

## LA « REGOLA DEI SEGNI » IN ALGEBRA (\*)

I. - La regola del segno del prodotto di due numeri relativi non costituisce certo un argomento nuovo; vastissima è la letteratura al riguardo sia che se ne consideri il punto di vista scientifico che quello didattico.

Dal punto di vista scientifico la spiegazione della regola dei segni risulta - come è noto - a posteriori, dal *principio della conservazione delle proprietà formali delle operazioni*: se si vuole che si mantengano per i nuovi simboli  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ , ... le proprietà fondamentali valide per i numeri assoluti, e cioè le proprietà commutativa e associativa dell'addizione e della moltiplicazione e la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, se si vuole dunque che questi simboli costituiscano una naturale estensione dei numeri assoluti, siamo obbligati a fare la posizione:

$$(-a)(-b) = +ab.$$

Questa giustificazione scientifica può essere forse afferrata da ragazzi di 14-15 anni, e la spiegazione della regola dei segni può dunque entrare in un corso di scuola secondaria superiore sotto l'aspetto formale; ma, se i primi elementi di algebra, e in particolare l'introduzione dei numeri relativi, vengono svolti anche nel corso inferiore della scuola secondaria, è impossibile far comprendere agli allievi tale giustificazione data l'immatunità di un bambino di 12-13 anni.

Il problema didattico della « regola dei segni » si riaffaccia così, oggi, nelle scuole medie inferiori italiane come in quelle di tutti i paesi giacchè in ogni nazione vengono insegnati molto presto i primi concetti di algebra.

II. - I metodi didattici per giustificare in modo elementare la regola dei segni possono distinguersi in due tipi: quelli dove si considera il numero relativo come simbolo e quelli dove il numero relativo è concepito come operatore. Daremo qualche esempio dei due tipi nei punti *A* e *B*.

---

(\*) Ho avuto occasione di riferire quanto espongo nella Parte III di questo articolo al II Convegno di Didattica Matematica tenutosi a Firenze nel novembre '58, e al Seminario indetto dall'OECE sul tema « Nuove concezioni nell'insegnamento della matematica », tenutosi presso il Centro Culturale di Royamont in Francia nel novembre '59. Sono stata così incoraggiata a pubblicare un'esperienza che da vari anni conduco nelle mie classi della Scuola Media « Tasso » in Roma.

A) I metodi didattici del primo tipo ricercano degli espedienti, dei « trucchi », per giustificare il « meno per meno dà più ».

Ricordiamo, fra i tanti, l'interpretazione geometrica (fig. 1) del prodotto:

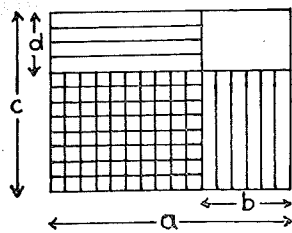


Fig. 1.

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc \dots$$

che porta, necessariamente, a concludere che  $(-b)(-d)$  deve essere positivo.

Ricordiamo anche l'ingenua giustificazione data da Eulero che  $(-1)(-1)$  non può essere uguale a  $-1$  perchè è il prodotto  $(-1)(+1)$  che dà come risultato  $-1$ .

In questi procedimenti si fissa dunque l'attenzione sul simbolo in quanto tale, *non* considerato come operatore.

B) I metodi del secondo tipo considerano il procedimento di moltiplicazione come un'azione da effettuare; il numero è concepito in tal caso come un operatore.

Diamo qualche esempio tratto da un libro pubblicato sotto la guida di Jean Piaget e opera di Lydia Müller<sup>(1)</sup>; cercheremo poi di analizzare questi esempi e di farne la critica da un punto di vista didattico:

1) La costruzione grammaticale « non c'è chi non veda » equivale alla frase « tutti vedono ». Due negazioni danno un'affermazione; l'esempio non riesce certo difficile a un ragazzo di 13 anni, ma secondo me è difficile per un bambino identificare la moltiplicazione logica (che consiste nel tener conto simultaneamente di due relazioni) con la moltiplicazione matematica: non credo che, ammessa quella relazione grammaticale, il bambino sia portato a scoprire che  $(-a)(-a) = +a$ .

2) Con un'automobile parto da  $O$  e posso seguire la strada  $r$  indicata in fig. 2 o verso  $A$  o verso  $B$ . Convengo che se procedo verso  $B$  guardando  $B$

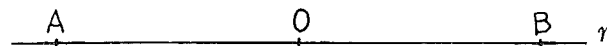


Fig. 2.

attraverso il para-brezza percorro dei tratti  $a$  positivi, mentre se vado verso  $A$  guardando  $A$  attraverso il para-brezza percorro dei tratti negativi; questa convenzione non riesce certo difficile.

Pongo ancora una convenzione: se faccio « marcia avanti » dico che è positivo il numero  $n$  dei giri compiuti dalle ruote, se faccio « marcia indietro » considero quel numero come negativo.

È allora chiaro che per arrivare in  $B$  partendo da  $O$  ho due possibilità:

- « marcia avanti » e percorrere  $r$  verso  $B$  guardando  $B$ ;
- « marcia indietro » e percorrere  $r$  verso  $B$  guardando  $A$ .

<sup>(1)</sup> LYDIA MÜLLER, *Recherches sur la compréhension des règles algébriques chez l'enfant*. Editions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, 1956.

Ora, ammetto quanto dice la Müller che anche un bambino di 5 anni arriva a stabilire queste due possibilità, ma non vedo come questo stesso bambino, così esercitato a moltiplicazioni logiche, possa all'età di 12-13 anni identificare questa operazione logica con la moltiplicazione matematica, e arrivi cioè a rendersi conto da solo che, per esempio,  $(-2)(-3) = +6$ .

Si potrebbe far vedere che l'esperienza dell'automobile si traduce nella formula:

$$(1) \quad s = n \cdot a,$$

dove  $s$  è lo spazio percorso,  $n$  il numero dei giri di ruota e dove  $a$  rappresenta il tratto percorso quando la ruota fa un solo giro. Se premettiamo ad  $s$ , ad  $n$  e ad  $a$  i segni secondo le convenzioni fatte, la (1) traduce la moltiplicazione logica in moltiplicazione matematica e conduce a scoprire la regola dei segni. Ma è noto come la traduzione in simboli di un'esperienza esiga una coscienza fisico-matematica ben più matura di quanto abbia un ragazzo di 13 anni.

III. — Sono senz'altro d'accordo con la scuola di Piaget che ritiene che se si vuole introdurre un'operazione nuova bisogna prima agire e che è appunto l'azione che dà senso al simbolo. Trovo anche che i procedimenti riferiti nel punto A non sono che artifici che per nulla esercitano l'attività del bambino, anche se la sua attenzione è portata su un'immagine grafica, perchè l'immagine grafica è imposta *a priori* dal maestro. Ma, d'altra parte, i procedimenti esposti nel punto B non mi persuadono, come ho detto or ora, per il passaggio, poco intuitivo, da moltiplicazione logica a moltiplicazione matematica.

Il procedimento che vado a esporre, e che lascio al giudizio e all'esperienza dei colleghi, non fa appello a immagini grafiche imposte, ha carattere operativo, e, pur essendo didatticamente elementare, non ha valore di puro artificio ma si riporta a concetti fondamentali della matematica.

Noi vogliamo dare un senso al prodotto di due numeri relativi; cominciamo col richiamare il significato geometrico che si può dare al prodotto di due numeri assoluti.

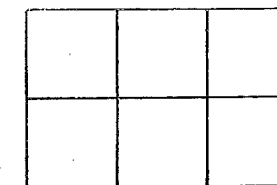


Fig. 3.

Moltiplicare 2 per 3 significa, anche secondo l'interpretazione greca, considerare il rettangolo di dimensioni 2 e 3; l'area di questo rettangolo è 6 perchè 6 sono appunto i quadrati unitari in cui si può scomporre il rettangolo dato (fig. 3).

Questa interpretazione del prodotto come area di un rettangolo può estendersi ai numeri frazionari. Se consideriamo un rettangolo che ha per dimensioni  $\frac{2}{3}$  di un segmento e  $\frac{4}{5}$  di un altro segmento, in modo che  $\frac{1}{3}$  dell'uno sia uguale a  $\frac{1}{5}$  dell'altro (questa condizione non è indispensabile), conveniamo di interpretare il prodotto  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$  come area del rettangolo di dimensioni  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{4}{5}$ .

Come risulta dalla fig. 4, il rettangolo in questione si compone di 8 quadrati unitari mentre il rettangolo degli interi si compone

di 15 quadrati unitari; otteniamo dunque 8 quadrati invece di 15, cioè 8 su 15, che, in simboli, scriveremo  $\frac{8}{15}$ . Avremo perciò:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15},$$

da cui la regola del prodotto di frazioni scoperta su un caso particolare (1).  
Passiamo adesso ai numeri relativi.

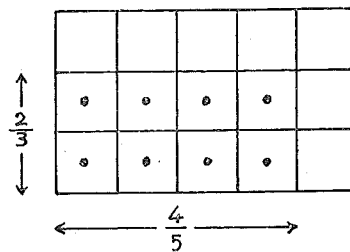


Fig. 4.

Introduciamo ora un materiale molto semplice: un rettangolo di cartone avente colori diversi nelle due facce opposte, ad esempio rosso e blu, e conveniamo di chiamare positiva l'area della faccia rossa e negativa l'area della faccia blu, che è l'opposta.

Supponiamo ad esempio che le dimensioni del rettangolo siano 2 e 3 e che quindi la sua area sia, in valore assoluto, uguale a 6. Disponiamo il rettangolo nel 1° quadrante, come è indicato nella fig. 5, in modo che appaia con la faccia di colore rosso, la faccia positiva; la sua area è allora + 6. Essendo in questo caso + 2 e + 3 le sue dimensioni, potremo scrivere:

$$(+ 2) (+ 3) = + 6.$$

Eseguiamo ora un ribaltamento del rettangolo attorno all'asse  $y$ ; esso si porterà nel 2° quadrante (fig. 6) e lo vedremo dalla parte blu, cioè la sua area sarà negativa, avrà il valore - 6; le sue dimensioni sono ora - 2 e + 3. Avremo allora:

$$(- 2) (+ 3) = - 6.$$

(1) Ho avuto già occasione di parlare di questa interpretazione del prodotto di due frazioni nell'articolo *L'insegnamento delle frazioni*, pubblicato in «Gazeta de Matematica», n. 50, dicembre 1951, Lisbona. Articolo riprodotto in «La scuola secondaria», rivista del Centro Didattico per la Scuola secondaria, anno II, n. 2, dicembre 1952.

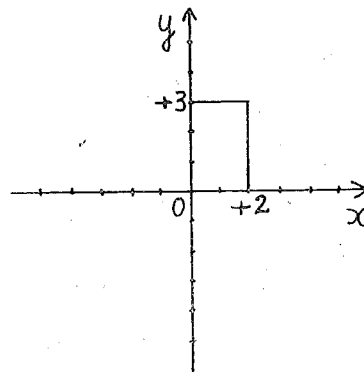


Fig. 5.

Ribaltando il rettangolo nel 3° quadrante, attorno all'asse  $x$  (fig. 7), ci accorgiamo che esso si ripresenta dalla parte rossa, che la sua area è dunque + 6, mentre le dimensioni sono ora - 2 e - 3; avremo perciò:

$$(- 2) (- 3) = + 6.$$

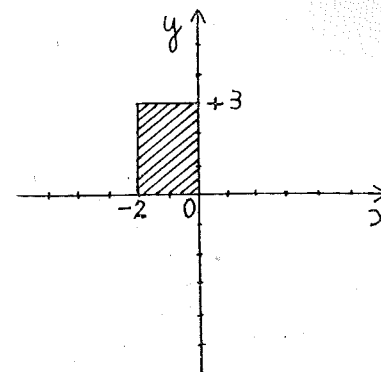


Fig. 6.

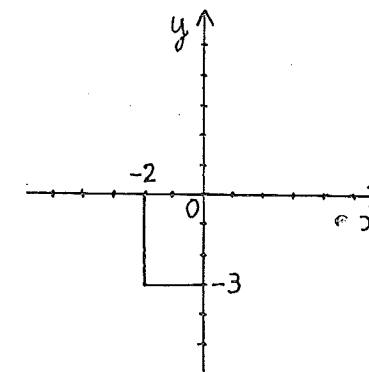


Fig. 7.

Infine, con un ribaltamento attorno all'asse  $y$  (fig. 8), il rettangolo si porterà nel 4° quadrante, e lo vedremo dalla parte blu, la parte negativa, mentre ora le sue dimensioni sono + 2 e - 3; avremo:

$$(+ 2) (- 3) = - 6.$$

Abbiamo ottenuto così la regola dei segni.

Osserviamo che il procedimento che abbiamo seguito su un particolare caso numerico, facilmente generalizzabile, si basa sulla sola convenzione, estremamente naturale, dell'associazione del colore di due facce opposte del rettangolo a segni opposti dell'area. Il rettangolo è dunque caratterizzato non solo dalle due dimensioni ma anche dal colore, cioè dal segno dell'area. Il segno dell'area corrisponde poi al senso che diamo al contorno: si comprende infatti che se prendiamo come senso positivo del contorno del rettangolo nel 1° quadrante quello anti-orario, il senso del contorno nel 2° quadrante sarà quello opposto, il senso orario, e quindi negativo. Il procedimento seguito si riporta dunque alla nozione di area con segno.

Il procedimento fa poi ricorso all'azione, anzi è proprio l'azione che porta alla scoperta: il prodotto di due numeri relativi assume significato in seguito al ribaltamento di un piano attorno a una retta, proprio come il simbolo  $- a$  assume significato, nei confronti del suo simmetrico  $+ a$ , in seguito al ribaltamento di una retta attorno a un punto.

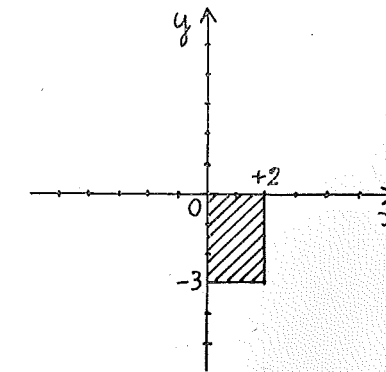


Fig. 8.

EMMA CASTELNUOVO.