|2\, G_\lambda|$, si ha $2i > j$. Per $\lambda \geqq p$ il generico sistema $|A + G_\lambda|$ ha serie caratteristica di deficienza p e il sistema continuo $\{ |A + G_\lambda| \}$ consta di ∞^p sistemi lineari. Per $\lambda < p$ il generico sistema $|A + G_\lambda|$ ha serie caratteristica di deficienza minore di p, e il sistema continuo $\{ |A + G_\lambda| \}$ consta di meno che ∞^p sistemi lineari.

Pervenuto alla redazione il 25 marzo 1948