UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PISA

ENNIO DE GIORGI

LEZIONI DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA 1°

LIBRERIA EDITRICE UNIVERSITARIA
Via Savonarola, 14 - Tel. 35.577 - Ferrara
1971

I N D I C E

INTRODUZIONE

Vengono richiamate alcune nozioni che consideriamo acquisite nella scuola media.

1. I NUMERI REALI

Per i numeri reali sono definite due operazioni, l'addizione e la moltiplicazione, e un ordinamento.

Le proprietà delle operazioni sono

proprietà commutativa dell'addizione

$$a + b = b + a$$

proprietà commutativa della moltiplicazione

$$a \cdot b = b \cdot a$$

proprietà associativa dell'addizione

$$a + (b+c) = (a+b) + c$$

proprietà associativa della moltiplicazione

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla addizione

$$a \cdot (b+c) = ab + ac$$

esistenza dello zero

$$a + 0 = a \quad , \quad \text{per ogni} \quad a \quad \text{reale}$$

esistenza dell'unità

$$a \cdot 1 = a \quad , \quad \text{per ogni} \quad a \quad \text{reale}$$

esistenza dell'opposto di ogni numero reale

per ogni numero reale a esiste ed è unico un numero reale b tale che

$$a + b = 0$$

sottrazione

per ogni coppia di numeri reali a, b esiste ed è unico un numero reale c tale che

$$a + c = b$$

annullamento del prodotto

per ogni numero reale a si ha

$$a \cdot 0 = 0$$

e inoltre se per una coppia di numeri reali a, b si ha

$$ab = 0$$

allora necessariamente uno almeno dei due numeri è lo zero.

esistenza dell'inverso di ogni numero reale diverso da zero

per ogni numero reale a diverso da zero esiste ed è unico un numero reale b tale che

$$ab = 1$$

divisione

per ogni coppia di numeri reali a, b , con a diverso da zero, esiste ed è unico un numero reale c tale che

$$ac = b$$

Le proprietà dell'ordinamento sono

proprietà transitiva

$$a < b \ , \ b < c \quad \text{implica} \quad a < c \ .$$

Inoltre per ogni coppia a, b di numeri reali con a diverso da b vale una ed una sola delle due relazioni

$$a < b \quad , \quad b < a \ .$$

Nel seguito scriveremo

$$a \leqslant b$$

per intendere che fra i numeri a, b vale una delle due relazioni

$$a = b \quad , \quad a < b \ .$$

Spesso invece di scrivere

$$a < b$$

scriveremo, con lo stesso significato,

$$b > a \quad ,$$

ed analogamente scriveremo

$$b \geqslant a$$

con lo stesso significato di

$$a \leqslant b \ .$$

Le relazioni fra l'ordinamento e le operazioni sono:

$$a \leqslant b \ , \ c \leqslant d \quad \text{implicano} \quad a+c \leqslant b+d \ ,$$

$$a \leqslant b \ , \ 0 < c \leqslant d \quad \text{implicano} \quad ac \leqslant bd \ .$$

I numeri reali positivi

sono i numeri reali a che verificano

$$a > 0 \ ,$$

i numeri reali negativi

sono i numeri reali b che verificano

$$b < 0 \ .$$

Quindi ogni numero reale, escluso lo zero, è positivo o negativo. L'opposto di ogni numero positivo è negativo e viceversa. La somma di due numeri positivi è un numero positivo, la somma di due numeri negativi è un numero negativo. Il prodotto di due numeri positivi è positivo, il prodotto di due numeri negativi è positivo, il prodotto di un numero positivo per un numero negativo è un numero negativo. Quindi per ogni numero reale a si ha

$$a^2 \geqslant 0 \ .$$

Valore assoluto di un numero reale a è il numero positivo eguale ad a se a è positivo ed eguale all'opposto di a se a è negativo. Il valore assoluto dello zero è zero.

In simboli

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geqslant 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \ . \end{cases}$$

La diseguaglianza

$$|a| \leqslant b$$

è equivalente alla doppia diseguaglianza

$$-b \leqslant a \leqslant b \ .$$

Le relazioni fra il valore assoluto e le operazioni sono

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \qquad , \qquad |a-b| \geqslant |a| - |b|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad , \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ .$$

Dalle proprietà dei numeri reali ora ricordate seguono le proprietà formali del calcolo letterale studiate nella scuola media.

2. ULTERIORI PROPRIETA' DEI NUMERI REALI

Per ogni numero reale a esiste un intero n tale che

$$n \leqslant a < n+1$$

Per ogni coppia di numeri reali a, b verificanti

$$a < b$$

esiste un numero razionale q verificante

$$a < q < b \quad ,$$

anzi si può anche richiedere che q sia decimale, ovvero sia rappresentabile con una frazione avente per denominatore una potenza di 10.

Per ogni ripartizione di tutti i numeri reali in due classi A, B verificanti

$$a < b$$

per ogni a appartenente alla classe A e per ogni b appartenente alla classe B, esiste ed è unico un numero reale c verificante

$$a \leqslant c \leqslant b$$

per ogni a appartenente alla classe A e per ogni b appartenente alla classe B.

3. SOMMATORIE, PROGRESSIONI ARITMETICHE E GEOMETRICHE

Se con

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

indichiamo n numeri reali, con uno dei simboli

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} a_j \quad , \quad \sum_{s=1}^{n} a_s \quad , \quad \text{ecc.} \ldots$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i \quad , \quad \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j \quad , \quad \sum_{1\leqslant s\leqslant n} a_s \quad , \quad \text{ecc.} \ldots$$

indicheremo la loro somma.

Dalle proprietà delle operazioni si ricavano per le sommatorie le seguenti proprietà:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (b \cdot a_i) = b \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \text{ , per ogni numero naturale } m < n \text{ .}$$

In alcuni casi il valore di una sommatoria si può calcolare facilmente. Si tratta dei casi in cui i numeri

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_n$$

costituiscono una progressione aritmetica oppure geometrica.

Progressioni aritmetiche

i numeri

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_n$$

costituiscono una progressione aritmetica di ragione d se vale

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d \quad .$$

In tale caso si ha

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \quad .$$

Esempi

1) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2) $1 + 2 + \ldots + 25 = \dfrac{25 \cdot 26}{2} = 25 \cdot 13 = 325$

Progressioni geometriche

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_n$$

costituiscono una progressione geometrica di ragione r se vale

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \quad .$$

In tale caso si ha

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Esempi

1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{256} = 1 - \dfrac{1}{256} = \dfrac{255}{256}$

4. IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Una notevolissima proprietà dei numeri naturali, ovvero degli interi maggiori di zero, è rappresentata dalla validità del principio di induzione:

Principio di induzione

se una proprietà riguardante i numeri naturali è stata verificata per il numero 1 e si è in grado di verificarla per ogni numero naturale del tipo $n+1$, supponendola vera per il naturale n, allora essa è vera per ogni numero naturale.

Esercizio

Si verifichi mediante il principio di induzione la validità delle eguaglianze

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad .$$

5. LO SVILUPPO DEL BINOMIO

Il *fattoriale* di un numero naturale n è il numero naturale che si ottiene come risultato della moltiplicazione

$$2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

e viene indicato con il simboli

$$n! \; .$$

Si conviene porre

$$0! = 1! = 1 \; .$$

Vale ovviamente per ogni numero naturale n l'eguaglianza

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)! \; .$$

Esercizio

Usando il principio di induzione si provi la seguente eguaglianza

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i} \; ,$$

la quale vale per ogni coppia di numeri reali a, b e per ogni numero naturale n.

6. EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Risolvere un'equazione di secondo grado in campo reale vuol dire cercare i numeri reali x per i quali il valore di un assegnato polinomio di 2° grado è zero.

In simboli

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove a, b, c sono numeri reali fissati, ed $a \neq 0$.

Poichè vale

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] \; ,$$

si ha che: condizione necessaria di risolubilità per un'equazione di secondo grado è

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \leqslant 0 \quad \text{ovvero} \quad 4ac \leqslant b^2 \; .$$

Tale condizione è anche sufficiente, infatti i due numeri (uno solo nel caso $4ac = b^2$)

$$-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \; , \quad -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}}$$

sono le soluzioni dell'equazione data.

7. IL TEOREMA DI PITAGORA. SENO E COSENO DI UN ANGOLO ACUTO

Se a, b indicano le lunghezze dei due cateti di un triangolo rettangolo e c indica la lunghezza dell'ipotenusa dello stesso, si ha

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Seno e coseno di un angolo acuto sono le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo avente ipotenusa di lunghezza eguale a 1 e un angolo acuto eguale all'angolo assegnato. Il seno è la lunghezza del cateto opposto all'angolo acuto assegnato.

8. AREA DEL CERCHIO E LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA

L'*area* di un cerchio il cui raggio abbia lunghezza a è direttamente proporzionale ad a^2 e la costante di proporzionalità viene indicata con Π (pi greco) ed è un numero reale, non razionale, la cui parte intera vale 3 e le cui prime quattro cifre decimali sono 1, 4, 1, 5. Quindi valori approssimati per difetto di Π sono

3 ; 3,1 ; 3,14 ; 3,141 ; 3,1415

mentre valori approssimati per eccesso sono

4 ; 3,2 ; 3,15 ; 3,142 ; 3,1416 .

La lunghezza di una circonferenza il cui raggio abbia lunghezza a è direttamente proporzionale ad a è la costante di proporzionalità vale 2Π.

9. MISURA IN RADIANTI DI UN ANGOLO

Misura in radianti di un angolo è la lunghezza dell'arco di circonferenza, di centro nel vertice dell'angolo e di raggio 1 , contenuto nell'angolo

cioè

il doppio dell'area del settore circolare, di centro nel vertice dell'angolo e raggio 1, contenuto nell'angolo.

Vale allora la seguente proprietà : se a è la misura in radianti di un angolo e b la misura in gradi dello stesso, vale la relazione

$$a = \frac{2\Pi}{360} b .$$

C A P I T O L O I

INSIEMI E FUNZIONI

1. INSIEMI.

Insieme è una collezione di elementi sulla natura dei quali non si fa nessuna ipotesi.

Sono esempi di insiemi le figure geometriche: la retta é l'insieme dei punti allineati con due punti assegnati, la circonferenza è l'insieme dei punti aventi una stessa distanza da un punto assegnato. I luoghi geometrici: l'asse di un segmento è l'insieme dei punti equidistanti dagli estremi del segmento. Le classi numeriche.

A volte accanto ad insieme useremo come sinonimi i termini: figura, luogo, classe.

Di solito con le lettere maiuscole indicheremo gli insiemi, con le lettere minuscole gli elementi degli insiemi. Per indicare che l'elemento a appartiene all'insieme A scriveremo

$$a \in A \quad ;$$

per indicare poi che ogni elemento di un insieme A è anche elemento di un altro insieme B scriveremo

$$A \subset B \quad , \quad \text{oppure} \quad B \supset A \quad ,$$

che leggeremo "A è contenuto in B" oppure "B contiene A".

Se $A \subset B$ e $B \subset A$ allora necessariamente $A = B$.

Esempio. Se A indica l'insieme dei triangoli e B l'insieme dei poligoni, allora il fatto che ogni triangolo è anche un poligono si può esprimere graficamente

$$A \subset B \qquad \text{oppure} \qquad B \supset A \; .$$

2. OPERAZIONI SUGLI INSIEMI

Intersezione di due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B. L'intersezione degli insiemi A, B verrà indicata

$$A \cap B \; ,$$

ed evidentemente la scrittura $B \cap A$ ha lo stesso significato della scrittura $A \cap B$, ovvero nei due modi si indica lo stesso insieme.

Esempio. Se A indica l'insieme dei triangoli e B l'insieme dei poligoni regolari, $A \cap B$ indicherà l'insieme dei triangoli equilateri.

Si indicherà con $\emptyset$ l'insieme che non contiene alcun elemento e sarà detto insieme vuoto.

Così la scrittura

$$A \cap B = \emptyset$$

esprime il fatto che i due insiemi A e B non hanno elementi comuni.

Vale ovviamente l'eguaglianza

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

per ogni insieme A.

Accanto a quella di insieme vuoto useremo una notazione standard per indicare un insieme costituito da un solo elemento. Così

$$\{a\}$$

indicherà sempre l'insieme costituito dal solo elemento a.

Esempio. Se C é un cerchio e B una retta di uno stesso piano il fatto che essi possono essere secanti, tangenti ed esterni si esprime con le notazioni ora introdotte

$$C \cap B = S \; , \qquad C \cap B = \{p\} , \qquad C \cap B = \emptyset$$

se S è la corda di C contenuta in B nel primo caso, e se p è il punto di tangenza nel secondo.

Se si considerano tre insiemi A, B e C e si fa l'intersezione di due di essi e successivamente l'intersezione del risultato con il terzo insieme, si ottiene un insieme che non dipende dalla scelta dei primi due insiemi. Tale insieme verrà allora indicato col simbolo

$$A \cap B \cap C \ ,$$

e varrà ovviamente

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B.$$

Unione di due insiemi A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi. Tale insieme verrà indicato con

$$A \cup B \ .$$

Evidentemente $B \cup A$ ha lo stesso significato di $A \cup B$.

Esempio. Se A è l'insieme dei numeri x verificanti la doppia diseguaglianza: $1 < x < 3$, e se B è l'insieme dei numeri x verificanti la doppia diseguaglianza: $2 < x < 4$, allora $A \cup B$ è l'insieme dei numeri x verificanti la doppia diseguaglianza: $1 < x < 4$.

Si ha ovviamente

$$A \cup \emptyset = A \ ,$$

per ogni insieme A.

Se A, B, C sono tre insiemi e si fa l'unione di due di essi e successivamente l'unione del risultato con il terzo insieme si ottiene da ultimo un insieme che non dipende dalla scelta dei primi due insiemi. Esso verrà perciò indicato con

$$A \cup B \cup C \ ,$$

e varrà evidentemente

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = A \cup (B \cup C).$$

Le operazioni di intersezione e unione sono legate fra loro da

1) $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

2) $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Differenza di due insiemi A e B è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B , essa verrà indicata con $A-B$. Contrariamente alle operazioni precedenti il risultato della differenza dipende dall'ordine in cui gli insiemi sono dati, vale infatti ovviamente

3) $\quad (A-B) \cap (B-A) = \emptyset$,

qualunque siano A e B .

Altre semplici relazioni fra l'operazione di differenza e quella di unione e intersezione sono le

4) $\quad A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$,

5) $\quad A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$.

3. INSIEMI NUMERICI

Gli insiemi che avranno un ruolo principale nel seguito sono gli insiemi numerici. Per alcuni di questi, e precisamente per i numeri naturali (1, 2, 3, ...), gli interi relativi, i razionali cioé i numeri esprimibili sotto forma di frazione con numeratore e denominatore interi, e i reali, useremo delle notazioni standard. Indicheremo con N i numeri naturali, con Z gli interi relativi, con Q i razionali e con R i reali.

A proposito di Q, quando parleremo di *rappresentazione canonica* di un numero razionale intenderemo che il numero è scritto nella forma

$$\frac{p}{q}$$

con $p \in Z$, $q \in N$ e p, q privi di fattori comuni interi maggiori di 1 .

A proposito di R osserviamo che esistono numeri reali che non sono razionali. Tale è ad esempio $\sqrt{2}$; infatti se $\sqrt{2}$ fosse razionale, indicata con p/q la sua rappresentazione canonica avremmo

6) $$p^2 = 2q^2 ,$$

e quindi p^2 sarebbe pari; allora anche p sarebbe pari,

cioé p avrebbe 2 come fattore, quindi q non potrebbe avere 2 come fattore, cioé q sarebbe dispari. Allora anche q^2 sarebbe dispari; ne discenderebbe che p^2 sarebbe divisibile per 4 mentre $2q^2$ non lo sarebbe, e la eguaglianza (6) sarebbe falsa. Dobbiamo perciò concludere che l'ipotesi che $\sqrt{2}$ è razionale è falsa.

4. ESTREMO SUPERIORE ED INFERIORE DI UN INSIEME DI NUMERI REALI.

Ricordiamo le principali proprietà dei numeri reali di cui ci serviremo nel seguito.

a) per ogni numero $a \in R$ esistono $p, q \in Z$ tali che
$$p \leqslant a < q .$$

b) per ogni coppia $a, b \in R$, con $a < b$, esiste $z \in Q$ tale che
$$a < z < b .$$

c) per ogni coppia di insiemi $A, B \subset R$ non vuoti, tali che $A \cup B = R$ e $a \leqslant b$, per ogni $a \in A$ e $b \in A$, esiste ed é unico $c \in R$ tale che
$$a \leqslant c \leqslant b , \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Un insieme $L \subset R$ non vuoto si dice superiormente li mitato se esistono numeri maggiori di ogni numero di L , ciò equivale a dire che l'insieme

$$A = \{a \ ; \ a \in R \ , \ a \geq \ell \text{ per ogni } \ell \in L\} \ ,^{(*)}$$

non è vuoto. Vale allora il seguente

Teorema 1. *Se $L \subset R$ non è vuoto ed è superiormente limitato allora l'insieme $A = \{a \ ; \ a \in R \ , \ a \geq \ell$ per ogni $\ell \in L\}$ ha un elemento minimo.*

Dimostrazione. Indichiamo con B l'insieme

$$B = \{b \ ; \ b \in R \ , \ b \leq \ell \text{ per qualche } \ell \in L\} \ .$$

Poichè ovviamente se $\ell \in L$ anche $\ell \in B$ avremo

$$7) \qquad L \subset B \ ,$$

quindi la coppia di insiemi A, B è costituita di insiemi non vuoti ed inoltre

$$A \cup B = R \ .$$

D'altra parte vale

$$a \geq b \ , \text{ per ogni } a \in A \text{ e } b \in B \ ,$$

e quindi, per la terza proprietà dei numeri reali sopra ricordata, esiste $c \in R$ tale che

$$8) \qquad b \leq c \leq a \ , \text{ per ogni } a \in A \text{ e } b \in B \ .$$

Dalle (7) e (8) si ricava allora che $c \geq \ell$ per ogni $\ell \in L$ cioè $c \in A$ e quindi, tenuto ancora conto della (8), che c è l'elemento minimo di A. c.v.d.

(*) Con la scrittura $\{y \ ; \ P_1(y) \ , \ P_2(y) \ , \ \ldots, \ P_h(y)\}$ si indica l'insieme degli elementi che verificano le proprieteà $P_1 \ , \ \ldots, \ P_h$.

Possiamo allora porre la seguente

Definizione 1. *Se L è un insieme non vuoto di numeri reali, diremo estremo superiore di L l'elemento minimo dell'insieme*

$$A = \{a \ ; \ a \in R \ , \ a \geq \ell \text{ per ogni } \ell \in L\}$$

se L è superiormente limitato e lo indicheremo con sup L. *In altri termini* sup L *è il minimo dei numeri maggiori o eguali di ogni numero di L .*

Se L non è superiormente limitato diremo che L ha estremo superiore più infinito, e scriveremo in questo caso

$$\sup L = +\infty \ .$$

Un insieme $L \subset R$ non vuoto si dice inferiormente limitato se esistono numeri minori di ogni numero di L ,ciò equivale a dire che l'insieme

$$C = \{c \ ; \ c \in R \ , \ c \leq \ell \text{ per ogni } \ell \in L\}$$

non è vuoto. Vale allora il seguente

Teorema 2. *Se $L \subset R$ non è vuoto ed è inferiormente limitato, allora l'insieme*

$$C = \{c \ ; \ c \in R \ , \ c \leq \ell \text{ per ogni } \ell \in L\}$$

ha un elemento massimo.

Dimostrazione. E' analoga a quella del Teorema 1.

c.v.d.

Possiamo allora porre la seguente

Definizione 2. *Se* L *è un insieme non vuoto di numeri reali, diremo estremo inferiore di* L *l'elemento massimo dell'insieme*

$$C = \{c \; ; \; c \in R \; , \; c \leq \ell \; \text{ per ogni } \; \ell \in L\}$$

se L *è inferiormente limitato, e lo indicheremo con* $\inf L$. *In altri termini* $\inf L$ *è il massimo dei numeri minori od eguali di ogni numero di* L.

Se L *non è inferiormente limitato, diremo che* L *ha estremo inferiore meno infinito, e scriveremo in questo caso*

$$\inf L = -\infty \; .$$

Ovviamente se un insieme ha massimo elemento, allora questo è anche estremo superiore dell'insieme, ed è anche ovvio che quando l'estremo superiore di un insieme appartiene all'insieme allora ne risulta essere il massimo elemento. Analogamente per quanto riguarda l'estremo inferiore e il minimo elemento di un insieme. Si ha infine, per ogni insieme non vuoto L, la relazione

$$\inf L \leq \sup L \; ,$$

dove si deve intendere che

$$-\infty < c < +\infty \; , \quad \text{per ogni } \; c \in R \; ,$$

$$-\infty < +\infty \; .$$

5. FUNZIONI

Definizione 3. *Se* E *ed* F *sono due insiemi di natura arbitraria e* g *è una operazione che ad ogni elemento di* E *associa un elemento di* F *diremo che* g *è una funzione definita su* E *a valori in* F, *e scriveremo*

$$g: \; E \to F \; .$$

Se x indica un elemento di E con $g(x)$ indicheremo l'elemento di F ad esso associato mediante l'operazione g.

Esempi.

a) $g(x) = x^2 + 5x$, $g : R \to R$,

b) $f(x) = \dfrac{1}{x + |x|}$, $f : \{x \; ; \; x \in R \; , \; x > 0\} \to R$,

c) $p(a)$ = perimetro del poligono a, $p : A \to R$, dove A indica l'insieme di tutti i poligoni,

d) $s(a)$ = area del poligono a, $s : A \to R$,

e) $\nu(a)$ = numero dei lati del poligono a, $\nu: A \to N$,

f) $h(t)$ = cerchio circoscritto al triangolo t, $h : T \to C$, dove T indica l'insieme di tutti i triangoli e C l'insieme di tutti i cerchi.

Se $f : E \to F$ è una funzione definita su E a valori in F diremo anche che E è *l'insieme di definizio* *ne della funzione* f e spesso lo indicheremo col simbolo $\mathcal{D}(f)$.

Esempi.

a) $g(x) = \sqrt{x+2}$, $\mathcal{D}(g) = \{x \; ; \; x \in R \, , \; x \geq -2\}$,

b) $b(x) = \sqrt{x^2 - x}$, $\mathcal{D}(b) = \{x \; ; \; x \in R \, , \; x \leq 0\} \cup$

$\{x \; ; \; x \in R \, , \; x \geq 1\}$.

Accanto al concetto di insieme di definizione di una funzione si ha quello di immagine di un insieme mediante la funzione. Se $T \subset \mathcal{D}(f)$ diremo immagine di T mediante f l'insieme che indichiamo $f(T)$ e che è definito da

$$f(T) = \{f(x) \; ; \; x \in T\} ,$$

in altri termini $f(T)$ è l'insieme descritto da $f(x)$ quando x varia in T .

Esempi.

a) $g(x) = \sqrt{x+2}$, $\quad T = \{x \; ; \; x \in R \, , \; 1 < x < 2\}$,

$g(T) = \{x \; ; \; x \in R \, , \; \sqrt{3} < x < 2\}$,

b) $g(x) = \sqrt{x+2}$, $\quad L = \{x \; ; \; x \in R \, , \; 2 < x < 7\}$,

$g(L) = \{x \; ; \; x \in R \, , \; 2 < x < 3\}$.

Se $f : E \to F$ e $g : M \to S$ sono due funzioni tali che

$$f(E) \subset M$$

allora possiamo considerare la funzione $t : E \to S$ data da

$$t(x) = g\big(f(x)\big) \quad \text{per ogni} \quad x \in E ,$$

e la diremo *funzione composta* mediante le funzioni f e g.

Esempi.

a) $f(x) = x^2+x$, $g(y) = y^2$, $t(x) = x^4+2x^3+x^2$,

b) $f(x) = x^2$, $g(y) = \sqrt{y}$, $t(x) = |x|$,

c) $f(x) = 10^x$, $g(y) = \lg_{10} y$, $t(x) = x$.

Diremo che due funzioni f e g sono *identiche*, cioè che sono la stessa funzione, se vale

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = E ,$$

e se

$$f(x) = g(x) \, , \quad \text{per ogni} \quad x \in E .$$

Data una funzione $f : E \to L$ ed un insieme $E' \subset E$ ($E' \neq E$), diremo *restrizione* ad E' di f la $g : E' \to L$ definita da

$$g(x) = f(x) \, , \quad \text{per ogni} \quad x \in E' .$$

In tale caso g verrà anche indicata con la notazione $\mathrm{restr}_{E'} f$.

Osservazione. Notiamo che data una funzione f , e detto $E = \mathcal{D}(f)$ l'insieme di definizione di f , $f(E)$ l'insieme dei valori $f(x)$ al variare di x in E , f risulta una funzione definita su E a valori in L ogni volta che $L \supset f(E)$. Per esempio se $f(x)$ al variare di x in E assume solo i valori 2, 3, 4, 5, 7 possiamo dire che f assume valori nell'insieme dei numeri naturali, quindi

$$f : E \to N ,$$

ma possiamo anche dire che f assume valori razionali, quindi $f : E \to Q$, che f assume valori reali, cioè $f : E \to R$, che f assume valori reali positivi, ecc.., quindi ferma restando la condizione $L \supset f(E)$, la scelta dell'insieme L per una stessa funzione è largamente arbitraria e dipende dai risultati che intendiamo stabilire nel corso di una certa dimostrazione.

6. FUNZIONE INVERSA E CORRISPONDENZA BIUNIVOCA.

Teorema 3. *Per ogni funzione* $f : E \to L$ *verificante* $f(E) = L$ *sono equivalenti le tre proprietà seguenti*

a) *per ogni* $y \in L$ *l'equazione*

$$y = f(x)$$

nell'incognita x *ha una ed una sola soluzione in* E.

b) *per ogni* $x' \in E$ *e* $x'' \in E$ *con* $x' \neq x''$ *si ha*

$$f(x') \neq f(x'') .$$

c) *esiste una funzione* $g : L \to E$ *tale che*

$$g\left(f(x)\right) = x , \quad \textit{per ogni } x \in E .$$

Dimostrazione. Proveremo che a) implica b), che b) implica c) e che c) implica a).

Per provare che a) implica b) basta far vedere che se b) è falsa allora anche a) deve essere falsa. Infatti:

se b) è falsa esistono due elementi $x', x'' \in E$ con $x' \neq x''$ e tali che

$$f(x') = f(x'')$$

Allora per l'elemento $y = f(x') = f(x'')$ l'equazione $y = f(x)$ ha almeno due soluzioni $x = x'$, $x = x''$.

Facciamo ora vedere che b) implica c). Per questo supponiamo che b) sia vera, allora, essendo $f(E) = L$ fissato un elemento $y \in L$ esiste $x \in E$ con

$$y = f(x) , \tag{9}$$

e tale x per la condizione b) è unico. Indichiamo allora con g la funzione $g : L \to E$ che ad ogni y L associa l'elemento x per il quale vale la (9). La g verifica allora la proprietà c).

Finalmente la c) implica a), infatti l'equazione

$$y = f(x)$$

ha la soluzione $x = g(y)$ e tale soluzione è unica perchè, se per $x' \in E$ vale

$$f(x') = y = f(x) ,$$

dalla proprietà della g si ha

$$x = g\left(f(x)\right) = g(y) = g\left(f(x')\right) = x' ,$$

e quindi $x = x'$

c.v.d.

Definizione 4. *Diremo che una funzione* $f : E \to L$ *la quale verifichi* $f(E) = L$ *e le proprietà* a), b), c) *del*

Teorema 3 *è invertibile e chiameremo sua inversa la funzione* $g : L \to E$ *per cui vale*

$$g\{f(x)\} = x \ , \quad \text{per ogni} \quad x \in E \ .$$

Da quanto detto si ha che se $f : E \to L$ è invertibile e g è la sua inversa allora le eguaglianze

10) $\quad y = f(x) \quad ,$

11) $\quad x = g(y)$

sono equivalenti, cioé se per una coppia di elementi $x \in E$ e $y \in L$ vale la (10) allora vale anche la (11) e viceversa.

Dalla (11) si ricava

$$f(x) = f\{g(y)\} \ ,$$

e quindi, tenuto conto della (10) si ha

12) $\quad y = f\{g(y)\} \ .$

La (12), che vale allora per ogni $y \in L$, mostra che la g è invertibile ed ha come inversa la f.

Questa simmetria fra f e g si esprime dicendo che la coppia f, g stabilisce una *corrispondenza biunivoca* fra i due insiemi E e L.

Esempio. La similitudine fra due poligoni A e B è una corrispondenza biunivoca fra i punti di A e i punti di B con la proprietà che per ogni coppia a, a' di punti di A, indicati con b, b' i punti corrispondenti in B, il rapporto fra i segmenti $\overline{a\,a'}$ e $\overline{b\,b'}$ ha un valore costante.

7. COORDINATE CARTESIANE SULLA RETTA E SUL PIANO.

L'insieme dei punti di una retta e l'insieme R dei numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca. Un modo di stabilire tale corrispondenza è quello di fissare sulla retta due punti, che verranno indicati con le lettere $\underline{o}$ ed $\underline{u}$ e detti punto origine e punto unità, ad essi si fanno corrispondere i numeri 0 ed 1 rispettivamente. Ad ogni altro punto p della retta si fa corrispondere il rapporto fra i segmenti $\overline{o\,p}$ ed $\overline{o\,u}$, cioé la misura del segmento $\overline{o\,p}$ rispetto all'unità di misura $\overline{o\,u}$, se il punto p si trova dalla stessa parte di u rispetto ad o, e l'opposto del rapporto detto se il punto p si trova dalla parte opposta di u rispetto ad o. Tale funzione, definita sulla retta e a valori reali, è invertibile avendo come inversa la funzione che ad ogni numero reale positivo associa il punto p, dalla parte di u rispetto ad o, tale che il rapporto fra i segmenti $\overline{o\,p}$ ed $\overline{o\,u}$ sia eguale al numero assegnato, ed ogni numero negativo associa il punto p dalla parte opposta di u rispetto ad o, tale che il rapporto fra i segmenti $\overline{o\,p}$ ed $\overline{o\,u}$ sia eguale all'opposto del numero dato, allo zero fa corrispondere il punto origine.

Quando si sia fissata, nel modo sopra detto, una cor rispondenza fra i punti di una retta e i numeri reali si dice che si è fissato sulla retta un *riferimento cartesiano* e si dice *coordinata* o *ascissa* di un punto della retta il numero reale ad esso associato.

Un'altra interessante coppia di insiemi fra i quali può porsi una corrispondenza biunivoca è costituita dallo insieme dei punti del piano e dall'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Un modo di stabilire tale corrispondenza è quello di scegliere nel piano due rette fra loro perpendicolari e su ciascuna di esse fissare un riferimento cartesiano che abbia come punto origine l'intersezione delle due rette e i punti unità equidistanti dall'origine. Si chiama primo asse o asse delle ascisse quella delle due rette il cui punto unità per sovrapporsi al punto unità della seconda descrive, muovendosi in senso antiorario, un angolo eguale a $\Pi/2$, si chiama secondo asse o asse delle ordinate l'altra retta. Ad ogni punto del piano si può allora associare una coppia ordinata di numeri reali proiettando il punto ortogonalmente sui due assi e prendendo come primo numero la coordinata della sua proiezione sull'asse delle ascisse e come secondo numero la coordinata della sua proiezione sull'asse delle ordinate. I due numeri verranno anche detti ascissa e ordinata del punto.

Ricordando quanto detto sulla corrispondenza fra i numeri reali e i punti della retta ci si rende facilmente conto che la corrispondenza così fissata è biunivoca.

Quando si sia fissata, nel modo ora detto, una corrispondenza fra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali si suole anche dire che è stato fissato nel piano un *riferimento cartesiano ortogonale*. Spesso per brevità, invece di dire punto di coordinate x, y diremo punto x, y e scriveremo semplicemente (x, y).

Una utile applicazione dei riferimenti cartesiani ortogonali del piano consiste nella rappresentazione grafica o grafico delle funzioni reali di variabile reale. Poniamo precisamente la seguente definizione:

Definizione 5. *Se f è una funzione reale di variabile reale, cioè una funzione definita su un insieme di numeri reali ed a valori reali, e se P è un piano sul quale sia stato fissato un riferimento cartesiano ortogonale, diremo grafico di f sul piano P l'insieme T dei punti di P definito da*

$$T = \{(x, y) \ , \ x \in \mathcal{D}(f) \ , \ y = f(x)\} .$$

Esempio. Le funzioni lineari, cioè le funzioni f definite da una eguaglianza del tipo

$$f(x) = ax + b \ , \tag{13}$$

con $a, b \in R$, hanno come grafico delle rette, e precisamente la funzione definita da (13) ha come grafico la retta che forma con l'asse delle ascisse un angolo la cui tan gente vale a e incontra l'asse delle ordinate nel punto di ordinata b.

8. LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI.

Definizione 6. *Successione di numeri reali è una funzione* f *definita sull'insieme dei numeri interi positivi e a valori reali, cioé*

$$f : N \to R .$$

Se $f, g, a \dots$ sono successioni di numeri reali, scriveremo, per $n \in N$, $f_n, g_n, a_n \dots$ in luogo di $f(n), g(n), a(n) \dots$.

Esempi.

a) $a : N \to R$ definita dalle eguaglianze

$$a_n = \frac{n}{2} \text{ per } n \text{ pari,}$$

$$a_n = \frac{n+1}{2} \text{ per } n \text{ dispari;}$$

b) $b : N \to R$ definita dalle eguaglianze

$$b_n = \sqrt{\frac{n}{2}} \text{ per } n \text{ pari,}$$

$$b_n = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \text{ per } n \text{ dispari.}$$

Definizione 7. *Data una successione* a_n *di numeri reali diremo che il limite per* n *tendente all'infinito di* a_n

è $b \in R$ *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu_\varepsilon \in R$ *tale che*

14) $$|a_n - b| < \varepsilon$$

per ogni $n > \nu_\varepsilon$.

Per indicare che b è il limite di a_n per n tendente all'infinito scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b .$$

La diseguaglianza (14) è equivalente a ciascuna delle due diseguaglianze seguenti

15) $$-\varepsilon < a_n - b < \varepsilon ,$$

$$b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon .$$

Esempi.

a) se $a_h = k$ per ogni $h \in N$ allora è $\lim_{h\to\infty} a_h = k$, infatti in tale caso $|a_h - k| = 0$ per ogni $h \in N$,

b) $\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} = 0$. Infatti se per $\varepsilon > 0$ si prende $\nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ si ha $0 < \frac{1}{h} < \varepsilon$ per ogni $h > \nu_\varepsilon$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Infatti se per $\varepsilon > 0$ si considera $\nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}$ si ha che per $n > \nu_\varepsilon$ vale

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon^2$$

e quindi

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon ,$$

cioè vale la (15).

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + \frac{1}{n}) = 3$. Infatti se per $\varepsilon > 0$ si considera $\nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ si ha che per $n > \nu_\varepsilon$ vale

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

e quindi

$$0 < (3 + \frac{1}{n}) - 3 < \varepsilon ,$$

cioè vale la (15).

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = 2$. Infatti se per $\varepsilon > 0$ si considera $\nu_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ si ha che per $n > \nu_\varepsilon$ vale

17) $$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon ,$$

e poichè vale

$$2 < \sqrt{4 + \frac{1}{n}} < 2 + \frac{1}{n} ,$$

dalla (17) si ricava

$$2 < \sqrt{4 + \frac{1}{n}} < 2 + \varepsilon$$

per $n > \nu_\varepsilon$ e quindi vale la (16).

Sono espressioni equivalenti, come facilmente si verifica, le

18) $$\lim_{n\to\infty} a_n = b ,$$

19) $$\lim_{n\to\infty} (a_n - b) = 0,$$

20) $$\lim_{n\to\infty} |a_n - b| = 0 .$$

Una proprietà del limite di una successione, che è

molto utile nel calcolo dei limiti è data dal seguente

Teorema 4. *Se* a_h, b_h, c_h *sono tre successioni reali verificanti*

21) $$a_h \lesssim b_h \lesssim c_h , \quad \text{per ogni } h \in N ,$$

e se

$$\lim_{h\to\infty} a_h = \lim_{h\to\infty} c_h = \ell$$

allora anche la successione b_h *ha limite ed è*

$$\lim_{h\to\infty} b_h = \ell$$

Dimostrazione. Essendo

$$\lim_{h\to\infty} a_h = \ell ,$$

si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν_ε tale che

22) $$\ell - \varepsilon < a_h < \ell + \varepsilon \quad \text{per ogni } h > \nu_\varepsilon .$$

Essendo

$$\lim_{h\to\infty} c_h = \ell ,$$

si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν'_ε tale che vale

23) $$\ell - \varepsilon < c_h < \ell + \varepsilon \quad \text{per ogni } h > \nu'_\varepsilon .$$

Se si indica allora con ν''_ε il più grande dei due numeri ν_ε , ν'_ε si ha che per $h > \nu''_\varepsilon$ valgono sia la (22) che la (23), e quindi, ricordando la (21), si ha

24) $$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \quad \text{per ogni } h > \nu''_\varepsilon .$$

Questo prova che

$$\lim_{h\to\infty} b_h = \ell .$$

c.v.d.

Esempio. $\lim_{h\to\infty} \left(\frac{\cos 2h}{2h} + \frac{\text{sen } 2h}{2h} + 7\right) = 7.$

Basta provare, per la (19), che

$$\lim_{h\to\infty} \left(\frac{\cos 2h}{2h} + \frac{\text{sen } 2h}{2h}\right) = 0 .$$

Ma poichè vale

$$-\frac{1}{h} < \frac{\cos 2h}{2h} + \frac{\text{sen } 2h}{2h} < \frac{1}{h} \text{ , per ogni } h \in N ,$$

ed è

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} = 0 ,$$

e quindi per la (20),

$$\lim_{h\to\infty} -\frac{1}{h} = 0 ,$$

dal Teorema 4 segue che anche

$$\lim_{h\to\infty} \left(\frac{\cos 2h}{2h} + \frac{\text{sen } 2h}{2h}\right) = 0 .$$

Accanto alle proprietà ora dette vi sono per il limite di una successione delle proprietà legate alle operazioni algebriche. La prima di queste è espressa dal seguente teorema

Teorema 5. *Se* a_h *e* b_h *sono due successioni aventi limite ed è*

$$\lim_{h\to\infty} a_h = p \quad , \quad \lim_{h\to\infty} b_h = s ,$$

allora la successione $a_h + b_h$ *ha limite ed è*

$$\lim_{h\to\infty} (a_h + b_h) = p + s .$$

Dimostrazione. Se ε è un numero positivo anche $\frac{\varepsilon}{2}$ è positivo e quindi esiste $\nu'_{\varepsilon/2}$ tale che

$$25) \qquad |a_h - p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni $h > \nu'_{\varepsilon/2}$. Esiste allora anche $\nu''_{\varepsilon/2}$ tale che

$$26) \qquad |b_h - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni $h > \nu''_{\varepsilon/2}$.

Se si indica con ν_ε il più grande dei due numeri $\nu'_{\varepsilon/2}$ e $\nu''_{\varepsilon/2}$ si ha che per ogni $h > \nu_\varepsilon$ valgono sia la (25) che la (26) e quindi si ha

$$|(a_h + b_h) - (p + s)| \leq |a_h - p| + |b_h - s| < \varepsilon$$

per ogni $h > \nu_\varepsilon$. Ciò dimostra che

$$\lim_{h\to\infty} (a_h + b_h) = p + s ,$$

cioé che il *limite della somma è uguale alla somma dei limiti.*

c.v.d.

Osservazione. Le eguaglianze

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} -a_n = -p$$

sono equivalenti, come si verifica facilmente ricordando che vale

$$|a_n - p| = |(-a_n)-(-p)| \text{ , per ogni intero } n .$$

Da questa osservazione si ricava facilmente il seguente

Teorema 6. *Se* b_n *e* c_n *sono due successioni aventi limite ed è*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = p\ , \quad \lim_{n\to\infty} c_n = q\ ,$$

allora anche la successione $b_n - c_n$ *ha limite ed è*

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - c_n) = p - q\ .$$

Dimostrazione. Poichè c_n ha limite eguale a q, $-c_n$ avrà limite eguale a $-q$.

Per il Teorema 5 allora $b_n + (-c_n) = b_n - c_n$ ha limite ed è

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - c_n) = p + (-q) = p - q\ .$$

Abbiamo così provato che: *il limite della differenza è eguale alla differenza dei limiti.*

c.v.d.

Quando vorremo dire solo che esiste un numero reale che è limite della successione a_n senza precisare qual'é questo limite diremo semplicemente che la successione a_n è *convergente*.

Per esprimere il fatto che la successione a_n ha per limite il numero reale s diremo anche che a_n *converge verso* s.

La nozione di successione *convergente* non deve essere confusa con la definizione che ora daremo di successione *limitata*.

Definizione 8. *Una successione di numeri reali* a_n *dicesi limitata se esiste un numero positivo* M *tale che valga*

$$|a_n| < M\ , \quad \textit{per ogni intero } n\ .$$

Vogliamo ora confrontare il concetto di successione limitata con quello di successione convergente. Vale a questo proposito il seguente

Teorema 7. *Ogni successione convergente è anche limitata, ma non vale il viceversa.*

Dimostrazione. Sia a_n una successione convergente e sia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p\ ,$$

allora essendo 1 un numero positivo esiste ν tale che

$$|a_n - p| < 1\ , \quad \text{per ogni } n > \nu\ .$$

Allora è anche vero che

$$|a_n| < |p| + 1\ , \quad \text{per ogni } n > \nu\ .$$

Se si pone perciò

$$M = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_\nu| + |p| + 1\ ,$$

si ha certamente

$$|a_n| < M\ , \quad \text{per ogni intero } n\ .$$

Abbiamo quindi provato che ogni successione convergente è anche limitata.

Per rendersi conto che il viceversa non è vero basta considerare la successione

$$a_n = (-1)^n\ ,$$

la quale non è convergente e per la quale vale ovviamente

$$|a_n| < 2 \ , \quad \text{per ogni intero} \quad n \ .$$

c.v.d.

Teorema 8. *Se* a_n *è una successione limitata e* b_n *una successione convergente verso zero, allora si ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0 \ .$$

Dimostrazione. Essendo la successione a_n limitata, si può trovare un numero positivo M tale che

27) $$|a_n| < M \ , \quad \text{per ogni intero} \quad n \ .$$

Poichè b_n ha per limite zero, per ogni $\varepsilon > 0$, essendo anche $\frac{\varepsilon}{M}$ un numero positivo, si può trovare ν tale che

28) $$|b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \ , \quad \text{per ogni} \quad n > \nu$$

Dalle (27) e (28) si ricava allora

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \ , \quad \text{per ogni} \quad n > \nu \ .$$

Poichè ν esiste per ogni $\varepsilon > 0$ si è così provato che

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

c.v.d.

Esempio. $$\lim_{h\to\infty} \frac{\cos h\pi + 3\operatorname{sen} 5h + 6}{h} = 0 \ .$$

Basta osservare che

$$\frac{\cos h\pi + 3\operatorname{sen} 5h + 6}{h} = (\cos h\pi + 3\operatorname{sen} 5h + 6)\frac{1}{h}$$

e la successione $(\cos h\pi + 3\operatorname{sen} 5h + 6)$ è limitata valendo

$$|\cos h\pi + 3\operatorname{sen} 5h + 6| \leq |\cos h\pi| + 3|\operatorname{sen} 5h| + 6 < 11 \ ,$$

mentre é noto che

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} = 0 \ .$$

Il Teorema 8 permette di dimostrare facilmente la regola per il calcolo del limite del prodotto.

Teorema 9. *Se la successione* a_n *ha limite* p *e la successione* b_n *ha limite* s *allora la successione* $a_n b_n$ *ha limite* $p\, s$.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n - p\, s) = 0 \ .$$

Per questo osserviamo che vale

29) $$a_n b_n - p\, s = (a_n - p)b_n + p(b_n - s) \ .$$

La successione $a_n - p$ ha limite zero, mentre la successione b_n è limitata, perchè è convergente. Quindi dal Teorema 8 si ha che la successione $(a_n - p)b_n$ converge verso zero. La successione costante eguale a p è ovviamente limitata e la successione $b_n - s$ ha limite zero, quindi dal Teorema 8 si ricava che la successione $p(b_n - s)$ ha limite zero. Dalla (29) ricordando che il limite della somma è eguale alla somma dei limiti si ricava che la successione $a_n b_n - ps$ converge verso zero.

Quindi si è provato che: *il limite del prodotto è e* guale al prodotto dei limiti.

c.v.d.

Teorema 10. *Se* a_n *è una successione convergente, allora anche la successione* $|a_n|$ *è convergente e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n| .$$

Dimostrazione. Sia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p ,$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν tale che

30) $$|a_n - p| < \varepsilon , \quad \text{per ogni} \quad n > \nu .$$

Ma poichè vale, come facilmente si verifica,

$$\big||a_n| - |p|\big| \leq |a_n - p| ,$$

dalla (30) si ricava

$$\big||a_n| - |p|\big| < \varepsilon, \quad \text{per ogni} \quad n > \nu .$$

E' così dimostrato che *il limite del valore assoluto è eguale al valore assoluto del limite.*

c.v.d.

Prima di provare la regola riguardante il limite del quoziente, dimostriamo il seguente

Teorema 11. *Sia* a_n *una successione di numeri reali diversi da zero e sia*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p \neq 0 .$$

Allora si può considerare la successione $\frac{1}{a_n}$ *la quale risulta convergente e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{p} .$$

Dimostrazione. Basta verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{p}\right) = 0 ,$$

cioè che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p - a_n}{a_n p} = 0 .$$

Si osservi allora che la successione $\frac{p - a_n}{p\, a_n}$ risulta essere il prodotto della successione $p - a_n$, la quale converge verso zero, e della successione $\frac{1}{pa_n}$. Per quanto riguarda quest'ultima osserviamo che, poichè a_n converge verso p , dal Teorema 10 si ha che $|a_n|$ converge verso $|p|$ e quindi, essendo $p \neq 0$ e perciò $\frac{1}{2}|p| > 0$, si ha che esiste ν tale che

$$\big||a_n| - |p|\big| < \frac{|p|}{2} , \quad \text{per ogni } n > \nu ,$$

e quindi si ha

$$|a_n| > \frac{|p|}{2} , \quad \text{per ogni} \quad n > \nu ,$$

da cui segue

31) $$\left|\frac{1}{pa_n}\right| < \frac{2}{|p|^2} , \quad \text{per ogni} \quad n > \nu .$$

Posto allora

$$M = \left|\frac{1}{a_1 p}\right| + \left|\frac{1}{a_2 p}\right| + \ldots\ldots + \left|\frac{1}{a_\nu p}\right| + \frac{2}{|p|^2} ,$$

dalla (31) si ricava

$$\left|\frac{1}{pa_n}\right| < M \ , \quad \text{per ogni intero} \quad n \ .$$

La successione $\frac{1}{pa_n}$ è quindi limitata. Dal Teorema 8 si ricava allora che la successione $\frac{p - a_n}{pa_n} = (p - a_n) \frac{1}{pa_n}$ converge verso zero.

c.v.d.

Dal Teorema 11 e dalla regola per il limite del prodotto segue facilmente la regola riguardante il limite del quoziente, la dimostrazione della quale lasciamo per esercizio al lettore.

Teorema 12. *Se* a_n *e* b_n *sono due successioni convergenti e tali che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p \quad , \quad \lim_{n\to\infty} b_n = s \neq 0 \ ,$$

e se vale

$$b_n \neq 0 \ , \ \text{per ogni intero} \quad n \ ,$$

allora la successione $\frac{a_n}{b_n}$ *è convergente e vale*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{p}{s} \ .$$

Conclusa così la rassegna del comportamento dell'operazione di limite rispetto alle operazioni algebriche, facciamo alcune considerazioni relative al comportamento dell'operazione di limite rispetto all'ordinamento dei numeri reali.

Teorema 13. *Siano* a_n *e* b_n *due successioni convergenti di numeri reali e sia*

$$a_n \leq b_n \quad \text{per ogni} \quad n \ .$$

Allora vale

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Dimostrazione. Posto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s \ , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = p \ ,$$

supponiamo per assurdo che $s > p$. Allora $\frac{s-p}{2}$ è positivo e quindi esiste ν' tale che

$$s - \frac{s-p}{2} < a_n < s + \frac{s-p}{2} \ , \ \text{per ogni} \quad n > \nu' \ ,$$

ed esiste ν'' tale che

$$p - \frac{s-p}{2} < b_n < p + \frac{s-p}{2} \ , \ \text{per ogni} \quad n > \nu'' \ .$$

Posto $\nu = \max(\nu' \ , \ \nu'')$ avremo allora

$$32) \quad a_n > s - \frac{s-p}{2} \ , \quad b_n < p + \frac{s-p}{2} \ , \ \text{per ogni} \quad n > \nu,$$

ma poichè $s - \frac{s-p}{2} = \frac{s+p}{2} = p + \frac{s-p}{2}$, dalla (32) si ricava

$$a_n > b_n \ , \quad \text{per ogni} \quad n > \nu \ .$$

Ma poichè per ipotesi si ha che

$$a_n \leq b_n \ , \quad \text{per ogni intero} \quad n \ ,$$

abbiamo un assurdo. E quindi non potendo essere $s > p$ dovrà essere $s \leq p$.

c.v.d.

Osservazione. Se a_h e b_h sono convergenti e se per ogni h vale

$$a_h < b_h ,$$

non è detto che debba essere

$$\lim_{h\to\infty} a_h < \lim_{h\to\infty} b_h ,$$

può anche verificarsi

$$\lim_{h\to\infty} a_h = \lim_{h\to\infty} b_h .$$

Per rendersi conto di questo basta considerare le successioni $a_h = -\frac{1}{h}$ e $b_h = \frac{1}{h}$.

Una semplice conseguenza del Teorema 13 è la seguente

Osservazione. Se a_h è una successione di numeri reali convergente e se vale

$$m \leq a_h \leq t , \quad \text{per ogni intero } h ,$$

allora vale anche

$$m \leq \lim_{h\to\infty} a_h \leq t .$$

Di notevole utilità nel calcolo dei limiti è la seguente osservazione la cui verifica lasciamo al lettore:

Osservazione. Se a_n e b_n sono due successioni di numeri reali e se esiste un indice ν tale che

$$a_n = b_n , \quad \text{per ogni } n > \nu ,$$

allora la successione a_n converge se e solo se converge la successione b_n e in tal caso le due successioni hanno

lo stesso limite.

9. SUCCESSIONI MONOTONE .

Una successione a_n dicesi crescente se vale

$$a_n < a_{n+1} , \quad \text{per ogni intero } n ,$$

si dice decrescente se vale

$$a_n > a_{n+1} , \quad \text{per ogni intero } n ,$$

si dice non decrescente se vale

$$a_n \leq a_{n+1} , \quad \text{per ogni intero } n ,$$

e si dice infine non crescente se vale

$$a_n \geq a_{n+1} , \quad \text{per ogni intero } n .$$

Definizione 9. *Dicesi monotona una successione che sia crescente, o decrescente, o non decrescente o non crescente.*

A proposito delle successioni monotone vale il seguente

Teorema 14. *Ogni successione monotona e limitata è convergente.*

Dimostrazione. Supponiamo che a_n sia una successione limitata, cioé esista un numero positivo M tale che

33) $\quad |a_n| < M , \quad \text{per ogni intero } n .$

Supponiamo poi che a_n sia crescente (facciamo la dimostrazione solo in questo caso lasciando al lettore l'adattamento agli altri casi). Vale quindi

34) $a_n < a_{n+1}$, per ogni intero n .

Dalla (33) segue ovviamente che

35) $a_n < M$, per ogni intero n ,

ed allora l'insieme $a(N) = \{a_n ; n \in N\}$ è superiormente limitato e quindi esiste il suo estremo superiore che indichiamo con s . Dalle proprietà dell'estremo superiore si ricavano le

36) $a_n \leq s$, per ogni intero n ,

e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che

37) $a_{n_\varepsilon} > s - \varepsilon$.

Dalla (37) e (34) segue allora che vale

38) $a_n > s - \varepsilon$, per ogni $n > n_\varepsilon$.

Quindi dalle (36) e (38) segue che vale

$$s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon \ , \quad \text{per ogni} \quad n > n_\varepsilon \ .$$

Poichè n_ε può determinarsi per ogni $\varepsilon > 0$ ne risulta che a_n è convergente e vale

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s = \sup a(N) \ .$$

c.v.d.

10. SUCCESSIONI ESTRATTE.

Definizione 10. *Diremo che una successione* b_n *è estrat*

ta da una successione a_n *se esiste una successione crescente* c_n *di interi positivi tale che valga*

$$b_n = a_{c_n} \ , \quad \text{per ogni intero} \quad n \ .$$

Esempio. La successione costante $b_n = 1$ è estratta dalla successione $a_n = (-1)^n$, basta infatti prendere

$$c_n = 2n$$

per avere

$$b_n = (-1)^{2n} = 1 \ , \quad \text{per ogni intero} \quad n \ .$$

Anche la successione costante $b'_n = -1$ è estratta dalla successione $a_n = (-1)^n$. In tal caso basta prendere

$$c'_n = 2n+1$$

per avere

$$b'_n = (-1)^{2n+1} = -1 \ , \quad \text{per ogni intero} \quad n \ .$$

Per le successioni estratte valgono due teoremi, uno facile e uno difficile. Del primo daremo la dimostrazione, mentre del secondo daremo solo l'enunciato.

Teorema 15. *Se* a_n *è una successione convergente e se*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s \ ,$$

allora ogni successione b_n *estratta dalla* a_n *è convergente e vale*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = s \ .$$

Dimostrazione. Poichè a_n converge verso s , avremo che per ogni $\varepsilon > 0$ può determinarsi ν in modo che

39) $$|a_n - s| < \varepsilon \text{ , per ogni } n > \nu \text{ .}$$

Poichè b_n è estratta da a_n esisterà una successione crescente di interi positivi c_n tale che

40) $$a_{c_n} = b_n \text{ , per ogni intero } n \text{ .}$$

Poichè c_n è una successione di interi positivi crescente avremo ovviamente che

$$c_n \geqslant n \text{ , per ogni intero } n \text{ ,}$$

e quindi si avrà

41) $$c_n > \nu \text{ , per ogni intero } n > \nu \text{ .}$$

Dalle (41), (40) e (39) si avrà allora

$$|b_n - s| = |a_{c_n} - s| < \varepsilon \text{ , per ogni intero } n > \nu \text{ .}$$

c.v.d.

Teorema 16. *Da ogni successione limitata si possono estrarre successioni convergenti.*

Esempio. Dalla successione $(-1)^n$ che è limitata ma non convergente si possono estrarre le successioni costanti eguali a 1 e a -1 che sono evidentemente convergenti a 1 e -1 rispettivamente.

CAPITOLO II

FUNZIONI CONTINUE

1. CHIUSURA DI UN INSIEME DI NUMERI REALI.

Definizione 1. *Sia* $E \subset R$, *chiameremo chiusura di* E *l'insieme che indicheremo con* $\bar{E}$ *e che è definito da*

$$\bar{E} = \{x; \text{ per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } y \in E \text{ tale che } |y-x|<\varepsilon\}$$

Osservazione. In generale $E \subset \bar{E}$ ma può anche verificarsi che $E = \bar{E}$.

Nel caso in cui un insieme E sia eguale alla sua chiusura diremo che l'insieme E è chiuso.

Un'altra osservazione banale relativa alla chiusura di un insieme è: $E \subset F$ implica $\bar{E} \subset \bar{F}$.

Esempio. Se $E = \{x;\ 1 < x < 4\}$ allora $\bar{E} = \{x;\ 1 \leqslant x \leqslant 4\}$, e quindi $E \neq \bar{E}$.

Se invece $E = \{x;\ 2 \leqslant x \leqslant 3\}$ allora $\bar{E} = \{x;\ 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

e quindi $E = \bar{E}$, cioé E è chiuso.

Fra il concetto di chiusura di un insieme e quello di limite di una successione esiste un interessante collegamento dato dal seguente

Teorema 1. *Se* E *è un insieme di numeri reali, perchè* $x \in \bar{E}$ *occorre e basta che esista una successione* y_n *di elementi di* E *tale che*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x .$$

Dimostrazione. La condizione è necessaria: cioé se $x \in \bar{E}$ allora esiste una successione y_n tale che

$$y_n \in E \quad \text{per ogni} \quad n , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = x .$$

Infatti se $x \in \bar{E}$ esiste $y_1 \in E$ tale che

$$|y_1 - x| < 1 ,$$

e analogamente esiste $y_2 \in E$ tale che

$$|y_2 - x| < \tfrac{1}{2} .$$

In generale per ogni intero n esiste $y_n \in E$ tale che

$$|y_n - x| < \frac{1}{n} .$$

Allora la successione y_n , che così si può costruire è tale che

$$y_n \in E \quad \text{per ogni} \quad n , \quad e \quad \lim_{n\to\infty} y_n = x .$$

La condizione è sufficiente: cioé supposto che esista una successione y_n tale che

$$y_n \in E \quad \text{per ogni} \quad n , \quad e \quad \lim_{n\to\infty} y_n = x ,$$

si tratta di provare che $x \in \bar{E}$. Per questo fissato $\varepsilon>0$, per la definizione di limite esisterà ν tale che

$$|y_n - x| < \varepsilon , \quad \text{per} \quad n > \nu ,$$

e quindi è verificata la condizione richiesta perchè $x \in \bar{E}$

c.v.d.

2. LIMITE DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO .

Sia f una funzione definita su un insieme $E \subset R$ e a valori reali.

Sia $\bar{x} \in \bar{E}$ e sia $p \in R$. Consideriamo le due proprietà seguenti:

I) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che: per ogni $x \in E$ verificante $|x - \bar{x}| < \delta$ si ha $|f(x)-p| < \varepsilon$.

II) Per ogni successione x_n tale che $x_n \in E$ per ogni n, e $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = p .$$

Vale allora il seguente

Teorema 2 . *Le proprietà* I *e* II *sono equivalenti.*

Dimostrazione. Supponiamo che sia vera la I e dimostriamo allora che vale anche la II .

Sia x_n una successione tale che

$$x_n \in E \quad \text{per ogni } n\,, \quad e \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ determiniamo $\delta > 0$ in modo che

1) $|f(x)-p| < \varepsilon$, per ogni $x \in E$ tale che $|x-\bar{x}|<\delta$

e ciò è possibile proprio perchè vale la I . D'altra parte poichè $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ e δ è un numero positivo esiste ν tale che

2) $$|x_n - \bar{x}| < \delta\,, \quad \text{per ogni} \quad n > \nu\,.$$

Dalle (1) e (2) segue allora che

$$|f(x_n) - p| < \varepsilon\,, \quad \text{per ogni} \quad n > \nu\,,$$

e quindi è dimostrato che vale

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = p\,.$$

Supponiamo ora che la II sia vera e proviamo che allora anche la I è vera. Procediamo per assurdo. Cioé ammesso che la II sia vera e che la I sia falsa facciamo vedere che si arriva ad una contraddizione. Per questo esplicitiamo la proprietà contraria della I , essa è

I°) esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si può trovare un $x \in E$ con

$$|x - \bar{x}| < \delta\,, \quad |f(x) - p| \geq \varepsilon\,.$$

Prendendo $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, 1/n, \ldots$ dalla I° si ha che può trovarsi una successione x_n con $x_n \in E$ per ogni n e

$$|x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n}\,, \quad |f(x_n) - p| \geq \varepsilon\,.$$

La successione x_n avrà allora limite $\bar{x}$ e quindi per la II deve essere

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = p\,,$$

ma questo è in contraddizione con il fatto che vale

$$|f(x_n) - p| \geq \varepsilon\,, \quad \text{per ogni} \quad n\,.$$

c.v.d.

Poniamo allora la seguente

Definizione 2. *Se per una funzione* $f : E \to R$ *con* $E \subset R$, *per un punto* $\bar{x} \in \bar{E}$ *e un numero reale* p *valgono le* I *e* II , *allora si dice che la funzione* f *ha per limite* p *quando* x *tende a* $\bar{x}$ *su* E *e si scrive*

3) $$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) \ (\text{su } E) = p\,.$$

La relazione (3) si può anche leggere: $f(x)$ converge verso p quando x tende a $\bar{x}$ su E .

Dalla proprietà II si capisce come il comportamento del limite delle funzioni rispetto alle operazioni algebriche debba essere analogo a quello del limite delle successioni. Per esempio dimostriamo il

Teorema 3. *Se* f *e* g *sono due funzioni a valori reali definite su un insieme* $E \subset R$, *se per* $\bar{x} \in \bar{E}$ *vale*

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) \text{ (su } E) = p \ , \quad \lim_{x\to\bar{x}} g(x) \text{ (su } E) = q \ ,$$

allora anche la funzione f+g *ha limite per* x *tendente a* $\bar{x}$ *su* E *ed è*

$$\lim_{x\to\bar{x}} \left(f(x) + g(x)\right) \text{ (su } E) = p + q \ .$$

Dimostrazione. Sia x_n una successione di numeri reali tale che

$$x_n \in E \ , \quad \text{per ogni} \quad n \ , \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \ .$$

Avremo allora che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = p \quad , \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = q \ ,$$

e quindi, per la proprietà del limite della somma di due successioni si ha

$$4) \quad \lim_{n\to\infty} \left(f(x_n) + g(x_n)\right) = p + q \ .$$

Poichè la (4) vale per ogni successione x_n di punti di E convergente verso $\bar{x}$, risulta verificata la proprietà II e quindi la funzione f+g converge verso p+q quando x tende a $\bar{x}$ su E .

c.v.d.

Nello stesso modo si possono dimostrare le relazioni

$$\lim_{x\to\bar{x}} \left(f(x) - g(x)\right) \text{ (su } E) = p - q$$

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)\, g(x) \quad \text{(su } E) = pq$$

e se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$, e $q \neq 0$

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q} \ .$$

Vale ancora, analogamente a quanto avveniva per il limite delle successioni, il seguente

Teorema 4. *Se* f *e* g *sono due funzioni a valori reali definite su* $E \subset R$. *Se* g *è limitata, cioé se esiste un numero positivo* M *tale che*

$$|g(x)| < M \ , \quad \textit{per ogni} \quad x \in E \ ,$$

e se per $\bar{x} \in \bar{E}$ *è*

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) \text{ (su } E) = 0 \ ,$$

allora vale

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)\, g(x) \text{ (su } E) = 0 \ .$$

Dimostrazione. Si usi lo stesso procedimento seguito per provare il Teorema 3 e si ricordi che vale il teorema analogo per le successioni (Teorema 8, Cap. I).

c.v.d.

Per il limite di una funzione si hanno poi altre proprietà che non sono state considerate nel caso del limite di una successione.

Teorema 5. *Sia* f *una funzione reale definita su* $E \subset R$, *e per* $\bar{x} \in \bar{E}$ *e* $p \in R$ *sia*

5) $$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) \quad (\text{su } E) = p$$

Allora se $L \subset E$ *è tale che* $\bar{x} \in \bar{L}$ *si ha anche*

$$\lim_{x \to x} f(x) \quad (\text{su } L) = p .$$

Dimostrazione. Verifichiamo la proprietà II. Per questo sia x_n una successione di punti di L convergente verso $\bar{x}$. Allora poichè $L \subset E$ si ha che la x_n è anche una successione di punti di E e quindi dalla ipotesi (5) si ha

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = p .$$

c.v.d.

Teorema 6. *Se* f *è una funzione reale definita su* $E \subset R$ *e* $\bar{x} \in \bar{E}$, *allora se per* $t > 0$ *si pone*

$$L = \{x \; ; \; x \in E \; , \; |x - \bar{x}| < t\} ,$$

si ha che il limite di f *su* E *per* x *tendente a* $\bar{x}$ *esiste se e solo se esiste il limite di* f *su* L *per* x *tendente a* $\bar{x}$.

Dimostrazione. Conviene verificare la proprietà I.

Avendo già provato il Teorema 5 basta, per dimostrare il Teorema 6, verificare che esiste il

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) \quad (\text{su } L)$$

allora esiste anche

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) \quad (\text{su } E) .$$

Per questo, posto

$$\lim_{x \to x} f(x) \; (\text{su } L) = p ,$$

per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo determinare $\delta > 0$ in modo che

6) $$|f(x) - p| < \varepsilon , \quad \text{se} \quad |x - \bar{x}| < \delta \quad \text{e} \quad x \in L .$$

Posto allora $\delta' = \min(\delta, t)$ avremo che

$$|x - \bar{x}| < \delta' \quad \text{e} \quad x \in E$$

implica

$$|x - \bar{x}| < \delta \quad \text{e} \quad x \in L ,$$

per cui dalla (6) si ricava

$$|f(x) - p| < \varepsilon , \quad \text{se} \quad |x - \bar{x}| < \delta' \quad \text{e} \quad x \in E .$$

c.v.d.

Teorema 7. *Se* f *è una funzione reale definita su* $E \cup L \subset R$. *Se* $\bar{x} \in \bar{E} \wedge \bar{L}$ *e se vale*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) \; (\text{su } E) = \lim_{x \to \bar{x}} f(x) \; (\text{su } L) = p ,$$

allora si ha anche

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) \; (\text{su } E \vee L) = p .$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo determinare $\delta' > 0$ in modo che

$$|f(x) - p| < \varepsilon , \quad \text{se} \quad |x - \bar{x}| < \delta' \quad \text{e} \quad x \in E ,$$

e possiamo determinare $\delta'' > 0$ in modo che

$$|f(x) - p| < \varepsilon, \quad \text{se} \quad |x - \bar{x}| < \delta'' \quad \text{e} \quad x \in L .$$

Posto allora $\delta = \min(\delta', \delta'')$ si ha che

$$|x - \bar{x}| < \delta, \quad x \in E \cup L$$

implica almeno una delle situazioni seguenti

a) $\quad |x - \bar{x}| < \delta', \quad x \in E,$

b) $\quad |x - \bar{x}| < \delta'', \quad x \in L,$

e quindi in ogni caso vale

$$|f(x) - p| < \varepsilon, \quad \text{se} \quad |x - \bar{x}| < \delta \quad \text{e} \quad x \in E \cup L .$$

c.v.d.

Proviamo infine la regola di calcolo riguardante il limite delle funzioni composte.

Teorema 8. *Sia* f *una funzione reale definita su* $E \subset R$ *e* g *una funzione reale definita su* $L \supset f(E)$. *Per* $\bar{x} \in \bar{E}$ *sia*

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) \ (\text{su } E) = p, \quad \lim_{y \to p} g(y) \ (\text{su } L) = q .$$

Allora esiste il limite della funzione composta $g(f(x))$ *per* x *tendente a* $\bar{x}$ *su* E *e si ha*

$$\lim_{x \to \bar{x}} g(f(x)) \ (\text{su } E) = q .$$

Dimostrazione. Sia x_n una successione di punti di E convergente verso $\bar{x}$. Avremo allora che $f(x_n)$ è una successione di punti di L convergente verso p e quindi $g(f(x_n))$ convergerà verso q. Poichè questo vale per ogni successione di punti di x_n di E convergente verso $\bar{x}$ risulta verificata la proprietà II.

c.v.d.

3. FUNZIONI MONOTONE.

Una funzione f definita su un insieme $E \subset R$ e a valori in R dicesi:

crescente: se per ogni coppia x', x'' di punti di E con $x' < x''$ si ha

$$f(x') < f(x''),$$

decrescente: se per ogni coppia x', x'' di punti di E, con $x' < x''$, si ha

$$f(x') > f(x''),$$

non decrescente: se per ogni coppia di punti x', x'' di E, con $x' < x''$ si ha

$$f(x') \leq f(x''),$$

non crescente: se per ogni coppia di punti x', x'' di E, con $x' < x''$, si ha

$$f(x') \geq f(x'') .$$

Poniamo allora la seguente

Definizione 3. *Dicesi monotona una funzione reale di varia* *bile reale che sia crescente o decrescente o non crescente o non decrescente.*

A proposito delle funzioni monotone vale il seguente

Teorema 9. *Sia* f *una funzione reale definita su* $E \subset R$. *Gli insiemi* E *ed* f(E) *siano superiormente limitati e sia* $x_0 = \sup E$, $\lambda = \sup f(E)$. *La funzione* f *sia crescente e il punto* x_0 *non appartenga a* E , *allora si ha*

7) $$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ (su E)} = \lambda .$$

Dimostrazione. Poichè λ è l'estremo superiore dell'insieme f(E) avremo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto $x_\varepsilon \in E$ tale che

8) $$f(x_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon .$$

Poichè $x_\varepsilon \in E$ mentre per ipotesi $x_0 \notin E$, si avrà che $x_0 \neq x_\varepsilon$ e quindi se si pone

$$\delta = x_0 - x_\varepsilon$$

ricordando che $x_0 = \sup E$, si ha $\delta > 0$. Fissato δ in tale modo, per ogni $x \in E$ che verifichi

9) $$|x - x_0| < \delta$$

si ha necessariamente

$$x > x_0 - \delta = x_\varepsilon ,$$

e quindi essendo f crescente, si ha

10) $$f(x) > f(x_\varepsilon) .$$

Dalle (8) e (10) si ricava allora, per ogni $x \in E$ che verifichi la (9),

11) $$f(x) > \lambda - \varepsilon ,$$

ma essendo $\lambda = \sup f(E)$ si ha anche

12) $$f(x) \leq \lambda .$$

Dalle (11) e (12) segue allora

$$\lambda - \varepsilon < f(x) \leq \lambda < \lambda + \varepsilon .$$

c.v.d.

Osservazione. La relazione (7) vale anche negli altri casi che qui elenchiamo e che lasciamo al lettore da verificare

a) $x_0 = \sup E$, $\lambda = \sup f(E)$, f non decrescente

b) $x_0 = \sup E$, $\lambda = \inf f(E)$, f decrescente o non crescente

c) $x_0 = \inf E$, $\lambda = \inf f(E)$, f crescente o non decrescente

d) $x_0 = \inf E$, $\lambda = \sup f(E)$, f decrescente o non crescente.

4. FUNZIONI CONTINUE

Definizione 4. *Una funzione reale* f *definita su un insieme* $E \subset R$ *dicesi continua in un punto* $x_0 \in E$ *se vale*

$$13) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) \ (\text{su } E) = f(x_0) .$$

Osservazione. Se x_0 è un punto isolato di E , cioè se esiste $t > 0$ tale che $\{x;\ x \in E, |x-x_0| < t\} = \{x_0\}$, allora la eguaglianza (13) si riduce, grazie al Teorema 6, alla identità

$$14) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) \ (\text{su } \{x_0\}) = f(x_0) ,$$

che è vera per ogni funzione f .

Se x_0 non è un punto isolato di E , cioè se x_0 appartiene alla chiusura di $E - \{x_0\}$, allora la (13) è equivalente alla relazione

$$15) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) \ (\text{su } E - \{x_0\}) = f(x_0) .$$

Infatti la (15) è conseguenza della (13), grazie al Teorema 5, mentre viceversa dalla (15) e dalla (14), che è sempre valida, segue la (13) se si tiene conto del Teorema 7.

Definizione 5. *Una funzione reale* f *definita su un insieme* $E \subseteq R$ *dicesi continua su* E *se è continua in ogni punto di* E.

Dalle proprietà del limite di una funzione in un punto si ricava: se f e g sono funzioni reali definite e continue su $E \subset R$, allora le funzioni $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sono definite e continue su E . Se in più $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$, allora è definita e continua su E la funzione f/g .

Possiamo allora dare alcuni esempi di funzioni reali e continue.

Esempi.

a) funzioni $f : R \to R$.

aa) le funzioni costanti,

ab) le funzioni $f(x) = x^n$, per ogni intero n positivo,

ac) i polinomi, cioè le funzioni del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n ,$$

dove gli $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ sono numeri reali fissati.

b) le funzioni $f : E \to R$ del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi ed

$$E = \{x ;\ x \in R ,\ Q(x) \neq 0\} .$$

Osservazione. Se a e b sono due numeri reali con $a<b$ l'insieme $\{x ;\ x \in R ,\ a \leqslant x \leqslant b\}$ verrà detto interval

lo chiuso di estremi a e b e verrà indicato col simbolo (a, b). Le considerazioni che ora faremo sulla continuità delle funzioni reali riguardano funzioni definite su intervalli chiusi. I risultati che otterremo saranno adattabili anche a funzioni definite su R o su semirette di R, in quanto queste funzioni sono continue se e solo se risultano continue le loro restrizioni ad un qualunque intervallo chiuso contenuto nel loro insieme di definizione.

Introduciamo per comodità alcune notazioni abbreviate. Se $T = (a, b)$ è un intervallo chiuso, per ogni $t \in T$ che sia diverso da b scriveremo

$$\lim_{x \to t+} f(x)$$

per indicare il

$$\lim_{x \to t} f(x) \ (\text{su } \{x \ ; \ x \in T \ , \ x > t\}) \ .$$

Scriveremo poi, per ogni $t \in T$ che sia diverso da a,

$$\lim_{x \to t-} f(x)$$

per indicare il

$$\lim_{x \to t} f(x) \ (\text{su } \{x \ ; \ x \in T \ , \ x < t\}) \ .$$

Un criterio di continuità, che sarà molto utile per verificare la continuità di alcune funzioni di uso corrente, è dato dal seguente

Teorema 10. *Sia* f *una funzione reale definita su un intervallo* $T = (a, b)$ *e sia crescente. Se* f *assume tutti*

i valori compresi fra $f(a)$ *e* $f(b)$ *allora* f *è continua su* T.

Dimostrazione. Ricordando la definizione di continuità e il Teorema 7, la dimostrazione del teorema consiste nella verifica delle eguaglianze

$$16) \quad \lim_{x \to t+} f(x) = f(t) \ , \quad \text{per ogni} \quad t \in T - \{b\} \ ,$$

$$17) \quad \lim_{x \to t-} f(x) = f(t) \ , \quad \text{per ogni} \quad t \in T - \{a\} \ .$$

Verificheremo solo la (17) poichè la verifica della (16) può farsi allo stesso modo. Fissato $t \in T - \{a\}$ per definizione è

$$18) \quad \lim_{x \to t-} f(x) = \lim_{x \to t} f(x) \ (\text{su } \{x \ ; \ a \leqslant x < t\}) \ ,$$

e poichè f è crescente, ricordando il Teorema 9, si ha che il $\lim_{x \to t-} f(x)$ esiste ed è

$$19) \quad \lim_{x \ t-} f(x) = \sup \{f(x) \ ; \ a \leqslant x < t\} \leqslant f(t) \ .$$

Basta ora provare che è assurdo che si verifichi

$$20) \quad \sup\{f(x) \ ; \ a \leqslant x < t\} < f(t) \ .$$

Se infatti valesse la (20) esisterebbe $\lambda \in R$ tale che

$$21) \quad \sup\{f(x) \ ; \ a \leqslant x < t\} < \lambda < f(t) \ .$$

Un tale λ sarebbe allora evidentemente compreso fra $f(a)$ e $f(b)$ ma non può essere un valore assunto dalla funzio ne f. Infatti la $f(x)$ assume valori minori di λ per $a \leqslant x < t$ mentre assume valori maggiori o uguali a $f(t)$, e quindi maggiori di λ, per $t \leqslant x \leqslant b$. Questo è in contraddizione con l'ipotesi fatta su f e quindi è provato che si ottiene un assurdo se si pone che valga la (20).

c.v.d.

Due proprietà fondamentali delle funzioni reali definite e continue su un intervallo chiuso sono espresse dai due teoremi seguenti.

Teorema 11. *Sia f una funzione reale definita e continua su un intervallo chiuso $T = (a, b)$. Allora l'insieme $f(T)$ è limitato ed è dotato di elemento massimo e di elemento minimo.*

Dimostrazione. Cominciamo col provare che $f(T)$ è superiormente limitato. Supponiamo per assurdo che $f(T)$ non sia superiormente limitato. Allora per ogni intero positivo n deve esistere almeno un punto $x_n \in T$ tale che

22) $$f(x_n) > n .$$

La successione x_n essendo costituita di punti di T è limitata e quindi da essa può estrarsi una successione $y_n = x_{h_n}$ convergente. Essendo T un insieme chiuso y_n convergerà verso un punto $y \in T$, e quindi per l'ipotesi di continuità fatta su f avremo

23) $$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y) .$$

D'altra parte per ogni intero positivo n dovendo essere $h_n \geqslant n$ si ha, dalla (22)

24) $$f(y_n) = f(x_{h_n}) > h_n \geqslant n .$$

Le eguaglianze (23) e (24) essendo incompatibili, si deve dedurre che è assurdo supporre che $f(T)$ non sia superiormente limitato.

In maniera analoga si prova che $f(T)$ è inferiormente limitato.

Verifichiamo ora che $f(T)$ è dotato di elemento massimo. Essendo $f(T)$ superiormente limitato esisterà il suo estremo superiore che indichiamo con M. Per la definizione di estremo superiore avremo che per ogni intero positivo n esisterà un punto almeno $x'_n \in T$ tale che

25) $$f(x'_n) > M - \frac{1}{n} .$$

La successione x'_n essendo costituita di punti di T, è limitata e quindi si può estrarre da essa una successione $y'_n = x'_{h_n}$ convergente.

Essendo T chiuso la y'_n deve convergere verso un punto $y' \in T$, e quindi per l'ipotesi di continuità fatta su f si avrà

26) $$\lim_{n\to\infty} f(y'_n) = f(y') .$$

D'altra parte per ogni n si deve avere, per la (25),

$$f(y'_n) = f(x'_{h_n}) > M - \frac{1}{h_n} \geqslant M - \frac{1}{n},$$

e quindi si ha

27) $$f(y') \geqslant M ,$$

Ma poichè M è l'estremo superiore dei valori di f, dalla (27) si ha $f(y') = M$.

Analogamente si prova che $f(T)$ ha elemento minimo.

c.v.d.

Osservazione. Il Teorema 11 non vale se l'intervallo T che si considera non è chiuso. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

considerata sull'insieme $\{x ; 0 < x < 1\}$ risulta continua, ma essa non è superiormente limitata, e, pur essendo inferiormente limitata, l'insieme dei suoi valori non ha elemento minimo.

Teorema 12. *Sia f una funzione reale definita e continua su un intervallo chiuso $T = (a, b)$. Allora f assume tutti i valori compresi fra il suo valore minimo e il suo valore massimo.*

Dimostrazione. Indichiamo con m e M i valori minimo e massimo della f, che esistono per il Teorema 11. Nel caso in cui $m = M$ non vi sono valori compresi fra il minimo

e il massimo di f e quindi non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo perciò che sia $m < M$. Indichiamo allora con c e d due punti di T tali che valga

28) $$f(c) = m , \quad f(d) = M .$$

Supponiamo poi per esempio che sia $c < d$ (il caso $c > d$ si tratta allo stesso modo), e facciamo vedere che per ogni numero reale y che verifichi

29) $$m < y < M$$

esiste un numero ξ appartenente all'intervallo (c, d) tale che

30) $$f(\xi) = y .$$

Per provare ciò, fissato y, indichiamo con E l'insieme $\{x ; c \leqslant x \leqslant d , f(x) < y\}$. L'insieme E non è vuoto perchè $c \in E$ ed è superiormente limitato da d. Quindi esso avrà un estremo superiore, che indichiamo con ξ. Per la definizione di estremo superiore si avrà, per ogni intero positivo n, l'esistenza di un punto $x_n \in E$ tale che

31) $$\xi - \frac{1}{n} < x_n \leqslant \xi .$$

Allora la successione x_n risulterà convergente verso ξ, e per la continuità di f si avrà

32) $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi) .$$

Poichè per ogni n il punto $x_n \in E$ si ha, per la definizione di E,

$$33) \qquad f(x_n) < y ,$$

ed allora dalla (32) e (33) si ricava

$$34) \qquad f(\xi) \leqslant y .$$

Essendo poi $y < M$ dalla (34) si ricava $f(\xi) < M$ e quindi $\xi < d$.

Possiamo allora scrivere anche, ricordando che f è continua,

$$35) \qquad f(\xi) = \lim_{x \to \xi} f(x) \ (\text{su } \{x; \ \xi < x \leqslant d\}) ,$$

ma poichè vale, per la definizione di E,

$$36) \qquad f(x) \geqslant y , \quad \text{per } \xi < x \leqslant d ,$$

dalle (35) e (36) si ricava

$$37) \qquad f(\xi) \geqslant y .$$

Dalle (37) e (34) segue allora la (30).

c.v.d.

Il teorema ora dimostrato ha importanza pratica,oltre ad una notevole importanza teorica. Un esempio di applicazione pratica di esso è il seguente

Esempio. Risoluzione approssimata delle equazioni algebriche.

Consideriamo l'equazione algebrica

$$38) \qquad P(x) = x^5 + x - 7 = 0 ,$$

di cui vogliamo calcolare una soluzione approssimata a meno di $1/10$.

Poichè vale

$$P(1) = -5 < 0 , \quad P(2) = 27 > 0 ,$$

il Teorema 12 assicura l'esistenza di un punto compreso fra i numeri 1 e 2 nel quale il polinomio $P(x)$ si annulla.

Suddiviso l'intervallo $(1, 2)$ in cinque parti di ampiezza $2/10$ si trova che il polinomio $P(x)$ ha valore negativo nel punto $1,4$ e valore positivo nel punto $1,6$. Il Teorema 12 assicura allora l'esistenza di una soluzione dell'equazione (38) compresa fra i numeri $1,4$ e $1,6$, e quindi il numero $1,5$ rappresenta sicuramente un valore approssimato a meno di $1/10$ di una soluzione dell'equazione (38).

Utilizzando il Teorema 10 possiamo dimostrare che la inversa di una funzione continua definita in un intervallo chiuso, quando esiste, è anch'essa una funzione continua. Prima di fare ciò, vediamo in quali casi una funzione reale definita e continua su un intervallo chiuso è invertibile.

Teorema 13. *Sia* f *una funzione reale definita e continua su un intervallo chiuso* (a, b) . *Se* f *è invertibile allora necessariamente* f *è crescente o decrescente.*

Dimostrazione. Siccome f è invertibile deve essere $f(a) \neq f(b)$. Supponiamo ad esempio che sia $f(a) < f(b)$ e facciamo vedere che in tal caso f deve essere crescente.

Sia x_1 un qualunque punto interno all'intervallo (a, b) , cioé sia

$$a < x_1 < b .$$

Essendo f invertibile deve essere $f(x_1) \neq f(a)$, $f(x_1) \neq f(b)$, quindi per $f(x_1)$ si danno le tre possibilità seguenti

$$f(x_1) < f(a) , \quad f(x_1) > f(b) , \quad f(a) < f(x_1) < f(b) .$$

Le prime due sono da escludersi. Infatti se fosse

$$f(x_1) < f(a) ,$$

poichè è $f(a) < f(b)$, nell'intervallo (x_1, b) dovrebbe esserci, per il Teorema 12, un punto ξ tale che

$$f(\xi) = f(a) .$$

Poichè f è invertibile dovrebbe allora essere $\xi=a$, ma questo non può essere essendo $\xi \geqslant x_1 > a$. Questo è assurdo, cioé è assurdo che sia $f(x_1) < f(a)$. Analogamente si esclude l'eventualità $f(x_1) > f(b)$.

E' così provato che deve essere

$$f(a) < f(x_1) < f(b) .$$

Se ora x_2 è un qualunque punto interno all'intervallo (x_1, b) , ragionando allo stesso modo si prova che deve essere

$$f(x_1) < f(x_2) < f(b) .$$

Risulta così verificato in particolare che: per ogni coppia di punti x_1, x_2 appartenenti all'intervallo (a,b), con $x_1 < x_2$, si ha

$$f(x_1) < f(x_2) ,$$

quindi la f è crescente.

Allo stesso modo si prova che se $f(a) > f(b)$ allora la f è decrescente.

c.v.d.

Possiamo ora provare il

Teorema 14. *Sia* f *una funzione reale definita e continua su un intervallo chiuso* (a, b). *Se* f *è invertibile allora la funzione inversa è continua.*

Dimostrazione. Per il Teorema 13 la f risulta necessariamente crescente o decrescente. Consideriamo il caso in cui la f sia crescente, l'altro potendosi trattare allo stesso modo.

Essendo f crescente, f(b) è il valore massimo e

$f(a)$ il valore minimo di $f(x)$ sull'intervallo (a, b). Quindi, poichè f è continua per il Teorema 12, l'insieme dei valori di f è costituito dall'intervallo chiuso (c,d), dove $c = f(a)$ e $d = f(b)$. La funzione g inversa della f è allora definita sull'intervallo (c, d) ed ha come insieme di valori l'intervallo (a, b).

Da questo fatto e dal fatto che la g è anch'essa crescente, ricordando il Teorema 10, si ricava che la g è continua.

c.v.d.

Un esempio di applicazione del Teorema 14 è il seguente

Esempio. La funzione $f(x) = x^n$, per ogni intero n positivo fissato, è una funzione definita e continua su tutto l'insieme R dei numeri reali.

Quando si consideri la restrizione di $f(x) = x^n$ all'insieme $E = \{x;\ x \in R,\ x \geqslant 0\}$ si ottiene una funzione crescente, infatti

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}\, x_1 + \dots + x_1^{n-1}),$$

e quindi se la coppia di numeri x_1, x_2 è tale che

$$0 \leqslant x_1 < x_2,$$

allora sicuramente si ha

$$x_1^n < x_2^n.$$

Sempre per ogni intero n positivo, se $f(x) = x^n$ e $E = \{x;\ x \in R,\ x \geqslant 0\}$, si ha $f(E) = E$. Infatti $f(E) \ni 0 = f(0)$, ed $f(E)$ contiene numeri maggiori di ogni intero j, infatti $f(E) \ni j^n \geqslant j$, quindi poichè f è continua si ha che $f(E)$ conterrà ogni intervallo del tipo $(0, j)$ con j intero positivo, cioé $f(E) \supset E$. Ma poichè ovviamente $f(E) \subset E$ ne segue che $f(E) = E$. Allora per ogni intero n positivo la restrizione della funzione $f(x) = x^n$ all'insieme E risulta invertibile e la sua inversa risulta definita nello stesso insieme E, ed ivi è continua e crescente perchè tale è la $f(x) = x^n$. Tale funzione inversa verrà anche indicata col simbolo

$$g(y) = y^{\frac{1}{n}}.$$

Esercizio. Se n ed m sono due numeri interi positivi, se $y^{\frac{1}{n}}$, $y^{\frac{1}{m}}$ e $y^{\frac{1}{n\cdot m}}$ indicano le funzioni inverse delle funzioni x^n, x^m e $x^{n\cdot m}$ ristrette all'insieme dei numeri reali non negativi, si verifichi che vale l'eguaglianza

$$y^{\frac{1}{n\cdot m}} = \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{per ogni } y \in R,\ y \geqslant 0.$$

Osservazione. Se n è intero positivo dispari allora la funzione $f(x) = x^n$ verifica la

$$f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x),$$

da cui si ricava che è crescente in tutto R e $f(R) = R$.

In tale caso la funzione inversa $g(y) = y^{\frac{1}{n}}$ si può definire su tutto R e risulta ancora continua e crescente.

Potenza ad esponente razionale.

Per ogni numero reale $a > 0$ e per ogni numero razionale q poniamo

$$a^q = (a^{\frac{1}{n}})^m \quad , \tag{39}$$

se $q = \frac{m}{n}$, con n intero positivo e m intero relativo.

Nella (39) $a^{\frac{1}{n}}$ sta ad indicare il valore che nel punto a assume la funzione inversa della funzione $f(x)=x^n$.

Perchè la potenza a^q sia univocamente definita dalla eguaglianza (39) occorre verificare che se

$$q = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \, ,$$

con n' intero positivo e m' intero relativo, allora si ha

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n'}})^{m'} \, . \tag{40}$$

Per provare la (40) indichiamo con b il numero reale $a^{\frac{1}{nn'}}$. Per quanto è stato osservato più sopra si ha

$$a^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{nn'}})^{n'} = b^{n'} \quad , \quad a^{\frac{1}{n'}} = (a^{\frac{1}{nn'}})^{n} = b^{n} \, ,$$

quindi

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = b^{n'm} \quad , \quad (a^{\frac{1}{n'}})^{m'} = b^{nm'} \quad , \tag{41}$$

ma poichè vale $mn' = nm'$, dalle (41) segue immediatamente la (40).

Per la potenza ad esponente razionale valgono le stesse proprietà della potenza ad esponente intero. Cioé si ha

i) $a^q a^{q'} = a^{q+q'}$,

ii) $(a^q)^{q'} = a^{qq'}$,

iii) $a^q b^q = (ab)^q$,

iv) $a^{-q} = (a^q)^{-1} = \frac{1}{a^q}$.

Di queste verifichiamo soltanto la (i) lasciando le altre per esercizio al lettore. Fissati a reale positivo, q e q' razionali, siano n intero positivo, m e m' interi relativi tali che

$$q = \frac{m}{n} \quad , \quad q' = \frac{m'}{n} \, .$$

Avremo allora

$$a^q a^{q'} = (a^{\frac{1}{n}})^m (a^{\frac{1}{n}})^{m'} = (a^{\frac{1}{n}})^{m+m'} = a^{\frac{m+m'}{n}} = a^{q+q'} \, .$$

Potenza ad esponente reale.

Lemma 1. *Se $a > 1$ è un numero reale fissato, la funzione*

$$f(z) = \frac{a^z - 1}{z}$$

definita su $Z - \{0\}$ (Z = interi relativi), è crescente.

Dimostrazione. Cominciamo col verificare che $f(z_1) < f(z_2)$ se $0 < z_1 < z_2$. Per questo basta provare che vale

$$42) \quad f(n) < f(n+1) \, , \quad \text{per ogni intero positivo } n \, .$$

Provare la (42) significa verificare

$$43) \quad \frac{a^n - 1}{n} < \frac{a^{n+1} - 1}{n + 1} \, , \quad \text{per ogni intero positivo } n.$$

La (43) è equivalente a

$$(n + 1)(a^n - 1) < n(a^{n+1} - 1) \, ,$$

e quest'ultima è equivalente a

$$44) \quad a^n - 1 < n\, a^n(a - 1) \, .$$

Poichè $a > 1$ e quindi $a - 1 > 0$ si può dividere i due membri della (44) per $a - 1$ ottenendo la diseguaglianza equivalente

$$45) \quad \frac{a^n - 1}{a - 1} < n\, a^n \, .$$

Ricordando che $(a^n - 1) : (a - 1) = a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1$ e che $a > 1$ si ha

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 \leqslant n\, a^{n-1} \, ,$$

e quindi a fortiori la (45).

In maniera analoga si può verificare che $f(z_1) < f(z_2)$ per ogni coppia z_1, z_2 tale che $z_1 < z_2 < 0$. Per provare il lemma basterà allora verificare che $f(-1) < f(1)$, cioè che vale

$$\frac{a^{-1} - 1}{-1} < a - 1 \, ,$$

cioè che $(a - 1):a < a - 1$, la qual cosa è evidente, essendo $a > 1$.

c.v.d.

Lemma 2. *Se* $a > 1$ *è un numero reale fissato la funzione*

$$g(q) = \frac{a^q - 1}{q}$$

definita su $Q - \{0\}$ $(Q =$ *numeri razionali*$)$, *è crescente.*

Dimostrazione. Si tratta di verificare che per ogni coppia q', q'' di numeri razionali diversi da zero e tale che $q' < q''$ si ha $g(q') < g(q'')$. Fissati q' e q'', siano n intero positivo e m', m'' interi relativi tali che

$$q' = \frac{m'}{n} \, , \quad q'' = \frac{m''}{n} \, .$$

Si tratta allora di provare che

$$46) \quad \frac{a^{\frac{m'}{n}} - 1}{\frac{m'}{n}} < \frac{a^{\frac{m''}{n}} - 1}{\frac{m''}{n}}$$

sapendo che $m' < m''$. La (46) è equivalente a

$$47) \quad \frac{(a^{\frac{1}{n}})^{m'} - 1}{m'} < \frac{(a^{\frac{1}{n}})^{m''} - 1}{m''} \, ,$$

e la (47) è di conseguenza del Lemma 1 applicato al numero $a^{\frac{1}{n}} > 1$.

c.v.d.

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 15. *Sia* $a > 1$ *un numero reale fissato. Allora per ogni numero reale* s *esiste il limite*

$$\lim_{q\to s} a^q \quad (\text{su } Q)$$

e tale limite è eguale a a^s *se* $s \in Q$.

Dimostrazione. La funzione $\phi(q) = a^q$ definita sui razionali è crescente e quindi per il Teorema 9 esistono i limiti

$$48)\quad \lim_{q\to s} a^q \ (\text{su } \{q;\ q\in Q,\ q > s\}) = \inf\{a^q;\ q\in Q,\ q>s\};$$

$$49)\quad \lim_{q\to s} a^q \ (\text{su } \{q;\ q\in Q,\ q < s\}) = \sup\{a^q;\ q\in Q,\ q<s\},$$

e si ha

$$50)\quad \sup\{a^q;\ q\in Q,\ q<s\} \leq \inf\{a^q;\ q\in Q,\ q>s\}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio siano q e q' due numeri razionali con

$$q < s < q' .$$

Facciamo vedere che se la differenza $\delta = q' - q$ è scelta in maniera opportuna allora si ha

$$51)\quad a^{q'} - a^q < \varepsilon .$$

Per questo osserviamo che

$$a^{q'} - a^q = a^q(a^{q'-q} - 1) = a^q(a^\delta - 1) .$$

Indicato con n un numero intero maggiore di s si ha, essendo $q < s < n$,

$$52)\quad a^{q'} - a^q < a^n(a^\delta - 1) = a^n \frac{a^\delta - 1}{\delta} \cdot \delta .$$

Se si comincia col prendere $\delta < 1$ dalla (52) e dal Lemma 2 si ricava, essendo $a > 1$,

$$53)\quad a^{q'} - a^q < a^n(a-1)\delta .$$

Dalla (53) si vede allora che perchè valga la (51) basta scegliere $\delta < 1$ e

$$\delta < \frac{\varepsilon}{a^n(a-1)} .$$

Abbiamo quindi visto che per ogni $\varepsilon > 0$ possono trovarsi due numeri razionali $q < s$ e $q' > s$ tali che valga la (51). Tenuto conto della (50) si ha allora

$$(54)\quad \sup\{a^q;\ q\in Q,\ q<s\} = \inf\{a^q;\ q\in Q,\ q>s\}.$$

Se $s \in R - Q$ essendo

$$Q = \{q;\ q\in Q,\ q<s\} \cup \{q;\ q\in Q,\ q>s\} ,$$

dalle (48), (49) e (54) si ricava, tenuto conto del Teorema 8, che esiste il

$$\lim_{q\to s} a^q \text{ (su } Q) = \sup\{a^q;\ q \in Q,\ q < s\} =$$
$$= \inf\{a^q;\ q \in Q,\ q > s\}\ .$$

Se $s \in Q$, dall'essere $\phi(q) = a^q$ crescente si ricava

$$55)\quad \sup\{a^q;\ q \in Q,\ q < s\} \leq a^s \leq \inf\{a^q;\ q \in Q,\ q > s\},$$

e quindi dalle (48), (49), (54) e (55) si ricava che esiste il limite

$$\lim_{q\to s} a^q \text{ (su } Q) = a^s\ .$$

c.v.d.

Poniamo allora la seguente

Definizione 6. *Se* $a \in R$, $a > 1$ *e* $s \in R$, *poniamo per definizione*

$$a^s = \lim_{q\to s} a^q \text{ (su } Q)\ .$$

Se $a \in R$, $0 < a < 1$ *e* $s \in R$, *poniamo per definizione*

$$a^s = \frac{1}{(\frac{1}{a})^s}\ .$$

Intendiamo infine che per ogni $s \in R$ *sia*

$$1^s = 1\ .$$

In questo modo la potenza a^s risulta definita per ogni numero reale $a > 0$ e per ogni numero reale s.

Osservazione. La relazione

$$56)\quad a^s = \lim_{q\to s} a^q \text{ (su } Q)\ ,$$

vale per ogni numero reale $a > 0$ e per ogni $s \in R$. Infatti la (56) è vera per definizione di a^s se $a > 1$, è evidente per $a = 1$, mentre per $0 < a < 1$ si ha

$$57)\quad a^s = \frac{1}{\lim_{q\to s} (\frac{1}{a})^q} \text{ (su } Q)\ ,$$

e quindi per la proprietà del limite del quoziente si ha

$$58)\quad a^s = \lim_{q\to s} \frac{1}{(\frac{1}{a})^q} \text{ (su } Q)\ ,$$

cioè, poichè per q razionale vale

$$\frac{1}{(\frac{1}{a})^q} = a^q\ ,$$

dalla (58) si ricava la (56) anche nel caso $0 < a < 1$.

Notiamo solo che nel caso $0 < a < 1$ si ha, essendo $\phi(q) = a^q$ funzione decrescente su Q,

$$59)\quad \lim_{q\to s} a^q \text{ (su } Q) = \sup\{a^q;\ q \in Q,\ q > s\} =$$
$$= \inf\{a^q;\ q \in Q,\ q < s\}\ .$$

Esercizio. Dalla definizione di potenza ad esponente reale e dalle proprietà delle potenze ad esponente razionale, si ricavino le eguaglianze

$$a^s a^t = a^{s+t}\ ,\quad a^s . b^s = (ab)^s\ ,\quad a^{-s} = 1/a^s\ ,$$

che valgono per $a, b \in R$ positivi e $s, t \in R$ qualunque.

La funzione esponenziale nel campo reale.

Per ogni $a \in R$ positivo possiamo considerare la funzione

$$f(x) = a^x ,$$

la quale risulta definita su tutto R. Tale funzione verrà detta funzione esponenziale di base a.

Vale a proposito delle funzioni esponenziali il seguente teorema

Teorema 16. *Ogni funzione esponenziale è definita e continua su R. Se la sua base è maggiore di 1 allora la funzione esponenziale risulta crescente, se la sua base è minore di 1 allora la funzione esponenziale risulta decrescente. Per ogni base diversa da 1 l'insieme dei valori della funzione esponenziale è costituito dall'insieme dei numeri reali positivi.*

Dimostrazione. Consideriamo innanzitutto le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ con base $a > 1$. Proviamo che esse sono crescenti. Infatti la restrizione di $f(x) = a^x$ agli interi relativi è crescente, essendo $a > 1$. Allora anche la restrizione di $f(x) = a^x$ ai numeri razionali è crescente, infatti se $q < q'$ sono due numeri razionali, posto

$$q = m/n , \quad q' = m'/n ,$$

con n intero positivo e m, m' interi relativi, si ha $m < m'$ e quindi

$$a^q = (a^{\frac{1}{n}})^m < (a^{\frac{1}{n}})^{m'} = a^{q'} ,$$

essendo $a > 1$. Se infine $x < x'$ sono due numeri reali, indichiamo con q, q' due numeri razionali che certamente esistono tali che

60) $$x < q < q' < x' .$$

Dalla (60) e dalle definizioni di potenza ad esponente reale si ricavano le

61) $$a^x \leq a^q , \quad a^{q'} \leq a^{x'} .$$

Per quanto visto sulla restrizione di $f(x) = a^x$ ai razionali si ha, essendo $q < q'$,

$$a^q < a^{q'} ,$$

e quindi, tenuto conto della (61), si ricava

$$a^x < a^{x'} .$$

Si è quindi provato che $f(x) = a^x$, per $a > 1$, è crescente su R.

Verifichiamo ora, sempre per $a > 1$, la continuità della funzione $f(x) = a^x$.

Avendo provato che la funzione esponenziale con base $a > 1$ è crescente si ha che per ogni $x_0 \in R$ esistono i limiti

$$\lim_{x \to x_0+} a^x \quad , \quad \lim_{x \to x_0-} a^x \ .$$

Essendo $Q \subset R$ si hanno le eguaglianze

62) $\lim_{x \to x_0+} a^x = \lim_{q \to x_0} a^q$ (su $\{q;\ q \in Q,\ q > x_0\}$) ,

63) $\lim_{x \to x_0-} a^x = \lim_{q \to x_0} a^q$ (su $\{q;\ q \in Q,\ q < x_0\}$) .

Ma per il Teorema 15 e il Teorema 5 si ha

64) $\lim_{q \to x_0} a^q$ (su $\{q;\ q \in Q\ ,\ q > x_0\}$) =

$= \lim_{q \to x_0} a^q$ (su $\{q;\ q \in Q\ ,\ q < x_0\}$) =

$= \lim_{q \to x_0} a^q$ (su Q) ,

e quindi, per le (64), (63) e (62) e la definizione di a^{x_0} si ricava

65) $\lim_{x \to x_0+} a^x = \lim_{x \to x_0-} a^x = a^{x_0}$

Dalla (65), ricordando il Teorema 7 si ha

$$\lim_{x \to x_0} a^x \text{ (su } R - \{x_0\}) = a^{x_0} \ .$$

Risulta così verificata la continuità della funzione $f(x) = a^x$ nel punto x_0 . Data l'arbitrarietà di x_0 risulta provata la continuità di $f(x) = a^x$ su R , nel caso $a > 1$.

Per quanto riguarda l'insieme $f(R)$ dei valori della

funzione, sempre nel caso di basi maggiori di 1 , osserviamo che posto $E = \{x;\ x \in R\ ,\ x > 0\}$, si ha

66) $f(R) \subset E$,

cioè per ogni $x \in R$ si ha $a^x > 0$. Infatti per ogni intero relativo m si ha $a^m > 0$, quindi per ogni razionale $q = m/n$ si ha $a^q = (a^{\frac{1}{n}})^m > 0$. Poichè per ogni reale x esiste un razionale $q < x$ e poichè $f(x) = a^x$ è crescente, essendo $a > 1$, si ha

$$a^x > a^q > 0 \ .$$

Per provare che $f(R) = E$ basta allora verificare che per ogni $\lambda \in E$ cioè per ogni reale λ positivo $f(x)$ assume valori minori di λ e valori maggiori di λ (il valore λ stesso verrà allora necessariamente assunto essendo $f(x)$ definita e continua su R). Per provare che $f(x) = a^x$, con $a > 1$ assume valori maggiori di ogni numero reale positivo λ si osservi che, per il Lemma 1, si ha

$$\frac{a^n - 1}{n} > a - 1 \ , \quad \text{per ogni intero } n > 1 \ .$$

Quindi per ogni intero $n > 1$ si ha anche

$$a^n > n(a - 1) \ .$$

Avremo allora $f(n) = a^n > \lambda$ non appena si prenda

$n > \dfrac{\lambda}{a - 1}$.

Per verificare che $f(x) = a^x$ assume valori minori di ogni numero reale positivo λ basta prendere un intero m tale che

$$f(m) = a^m > 1/\lambda$$

per avere

$$f(-m) = a^{-m} = 1/a^m < \lambda .$$

La tesi risulta così completamente provata nel caso di funzioni esponenziali con base $a > 1$. Per il caso di basi $a < 1$ basta ricordare che per definizione si ha

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$$

ed allora le proprietà della funzione a^x si ricavano immediatamente da quelle della funzione $(1/a)^x$.

c.v.d.

Esercizio. Utilizzando la continuità della funzione esponenziale e le proprietà delle potenze ad esponente razionale si verifichi la

$$(a^s)^t = a^{st} ,$$

per ogni $a \in R$, $a > 0$, e per $s, t \in R$, qualunque.

<u>Il logaritmo nel campo reale.</u>

Fissato un numero reale $a \neq 1$ e $a > 0$, la funzione

$f(x) = a^x$ risulta invertibile per il Teorema 16, ed essendo la sua inversa definita sui numeri reali positivi, possiamo dire che l'equazione

67) $$a^x = y$$

nell'incognita x ha, per ogni y reale positivo, una ed una sola soluzione. Tale soluzione è detta il logaritmo in base a di y e si indica

$$\log_a y .$$

L'operazione di logaritmo gode di alcune semplici proprietà che si ricavano da quelle dell'elevamento a potenza e sono:

$$\log_a(s\ t) = \log_a s + \log_a t ,$$

$$\log_a s^{-1} = -\log_a s$$

$$\log_a s \ \log_s t = \log_a t .$$

La verifica di tali proprietà è lasciata per esercizio al lettore.

<u>La funzione logaritmo.</u>

Per ogni $a > 0$ e $a \neq 1$ reale si può considerare la funzione

$$g(x) = \log_a x ,$$

la quale, essendo l'inversa della funzione $f(x) = a^x$, risulterà, per il Teorema 16, definita sui numeri reali posi