

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

---

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS  
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIV

N.º 56

DEZEMBRO 1953

## SUMARIO

Sur les transformations ponctuelles conservant les aires  
par *Georges Bouligand*

Espaço de Lebesgue

Um exemplo de espaço de Riesz regular  
por *Ruy Luis Gomes*

I films di geometria di Jean Louis Nicolet  
di *Emma Castelnuovo*

A Estatística na vida moderna  
por *M. A. Fernandes Costa*

Movimento Científico

União Matemática Internacional — Symposium Internacional de Geo-  
metrie Diferencial — Simpósio de Punta del Este — 8.º Congresso dos  
Matemáticos Polacos.

Matemáticas Superiores

Pontos de exames de frequência e finais  
Matemáticas Gerais — Análise Infinitesimal

Problemas

Problemas propostos e soluções recebidas

Boletim Bibliográfico

---

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

## I Films di Geometria di Jean Louis Nicolet

di Emma Castelnuovo

«Il metodo scientifico — dice POINCARÉ — consiste nell'osservare e nello sperimentare; se lo studioso disponesse di un tempo infinito, non ci sarebbe che dirgli<sup>(1)</sup>: *guarda e guarda bene*; ma siccome non c'è il tempo di guardare tutto e soprattutto di guardare bene tutto, e siccome è meglio non guardare che guardar male, è necessario che egli faccia una scelta.

... Scoprire vuol dire scegliere. Ma l'espressione, forse, non è troppo esatta; fa pensare a un compratore cui si presenti un grandissimo numero di campioni da esaminare uno dopo l'altro in modo da fare una scelta. Qui i campioni sarebbero così numerosi che una vita intera non basterebbe ad esaminarli. Non è così che accade: le combinazioni sterili non si presenteranno alla mente dell'inventore.»

Le combinazioni sterili, di cui parla il POINCARÉ nell'opera «Science et méthode», si presentano invece all'uomo qualunque, all'allievo comune anche se intelligente. Come scegliere fra i tanti i campioni utili? come far sì che delle figure geometriche parlino anche a chi non è particolarmente dotato? come far scorgere un legame fra proprietà apparentemente distinte ma che sono invece vicinissime, anzi che spesso si fondono in un'unica legge matematica? come educare a «guardare e guardar bene»?

Molte delle difficoltà che il ragazzo incontra nello studio della geometria elementare provengono proprio dal passaggio da argomenti ad altri che sembrano distinti e che gli richiedono quindi uno sforzo di comprensione e di memoria, uno sforzo di adattamento. È che noi ci lasciamo portare, alla maniera di EUCLIDE, dal gusto del frastagliamento.

L'idea geniale di NICOLET non appare nel nostro corso: sembra quasi che non si abbia il coraggio di toccare la perfetta bellezza statica del trattato euclideo introducendo nella scuola quel movimento che è dato dal *principio di continuità*: «le proprietà di una figura rimangono valide anche se la figura varia e si deforma in modo continuo, pur di tener conto di particolari modificazioni, per esempio di elementi che da reali possono diventare immaginari, di grandezze che possono diventare nulle o negative».

Ora, in una classe attiva, l'allievo deve essere posto «in stato di ricerca»; non è quindi la perfezione sta-

tica che deve informare l'insegnamento. E io penso che il principio di continuità possa dare a un corso di geometria elementare quella spinta creativa che ha dato e che dà nel campo della geometria algebrica.

Ma, come passare da una figura all'altra, come far muovere i vari elementi in modo visivo ed elementare? come, insomma, realizzare la variazione di una figura per gradi insensibili in modo che anche un ragazzino possa cogliere e tener presenti ad un tempo le condizioni iniziali, gli stati successivi e le particolari modificazioni?

E' questo problema e quest'idea che sembrano aver ispirato e guidato JEAN LOUIS NICOLET<sup>(1)</sup> nel suo lavoro dei films di geometria.

Mi fermerò ad analizzare uno dei suoi disegni animati perché penso che basti un esame critico di uno solamente per comprendere lo spirito di tutto il lavoro.

Il titolo del film è «segmento visto sotto angolo dato». Quest'argomento costituisce la proposizione inversa di quella trattata da EUCLIDE e che negli «Elementi» forma le proposizioni 21 e 32 del Libro III con gli enunciati seguenti:

prop. 21 — «Nel cerchio angoli inscritti nel medesimo arco sono uguali;»

prop. 32 — «Se una retta tocca un cerchio e al punto di contatto si conduce una retta che seghi il cerchio, gli angoli che questa forma con la tangente sono uguali agli angoli inscritti negli archi opposti.»

Negli «Elementi» e così nel nostro insegnamento vengono completamente distinti i casi dell'angolo formato da due secanti alla circonferenza e dell'angolo formato da una tangente e da una secante per il punto di contatto.

Il teorema inverso — cioè l'argomento del film — non è esplicitamente enunciato in EUCLIDE, ma si trova invece nei comuni testi scolastici. La dimostrazione è un po' lunga ma non difficile.

Esaminiamo il film di NICOLET: sullo schermo appaiono successivamente un segmento, un punto

(1) No final indicam-se os significados de algumas das expressões aqui usadas (N. do R.).

(1) J. L. NICOLET, professore di matematica in un liceo di Losanna, si dedica da anni a questo lavoro dei cartoni animati di geometria. I suoi films sono prodotti dalla Casa Cinematografica Inglese: DATA, 21 Soho Square — London, W 1-

fuori della retta del segmento, l'angolo formato dalle semirette congiungenti il punto dato con gli estremi del segmento.

Vi è un determinato angolo, ma — ci dice la figura mobile che sembra tradurre sullo schermo le parole di POINCARÉ — «guarda e guarda bene»: «non vi è solo il punto che per primo appare sullo schermo da cui il segmento è visto sotto quel determinato angolo. Osserva, ve ne è anche un altro e un altro ancora, ve ne sono moltissimi di punti; e, guarda bene, si possono anche considerare dei punti posti dall'altra parte del piano rispetto alla retta del segmento, punti simmetrici dei primi, e anche gli estremi del segmento: l'angolo formato dalla corda e dalla tangente in esso al cerchio viene messo in particolare evidenza.

Vi sono infiniti punti; dove si trovano? Su un arco di cerchio che ha per corda quel segmento, anzi su due archi di cerchio...

Gli angoli spariscono dallo schermo, sparisce anche la corda; rimangono i due archi che formano un'unica curva.

Questo ci dice la figura, che sembra parlante, ma il film è muto come tutti i films di NICOLET.

Anche chi è estraneo al campo della matematica viene colpito da questo passaggio naturale da una figura all'altra, da questo successivo completarsi del disegno, dalla disposizione dei vari elementi geometrici.

Sullo schermo nasce una vera, riposante armonia. «Quell'armonia che — come dice POINCARÉ — è insieme una soddisfazione per i nostri bisogni estetici e un aiuto per la mente che essa sostiene e guida. E, nello stesso tempo, mettendo sotto i nostri occhi un tutto ben ordinato, essa ci fa presentire una legge matematica».

Ma, — si potrà e si dovrà dire — questa non è una dimostrazione!

E' vero: il film di NICOLET non sostituisce la dimostrazione, non vuole sostituire la dimostrazione; non è del resto la dimostrazione che presenta in generale delle difficoltà, la difficoltà sta nell'intuire, nel cogliere una data proprietà.

E allora, quale è il contributo dato dal film, quale il suo scopo?

Mi sembra che le osservazioni che sorgono della veduta dinamica della proprietà in questione si possano raccogliere nei seguenti numeri:

- 1) un punto muovendosi sempre soggetto a quella data condizione genera una curva;
- 2) questa curva è simmetrica rispetto ad una retta, la retta del segmento da cui siamo partiti;
- 3) «sembra» che i due archi uguali di cui è formata la curva siano archi di cerchio;

- 4) questi archi passano anche per gli estremi del segmento.

I numeri 1) e 2) mostrano al ragazzo una figura geometrica — un insieme di punti, una linea — che non è facile intuire in un disegno statico: è difficile infatti «vedere», nel senso di immaginare, una figura in formazione.

In una rappresentazione statica il ragazzo «vede» il punto da cui siamo partiti, vede poi globalmente l'insieme di punti, cioè gli archi di cerchio, ma non riesce a immaginare questa curva come generata dalla traiettoria del punto; proprio come, direi, nel guardare il mio garofano fiorito ricordo il primo germoglio, ma non ho mai visto e il mio occhio non sarà mai in grado di vedere le diverse e successive fasi dello sviluppo.

Il numero 3) fa sentire, direi presentire, la verità; la fa intuire in modo visivo: ma saranno veramente due archi di cerchio come sembra dalla figura? E' ora che il ragazzo sente il bisogno di una dimostrazione.

Anche il numero 4) fa nascere dei dubbi: se l'arco di cerchio passa anche per gli estremi del segmento, come mostra il film, ciò significa che tali estremi sono punti che godono della stessa proprietà cioè l'angolo secondo cui da uno di questi estremi si vede il segmento ha sempre quel dato valore. Ma, dove è quest'angolo? In una visione statica, euclidea, è impossibile mettere in rapporto l'angolo formato dalla tangente e dalla corda con l'angolo formato dalle due secanti. In una visione dinamica, invece, i due concetti si fondono in uno solo: l'angolo alla circonferenza si modifica per gradi insensibili fino a diventare l'angolo della tangente e della corda.

E' il *principio di continuità*, reso visivo dal cartone animato, che ha operato l'unificazione di questi due casi.

Se poi si considera il problema da un punto di vista analitico, possiamo dire che entrano qui i concetti fondamentali dell'analisi: il concetto di limite, di derivata, di funzione continua. Il concetto di funzione entra dunque come basilare nello studio della geometria elementare.

Nel caso ora trattato si può passare al limite senza timore, data la continuità della funzione; ma sorge proprio qui l'opportunità di dare esempi, e ve ne sono di espressivi anche nel campo della geometria elementare, in cui non si può passare al limite con tanta leggerezza. Il ragazzo si renderà così conto da sé stesso del fatto che dopo una visione intuitiva occorre sempre una dimostrazione razionale e una revisione critica.

L'idea fondamentale del NICOLET è questa: il mate-

matico non arriva alla dimostrazione se prima non ha avuto l'intuizione della verità: è questo «momento» spirituale, quel brivido della scoperta, che a pochi è dato di godere, che il NICOLET vuol far «sentire» a chiunque si avvicini allo studio della matematica. E' quell'attimo di visione superiore che anche il ragazzino può così provare.

E' in ciò che i films di NICOLET si distinguono sostanzialmente da altri, anche interessantissimi, che sono apparsi recentemente: lo scopo di questi è di servire da riassunto, da concatenazione di argomenti, da lavoro finale. Per NICOLET invece il film è l'inizio, è l'idea. E, come l'idea è di brevissima durata, così questi films durano pochissimi minuti; il ragazzo non può stancarsi nell'osservare.

Il «guarda e guarda bene» di POINCARÉ assume nel lavoro del matematico svizzero un nuovo, profondo significato.

NOTA: I films di J. L. NICOLET che sono stati acquistati dalla Cineteca Autonoma per la Cinematografia scolastica del Ministero della Pubblica Istruzione (Via S. Susanna 17 — Roma) sono contrassegnati con dei numeri e vertono sui seguenti argomenti:

- N.º 1 — Cerchio determinato da tre punti
- 4 — Triangolo formato da lati di poligoni
- 5 — La strofoide e la sezione aurea
- 6 — La sezione aurea e il pentagono regolare
- 7 — Bisettrici interne di un triangolo
- 8 — Le proprietà del rapporto delle bisettrici esterne
- 9 — Segmento visto sotto angolo dato
- 11 — Costruzione del pentagono regolare.

Chiunque desideri averli a nolo dovrà indicare alla Cineteca il numero del film.

Ad ogni film è associata una nota esplicativa per l'insegnante. Il contenuto di questi cartoni animati è così vivo e limpido che essi possono essere utili agli allievi di ogni classe di scuola media o di liceo o istituti equivalenti.

NOTA DA REDACÇÃO — Afim de facilitar ao leitor a tradução deste interessante artigo, indicamos em seguida os significados de algumas das expressões usadas no texto:

«Non ci sarebbe che dirgli = só haveria que dizer-lhe; guarda, guardare = olha, olhar; siccome = como; scelta, scegliere = escolha, escolher; vuol = quere; cui = a que, a quem; i, le = os, as; campioni = esemplares, amostras; sarebbero = seriam; così = assim, tão; accade = acontece; di cui, con cui = de que, com que; uomo qualunque = homem comum; partino = falem; far scorgere un legame fra = fazer divisar uma ligação entre; argomenti = assuntos; ragazzo = rapaz; richiedono = requerem; quindi = portanto; noi ci lasciamo portare = nós deixamo-nos levar; dal = pelo; frastagliamento = retalhamento; rimangono = permanecem; pur di tener conto = contanto que se tenha conta spinta = impulso; cogliere = colher; mi fermerò = deter-me-ei; seghi = corte; schermo = tela; appaiono = aparecem; per primo = primeiramente; da cui = da qual; ve ne è anche un altro = há ainda um outro; sparisce, spariscono = desapare, desaparecem; bisogni = necessidades; sorgono = surgem; veduta = vista; garofano = cravo; germoglio = rebento; sviluppo = desenvolvimento; ora = agora; ciò, cioè = isto, isto é; godono = gozam; reso = tornado; dunque = pois; senza = sem; da sé stesso = por si mesmo; brivido = arrepio, «frisson»; pochi = poucos; attimo = instante; stancarsi = cansar-se; sono stati acquistati = foram adquiridos; nolo = alugar».

## A Estatística na Vida Moderna

por M. A. Fernandes Costa

No último número de SANKHYĀ (The Indian Journal of Statistics) publica-se uma recente palestra radiofónica do prof. R. A. FISHER sobre os progressos da ciência estatística que, pelo seu interesse, não resistimos a transcrever em parte.

Depois de classificar a Estatística moderna com uma das mais características actividades do sec. XX, o prof. FISHER dá vários exemplos do seu exercício em âmbitos que afectam o bem estar económico de milhões de pessoas. Tira assim duas conclusões:

«Primeira, que o sec. XX ficaria irreconhecível nos

escritos dum historiador que ignorasse este extraordinário surto de actividade estatística. Segunda, que a Estatística não é um assunto extraordinariamente especializado, mas antes uma técnica que interessa à vida industrial, agrícola, administrativa e intelectual do mundo moderno.

«Achamo-nos assim perante um problema educacional da maior gravidade. Se a educação é destinada a preparar os cidadãos de amanhã para o mundo em que hão-de trabalhar, como poderemos nós evitar que os nossos filhos venham a sentir-se incapazes de