Università degli Studi di Trento
Dipartimento di Matematica

Sia benedetto questo errore! La *pericolosa intuizione del caso limite* da Guido a Emma Castelnuovo

Claudio Fontanari
https://claudio.fontanari.maths.unitn.it/

Emma Castelnuovo

L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva. Il materiale per l'insegnamento della matematica, La Nuova Italia Editrice, Firenze 1965, pp. 41– 65.

Somma degli angoli di un triangolo (p. 49)

Vogliamo che gli allievi fissino l'attenzione sugli angoli di un triangolo, osservino i tre angoli, e che questa osservazione nasca spontaneamente. Ora, gli angoli, come i lati, come qualunque elemento di una figura, non vengono osservati se la figura è statica; l'osservazione nasce non appena c'è una variazione. Il confronto di due triangoli o di alcuni triangoli potrà far dire che questo angolo è maggiore di quello o che alcuni angoli sono uguali, ma è un'osservazione che non dice nulla, che non porta a nulla. Per far sì che l'osservazione sia costruttiva nel senso matematico del termine occorre considerare infiniti casi, occorre vedere un caso insieme ai precedenti e a quelli che lo seguono; in breve, occorre far muovere la figura per gradi insensibili.

I casi limite (pp. 50–51)

(...) Dite ai bambini di osservare tutti questi triangoli e di scrivere le loro impressioni. (...) Vi diranno che quando un angolo diminuisce, gli altri aumentano e che – si è sempre portati, anche con una certa leggerezza, a vedere un qualche cosa di costante – quello che si perde in un angolo viene compensato da quello che si guadagna negli altri. Non è forse questa un'intuizione della proprietà sulla somma degli angoli del triangolo? La somma degli angoli è dunque costante; ma, qual è questo valore costante? I casi limite conducono a intuire questo valore.

Sia benedetto questo errore! (p. 51)

(...) È certo che questa esperienza, come del resto tutte quelle realizzate con procedimenti di continuità, ha un pericolo, il pericolo del caso limite, quello cioè di generalizzare la proprietà che si legge nel caso limite. Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore (e non mancano esempi anche elementari dove si mette in evidenza come la continuità conduca a un errore), sia benedetto questo errore! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza.

Bibliografia e sitografia

Guido Castelnuovo

Opere matematiche: memorie e note, pubblicate a cura dell'Accademia nazionale dei Lincei, Roma 2002–2007, 4 vv.

`http://archivi-matematici.lincei.it/Castelnuovo/Biografia/index.htm`

Guido Castelnuovo: una biografia ipertestuale, a cura di Paola Gario. Opera realizzata con il contributo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

`http://archivi-matematici.lincei.it/Castelnuovo/Lezioni_E_Quaderni/menu.htm`

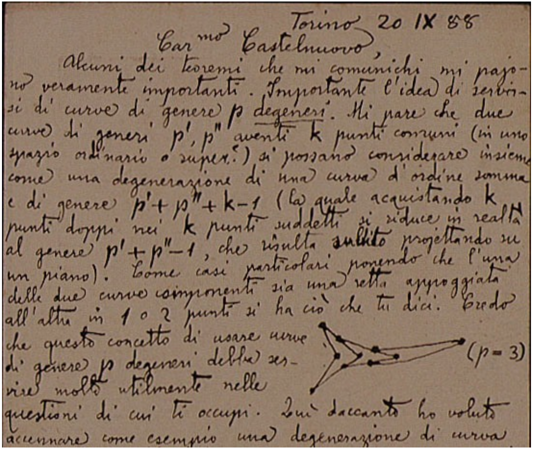
Lettere e quaderni dell'Archivio di Guido Castelnuovo, a cura di Paola Gario.

G. Castelnuovo, *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III, 1889

In questo lavoro ci proponiamo due fini: esporre un metodo utile in molte ricerche della teoria delle curve; presentare alcune formole che ci sembrano notevoli e in se stesse, e per le loro conseguenze. A queste formole noi siamo giunti applicando il principio della conservazione del numero a curve degeneri.

L'idea consiste nel considerare una curva non come un ente geometrico isolato, ma come membro di una famiglia ottenuta variando con continuità i suoi parametri (o moduli). Da questo punto di vista, se una proprietà invariante per deformazioni è verificata da una curva speciale (eventualmente degenere) di una famiglia, allora tale proprietà vale anche per la curva generica della stessa famiglia.

C. Segre a G. Castelnuovo, 20 settembre 1888



Torino 20 IX 88

Car.mo Castelnuovo,

Alcuni dei teoremi che mi comunichi mi pajono veramente importanti. Importante l'idea di servirsi di curve di genere p degeneri. Mi pare che due curve di generi p', p'' aventi k punti comuni (in uno spazio ordinario o super.e) si possano considerare insieme come una degenerazione di una curva d'ordine somma e di genere $p'+p''+k-1$ (la quale acquistando k punti doppi nei k punti suddetti si riduce in realtà al genere $p'+p''-1$, che risulta subito projettando su un piano). Come casi particolari ponendo che l'una delle due curve componenti sia una retta appoggiata all'altra in 1 o 2 punti si ha ciò che tu dici. Credo che questo concetto di usare curve di genere p degeneri debba servire molto utilmente nelle questioni di cui ti occupi. Qui daccanto ho voluto accennare come esempio una degenerazione di curva

$(p = 3)$

Guido Castelnuovo, Memorie Scelte, Bologna 1937, Aggiunta p. 69

L'idea che mi ha permesso di raggiungere rapidamente questo e altri risultati consiste nel sostituire ad una curva irriducibile d'ordine n e genere p di un iperspazio, una curva composta di una curva d'ordine $n-1$ e di una retta unisecante o bisecante, secondo che quest'ultima curva ha genere p o $p-1$. Questo *principio di degenerazione* è semplicemente ammesso; la prima dimostrazione che lo spezzamento non altera i numeri richiesti fu data per via topologica (ricorrendo alle superficie di Riemann) da F. Klein in un suo corso del secondo semestre 1892 (...). Per via algebrica occorre far vedere che la curva spezzata può esser riguardata come limite di una curva irriducibile variante entro un sistema continuo, ciò che, sotto ipotesi assai larghe, ha dimostrato F. Severi nelle *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Anhang G. (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1921).

Moduli Spaces and their Birational Geometry

Han-Bom Moon

Department of Mathematics
University of Georgia

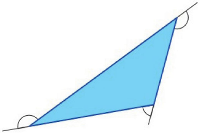
February 25, 2013

Using degeneration

Degeneration on a moduli space is very useful technique to prove many problems. Here is a toy example.

Question

Show that the sum of angle defects of a triangle is always $360°$.

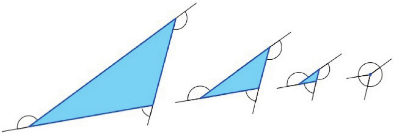


Using degeneration

Degeneration on a moduli space is very useful technique to prove many problems. Here is a toy example.

Question

Show that the sum of angle defects of a triangle is always 360°.



- When we deform our triangle to smaller similar triangles, the sum of angle defects is a constant.
- For the degenerated triangle (a point), the sum is 360°.