

# Calcolo differenziale

(funzioni di più variabili reali)

Gabriele H. Greco  
 Dipartimento di Matematica  
 Università di Trento  
 38050 POVO (Trento) Italia  
[www.science.unitn.it/~greco](http://www.science.unitn.it/~greco)

a.a. 2005-06: Appunti del corso di Analisi Matematica (3UD)

**Cap. 4 — Diffeomorfismi** ..... 1-8

§ 1. Differenziabilità e differenziale ..... 1

§ 2. Dalle funzioni scalari alle funzioni vettoriali ..... 2

§ 3. Differenziabilità delle funzioni composte ..... 3

§ 4. Coni tangenti di insiemi parametrizzati ..... 4

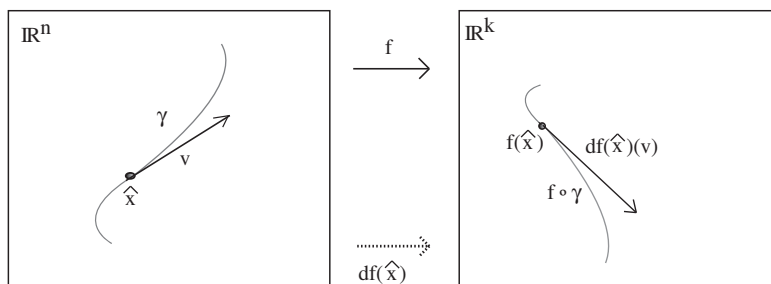
§ 5. Diffeomorfismi ..... 6

§ 6. Caratterizzazione dei diffeomorfismi ..... 7

§ 7. Coordinate polari, cilindriche e sferiche ..... 8

§ 8. Esempi ed esercizi (da scrivere) ..... 9

Concetto importante è il *differenziale*. Nato con il calcolo infinitesimale, serviva a denotare incrementi finiti o infinitesimi delle variabili (dipendenti o indipendenti). Il termine “differenziale”, introdotto da Leibniz (1647-1716), assume il significato moderno di “applicazione lineare” nel 1862 con la seconda edizione del celebre “*Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*” di H. G. Grassmann (1809-77).



Nell’ambito delle varietà differenziabili il differenziale assume una veste geometrica accattivante, è visto come “applicazione tangente”: vettori tangenti a curve sono mappati dal differenziale in vettori tangenti alle curve-immagini.

Come dimostreremo, questa proprietà caratterizza il differenziale come l’unica applicazione lineare che mappa vettori tangenti in vettori tangenti. Caratterizzazione, utile anche per il calcolo, come si può intuire da esempi semplici (per esempio, si pensi alle traslazioni, rotazioni, riflessioni, omotetie, applicazioni lineari, ecc.).

Il pensare al differenziale come applicazione tangente, rende “chiare e evidenti” le condizioni geometriche che traducono l’iniettività e/o la suriettività del differenziale.

## 1 Differenziabilità e differenziale

Siano  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  una funzione vettoriale,  $f_1, \dots, f_k$  le sue  $k$  componenti, i.e.

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_k) \quad \text{dove} \quad f_i(\mathbf{x}) := \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{e}_i \rangle$$

e  $\mathbf{x}_0 \in A^\circ$ . Il **differenziale** di  $f$  in  $\hat{\mathbf{x}}$ , denotato con  $df(\hat{\mathbf{x}})$ , è definito da

$$\boxed{df(\hat{\mathbf{x}})} := \text{“la trasformaz. lineare } L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ t.c. } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\hat{\mathbf{x}}) - L(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|} = \mathbf{0}.”$$

Questa è una buona definizione <sup>1</sup>. La funzione  $f$  è detta **differenziabile** in  $\hat{\mathbf{x}}$ , quando  $df(\hat{\mathbf{x}})$  esiste. La differenziabilità comporta la continuità. La matrice associata a  $df(\hat{\mathbf{x}})$ , denotata con i simboli

$$(1) \quad \mathbf{Jf}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{J}_f(\hat{\mathbf{x}})$$

è detta **matrice jacobiana**. Se quadrata, il suo determinante è detto **jacobiano**.

**Proposizione 1 (dalle funzioni vettoriali a quelle scalari)** *La funzione  $f$  è differenziabile in un punto se e solo se tutte le sue componenti  $f_1, f_2, \dots, f_k$  lo sono.*

**Dimostrazione.** Sia  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n$  la  $i$ -ima riga della matrice associata a  $L$ . Per avere quanto richiesto, si passi al limite per  $\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$  nelle seguenti uguaglianze:

$$\frac{f(\mathbf{x}) - f(\hat{\mathbf{x}}) - L(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|} = \left( \frac{f_1(\mathbf{x}) - f_1(\hat{\mathbf{x}}) - \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}, \frac{f_2(\mathbf{x}) - f_2(\hat{\mathbf{x}}) - \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}, \dots, \frac{f_k(\mathbf{x}) - f_k(\hat{\mathbf{x}}) - \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|} \right). \square$$

La **derivata direzionale** di  $f$  nel punto  $\hat{\mathbf{x}}$  lungo un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  è definita da

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\hat{\mathbf{x}})}{t}.$$

Le derivate lungo i vettori della base canonica sono dette **derivate parziali**. Il calcolo della derivata direzionale di  $f$  è riconducibile a quello delle componenti di  $f$ ; infatti

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}), \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) \right).$$

La derivata direzionale è omogenea nel vettore  $\mathbf{v}$ ; cioè per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial (t\mathbf{v})}(\hat{\mathbf{x}}) = t \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}),$$

**Proposizione 2 (sulla matrice jacobiana)** *Se  $f$  è differenziabile in  $\hat{\mathbf{x}}$ , allora le derivate direzionali esistono e l'applicazione  $\mathbf{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$  è lineare; più concisamente*

$$(5) \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = df(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{v})}, \text{ qualunque sia } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; ^2$$

$$(6) \text{ il termine di posto } ij \text{ della matrice jacobiana } \mathbf{Jf}(\hat{\mathbf{x}}) \text{ è } \boxed{\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{e}_j}(\hat{\mathbf{x}})};$$

$$(7) \text{ le } k \text{ righe di } \mathbf{Jf}(\hat{\mathbf{x}}) \text{ sono, ordinatamente, i gradienti } \nabla f_1(\hat{\mathbf{x}}), \dots, \nabla f_k(\hat{\mathbf{x}});$$

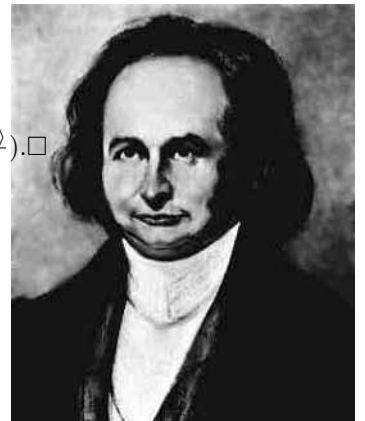
$$(8) \text{ le } n \text{ colonne di } \mathbf{Jf}(\hat{\mathbf{x}}) \text{ sono, ordinatamente, le derivate parziali } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\hat{\mathbf{x}}), \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(\hat{\mathbf{x}}), \dots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_n}(\hat{\mathbf{x}}).$$

<sup>1</sup> Infatti se ve ne fossero due distinte  $L_1$  e  $L_2$  si dovrebbe avere che  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}} \frac{(L_1 - L_2)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|} = \mathbf{0}$ ; quindi mediante la sostituzione  $\mathbf{x} \stackrel{s}{=} \hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}$  si avrebbe, per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  non nullo, che  $\mathbf{0} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}} \frac{(L_1 - L_2)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(L_1 - L_2)(t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|} = \frac{(L_1 - L_2)(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|}$ . Perciò  $L_1 - L_2 = \mathbf{0}$ ; assurdo!

<sup>2</sup> Infatti, per  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , mediante la sostituzione  $\mathbf{x} \stackrel{s}{=} \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ , dalla differenziabilità si ottiene:  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\hat{\mathbf{x}}) - (df(\hat{\mathbf{x}}))(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\hat{\mathbf{x}}) - (df(\hat{\mathbf{x}}))(t\mathbf{v})}{\|t\mathbf{v}\|} = \frac{t}{|t|\|\mathbf{v}\|} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(\hat{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\hat{\mathbf{x}})}{t} - (df(\hat{\mathbf{x}}))(\mathbf{v}) \right) = 0$ .



H.G. Grassmann (1809-77)



C.G. Jacobi (1804-51)

## 2 Dalle funzioni scalari alle funzioni vettoriali

Le funzioni scalari e le curve sono particolari funzioni vettoriali. Come funzioni vettoriali,

- (1) una funzione scalare di una variabile  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in un dato  $t \in I$  sse  $t$  è interno ad  $I$  e  $\varphi$  ha derivata finita in  $t$ . Se  $\varphi$  è differenziabile si ha:

$$d\varphi(t) : \lambda \mapsto \lambda\varphi'(t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \quad J_\varphi(t) = \varphi'(t) \quad \text{“matrice } 1 \times 1\text{”}$$

- (2) una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è differenziabile in un dato  $t \in I$  sse  $t$  è interno ad  $I$  e  $\gamma$  è derivabile in  $t$ . Qualora  $\gamma$  sia differenziabile, allora

$$d\gamma(t) : \lambda \mapsto \lambda\gamma'(t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \quad J_\gamma(t) = \gamma'(t) \quad \text{“matrice colonna”}$$

- (3) esiste il gradiente di una funzione scalare  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in un dato  $\mathbf{x} \in A^\circ$  sse esiste il differenziale di  $f$  nello stesso punto. Qualora  $f$  sia differenziabile, allora

$$df(\mathbf{x}) : \mathbf{v} \mapsto \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \quad J_f(\mathbf{x}) = {}^t(\nabla f(\mathbf{x})) \quad \text{“matrice riga”}.$$

La nozione di classe  $C^1$  si estende, senza conflitti, alle funzioni vettoriali; si dirà che una **funzione vettoriale** è di classe  $C^1$  su un aperto se le sue derivate parziali esistono e sono continue in ogni punto dell'aperto.

Una funzione vettoriale è di classe  $C^1$  su un aperto se e solo se le sue componenti sono di classe  $C^1$  sullo stesso aperto.

Il teorema del differenziale totale, il cironeo (nelle versioni lemma e teorema) continuano a valere (verifica immediata). Richiamiamoli adattandoli alla veste vettoriale.

**Teorema 1 (teorema del differenziale totale o differenziabilità delle funzioni di classe  $C^1$ )** Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è di classe  $C^1$  su un aperto  $\Omega$ , allora  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $\Omega$ ; inoltre,  $\forall \hat{\mathbf{x}} \in \Omega$  si ha che

$$(4) \quad \lim_{\substack{\mathbf{y}, \mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (df(\hat{\mathbf{x}}))[\mathbf{y} - \mathbf{x}]}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = \mathbf{0}$$

**Lemma 1 (il cironeo: lemma fondamentale del calcolo differenziale)** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenziabile in un punto  $\hat{\mathbf{x}}$ . Se le successioni  $\{\mathbf{x}_m\}_m \subset A$  e  $\{\lambda_m\}_m \subset \mathbb{R}_{++}$  sono tali che  $\mathbf{x}_m \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\lambda_m \rightarrow 0^+$  e  $\lim_m \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m} = \mathbf{v}$ , allora

$$(5) \quad \lim_m \frac{f(\mathbf{x}_m) - f(\hat{\mathbf{x}})}{\lambda_m} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}).$$

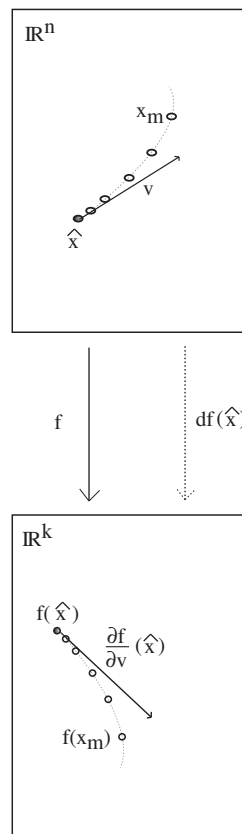
La proprietà evidenziata nel cironeo *caratterizza la differenziabilità*. Infatti

**Teorema 2 (il cironeo: caratterizzazione della differenziabilità)** Siano  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  una funzione,  $\hat{\mathbf{x}} \in A^\circ$  e  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineare. Sono equivalenti le seguenti proprietà:

- (6)  $f$  è differenziabile in  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $df(\hat{\mathbf{x}}) = L$ ,

$$(7) \quad \lim_m \frac{f(\mathbf{x}_m) - f(\hat{\mathbf{x}})}{\lambda_m} = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_m \rightarrow \hat{\mathbf{x}} \text{ e } \lambda_m \rightarrow 0^+ \text{ con } \lim_m \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m} = \mathbf{v}.$$

**Esercizio 1 (non validità teorema del valor medio nel caso vettoriale)** La funzione  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ , è differenziabile ovunque, le sue derivate direzionali lungo vettori non nulli non son mai nulle, ma esistono punti distinti (per es.  $0$  e  $2\pi$ ) a cui corrisponde una variazione nulla di  $\gamma$ .  $\square$

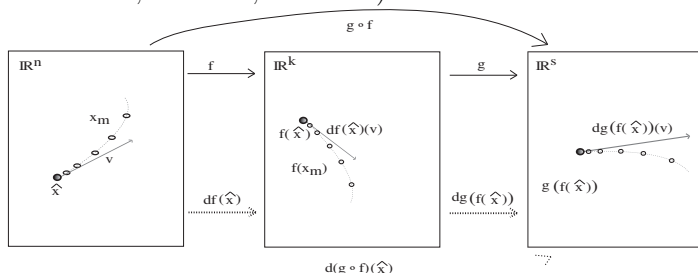


il cironeo

### 3 Differenziabilità delle funzioni composte

Grazie alla caratterizzazione della differenziabilità data dal cireneo (vedi teorema 2), il differenziale di una funzione è l'applicazione lineare che trasforma "vettori tangenti a successioni" nei "vettori tangenti alle successioni-immagini".

Alcuni esempi immediati: (•) il differenziale di una traslazione è l'identità (perchè le traslazioni non modificano i vettori tangenti); (•) il differenziale di una trasformazione lineare è la stessa trasformazione lineare; (•) il differenziale di una trasformazione affine (per es. rotazioni, omotetie, riflessioni) è la trasformazione lineare associata.



**Teorema 3 (differenziabilità delle funzioni composte)** Siano  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenziabile in  $\hat{x}$ ,  $g : B \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$  differenziabile in  $\hat{y} := f(\hat{x})$ , allora  $g \circ f$  è differenziabile in  $\hat{x}$  e

$$(1) \quad d(g \circ f)(\hat{x}) = dg(\hat{y}) \circ df(\hat{x}) \quad (\text{quindi: } J(g \circ f)(\hat{x}) = Jg(\hat{y}) Jf(\hat{x})).$$

**Dimostrazione.** Come richiesto dal teorema 2, consideriamo due successioni  $\{\mathbf{x}_m\}_m \subset \text{dom}(f)$  e  $\{\lambda_m\}_m \subset \mathbb{R}_{++}$  tali che

$$(*) \quad \mathbf{x}_m \rightarrow \hat{x}, \quad \lambda_m \rightarrow 0^+, \quad \lim_m \frac{\mathbf{x}_m - \hat{x}}{\lambda_m} = \mathbf{v}.$$

Dalla continuità e dalla differenziabilità di  $f$  si ottiene, grazie anche al cireneo, che

$$(**) \quad \{f(\mathbf{x}_m)\}_m \subset \text{dom}(g), \quad f(\mathbf{x}_m) \rightarrow f(\hat{x}), \quad \lim_m \frac{f(\mathbf{x}_m) - f(\hat{x})}{\lambda_m} = df(\hat{x})(\mathbf{v}).$$

Da cui, nuovamente tramite il cireneo, dalla differenziabilità di  $g$  segue che

$$(***) \quad \lim_m \frac{g(f(\mathbf{x}_m)) - g(f(\hat{x}))}{\lambda_m} = dg(\hat{y})(df(\hat{x})(\mathbf{v})).$$

Poiché (\*\*\*) vale sotto le condizioni (\*) e poiché l'applicazione  $\mathbf{v} \mapsto dg(\hat{y})(df(\hat{x})(\mathbf{v}))$  è la trasformazione lineare  $dg(\hat{y}) \circ df(\hat{x})$ , dal teorema 2 si ha che  $dg(\hat{y}) \circ df(\hat{x})$  è il differenziale della funzione composta  $g \circ f$ .  $\square$

Dal teorema 2 discende la seguente uguaglianza (2), particolarizzazione di (1); altre sono state viste in precedenza (vedi (5) del §1cap3 e (5)-(6) del §6cap3).

$$(2) \quad \boxed{(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))}$$

se (1<sup>0</sup>)  $\gamma(t)$  è interno ad  $A$ , (2<sup>0</sup>)  $f$  è differenziabile in  $\gamma(t)$ , (3<sup>0</sup>) esiste la derivata  $\gamma'(t)$ .

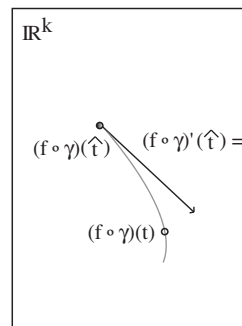
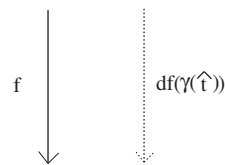
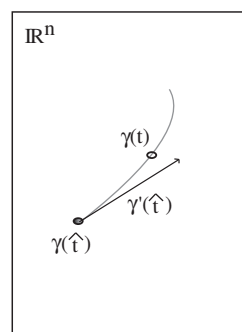
**Corollario 1** Funzioni composte di funzioni di classe  $C^1$ , sono di classe  $C^1$ .

**Esercizio 2** Siano  $f, g$  funzioni di  $n$ -variabili a valori in  $\mathbb{R}^k$ , differenziabili in uno dato punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Allora, qualunque sia  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$ , si ha

$$(3) \quad d(tf)(\mathbf{x}) = t df(\mathbf{x}) \text{ o, equivalentemente, } \frac{\partial(tf)}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = t \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x});$$

$$(4) \quad d(f + g)(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}) + dg(\mathbf{x}) \text{ o, equivalentemente, } \frac{\partial(f+g)}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x});$$

$$(5) \quad \frac{\partial \langle f, g \rangle}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \langle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle + \langle f(\mathbf{x}), \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) \rangle.$$



## 4 Coni tangenti di insiemi parametrizzati

Un insieme  $M$  che è immagine di un altro insieme  $S$  secondo un'applicazione  $\mathbf{f}$  cioè tale che  $M = \mathbf{f}(S)$ , si dirà che è *parametrizzato* da  $\mathbf{f}$ . In tal caso,  $\mathbf{f}$  è detta *parametrizzazione* e  $S$  è detto *insieme* o *dominio dei parametri*.

Volendo applicare la prossima proposizione e il prossimo teorema nel calcolo del cono tangente di  $M$  in un punto  $\hat{\mathbf{z}}$ , si cerchi un parametro  $\hat{\mathbf{x}} \in S$  tale che  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ , e si osservi che  $\text{Tan}(M, \hat{\mathbf{z}}) = \text{Tan}(\mathbf{f}(S), \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}))$ .

Siano, nel resto del paragrafo,  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenziabile in  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $S \subset A$ .

**Proposizione 3**  $\text{Tan}(\mathbf{f}(S), \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})) \supset \text{df}(\hat{\mathbf{x}})[\text{Tan}(S, \hat{\mathbf{x}})]$ .

**Dimostrazione.** Sia  $\mathbf{v} \in \text{Tan}(S, \hat{\mathbf{x}})$ . Per definizione di cono tangente, esistono due successioni  $\{\mathbf{x}_m\}_m \subset S$  e  $\{\lambda_m\}_m \subset \mathbb{R}_{++}$  tali che  $\{\mathbf{x}_m\}_m \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ ,  $\{\lambda_m\}_m \rightarrow 0^+$  e  $\lim_m \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m} = \mathbf{v}$ . Allora dalla continuità di  $\mathbf{f}$  in  $\hat{\mathbf{x}}$  segue che  $\lim_m \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ ; d'altra parte, la differenziabilità, tramite il cireneo, comporta che  $\lim_m \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\lambda_m} = \text{df}(\hat{\mathbf{x}})[\mathbf{v}]$ . Perciò  $\text{df}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{v}) \in \text{Tan}(\mathbf{f}(S), \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}))$ , come richiesto.  $\square$

**Teorema 4 (cono tangente di insiemi parametrizzati)** *Sia il differenziale  $\text{df}(\hat{\mathbf{x}})$  iniettivo<sup>3</sup>. Se  $S$  è tale che*

$$(1) \quad \lim_m \mathbf{x}_m = \hat{\mathbf{x}}, \quad \text{per ogni } \{\mathbf{x}_m\}_m \subset S \quad \text{t.c.} \quad \lim_m \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}).$$

Allora  $\text{Tan}(\mathbf{f}(S), \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})) = \text{df}(\hat{\mathbf{x}})[\text{Tan}(S, \hat{\mathbf{x}})]$ .

**Dimostrazione.** Grazie alla proposizione 3, basta dimostrare che  $\text{Tan}(\mathbf{f}(S), \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})) \subset \text{df}(\hat{\mathbf{x}})[\text{Tan}(S, \hat{\mathbf{x}})]$ . Questa inclusione segue direttamente dal prossimo lemma 3.  $\square$

**Lemma 2 (sull'iniettività del differenziale)** *Sia il differenziale  $\text{df}(\hat{\mathbf{x}})$  iniettivo su un sottospazio vettoriale  $V$  di  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste  $\delta \in \mathbb{R}_{++}$  tale che*

$$(2) \quad \delta \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\| \quad \forall \mathbf{x} \in B_\delta(\hat{\mathbf{x}}) \cap (V + \hat{\mathbf{x}}).$$

Se, in aggiunta,  $\mathbf{f}$  è di classe  $C^1$  su  $A$ , allora  $\delta$  può essere scelto in modo che

$$(3) \quad \delta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_\delta(\hat{\mathbf{x}}) \cap (V + \hat{\mathbf{x}}).$$

**Dimostrazione.** Verifichiamo la (3). Ragionando per assurdo, esistono  $\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m \in B_{1/m}(\hat{\mathbf{x}}) \cap (V + \hat{\mathbf{x}})$  tali che, per ogni  $m \in \mathbb{N}_1$

$$(1^*) \quad \frac{1}{m} > \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_m)\|}{\|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m\|}.$$

Per la *compattezza delle successioni limitate* possiamo supporre che la successione  $\left\{ \frac{\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m}{\|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m\|} \right\}_m$  converga verso un vettore  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$  che necessariamente non è nullo e appartiene a  $V$ . Ora da (4§2) del teorema del differenziale totale si avrebbe che

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_m) - \text{df}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m)}{\|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m\|} = \lim_m \left( \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_m)}{\|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m\|} - \text{df}(\hat{\mathbf{x}})\left(\frac{\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m}{\|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_m\|}\right) \right);$$

da cui, mediante (1\*), avremmo che  $\text{df}(\hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{v}}) = 0$ ; cioè il differenziale si annulla sul vettore non nullo  $\hat{\mathbf{v}}$ , in contrasto con l'iniettività su  $V$  del differenziale.

Verifichiamo la (3). La dimostrazione è come quella di (2).<sup>4</sup>  $\square$

<sup>3</sup>L'iniettività del differenziale comporta  $n \leq k$  e che il rango della matrice jacobiana  $\mathbf{Jf}(\hat{\mathbf{x}})$  sia  $n$ .

<sup>4</sup>Innanzitutto, ragionando per assurdo, esistono  $\mathbf{x}_m \in B_{1/m}(\hat{\mathbf{x}})$ , per ogni  $m \in \mathbb{N}_1$ , tali che  $\frac{1}{m} > \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\|}{\|\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}\|}$ . Per la *compattezza delle successioni limitate* possiamo supporre che la successione  $\left\{ \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}\|} \right\}_m$  converga verso un vettore  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$  che necessariamente non è nullo. Ora dalla definizione di differenziale si avrebbe che  $0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) - \text{df}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}\|} = \lim_m \left( \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}\|} - \text{df}(\hat{\mathbf{x}})\left(\frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}\|}\right) \right)$ ; da cui avremmo che  $\text{df}(\hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{v}}) = 0$ ; cioè il differenziale si annulla sul vettore non nullo  $\hat{\mathbf{v}}$ , in contrasto con l'iniettività del differenziale.

**Lemma 3** Sia il differenziale  $df(\hat{\mathbf{x}})$  iniettivo e sia  $S$  un insieme verificante (1). Se le successioni  $\{\mathbf{x}_m\}_m \subset S$  e  $\{\lambda_m\}_m \subset \mathbb{R}_{++}$  e per il vettore  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$  sono tali che

$$(4) \quad \lim_m \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \lim_m \lambda_m = 0, \quad \lim_m \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\lambda_m} = \mathbf{w},$$

allora esiste  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$(5) \quad \lim_m \mathbf{x}_m = \hat{\mathbf{x}}, \quad \lim_m \lambda_m = 0, \quad \lim_m \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m} = \mathbf{v}, \quad e \quad df(\hat{\mathbf{x}})[\mathbf{v}] = \mathbf{w}.$$

**Dimostrazione.** Grazie a (1) dal primo limite di (4) si ha il primo limite di (5). Grazie al lemma 2, si scelga  $\delta > 0$  in modo che la (2) sia soddisfatta. Senza mancare di generalità, assumiamo che  $\mathbf{x}_m \in B_\delta(\hat{\mathbf{x}})$ ; quindi da (2) segue che

$$(1^*) \quad \delta \|\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\|, \quad \text{per ogni } m.$$

Per  $\mathbf{x}_m \neq \hat{\mathbf{x}}$  abbiamo

$$(2^*) \quad df(\hat{\mathbf{x}})\left[\frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m}\right] = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\lambda_m} - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) - df(\hat{\mathbf{x}})[\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}]}{\|\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}\|} \cdot \frac{\|\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\|} \cdot \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_m) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\|}{\lambda_m}$$

1<sup>o</sup> caso: “esiste  $\bar{m} \in \mathbb{N}$  tale che  $\mathbf{x}_m \neq \hat{\mathbf{x}}$  per ogni  $m \geq \bar{m}$ .” Tenuto conto della differenziabilità, dall’ultimo limite di (4) e da (1\*) segue che

$$(3^*) \quad \lim_m df(\hat{\mathbf{x}})\left[\frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m}\right] = \mathbf{w}.$$

Poichè l’immagine di una trasformazione lineare (che è uno spazio vettoriale) è un insieme chiuso, da (3\*) segue che esiste  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tale che  $df(\hat{\mathbf{x}})[\mathbf{v}] = \mathbf{w}$ . D’altra parte, avendo  $\lim_m df(\hat{\mathbf{x}})\left[\frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m}\right] = df(\hat{\mathbf{x}})[\mathbf{v}]$ , l’iniettività del differenziale comporta quanto richiesto:  $\lim_m \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m} = \mathbf{v}$ . 2<sup>o</sup> caso: “esistono infiniti  $m \in \mathbb{N}$  tali che  $\mathbf{x}_m = \hat{\mathbf{x}}$ .” In tal caso si ottiene facilmente che  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  sono entrambi vettori nulli.<sup>5</sup> □

**Esercizio 3** Se  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è lineare e iniettiva, allora (1) è soddisfatta per  $S := \mathbb{R}^n$ .

**Esercizio 4** Calcolare il cono tangente dell’insieme  $M := \{(t^2+1, t+u+2, u-t+3) : (t, u) \in \mathbb{R}^2, t^2+u^2 < 1\}$  nel punto  $(1, 2, 3)$ .

**Soluzione.** •Premessa: Sia  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\mathbf{f}(t, u) := (t^2+1, t+u+2, u-t+3)$  e  $S := \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : t^2+u^2 < 1\}$ . Si osserva che  $M = \mathbf{f}(S)$  e che  $\mathbf{f}(0, 0) = (1, 2, 3)$ .

•Differenziabilità: La funzione  $\mathbf{f}$  è ovunque differenziabile, perché le sue componenti sono funzioni polinomiali. •Iniettività del differenziale: Le tre righe della matrice jacobiana di  $J_{\mathbf{f}}(0, 0)$  sono  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ , di cui le ultime due sono linearmente indipendenti; quindi il differenziale  $df(0, 0)$  è iniettivo •Bicontinuità: La condizione (1) è soddisfatta; infatti, per ogni successione  $\{(t_m, u_m)\}_m \subset \mathbb{R}^2$ , dall’aver  $\lim_m (t_m^2+1, t_m+u_m+2, u_m-t_m+3) = (1, 2, 3)$  segue immediatamente che  $\lim_m t_m+u_m = 0$ , e  $\lim_m u_m-t_m = 0$ ; da cui si ha che  $t_m \rightarrow 0$  e  $u_m \rightarrow 0$ . •Calcolo del cono tangente di  $S$ : Poichè  $(0, 0) \in S^\circ$ , si ha  $\text{Tan}(S, (0, 0)) = \mathbb{R}^2$ . •Calcolo del cono tangente di  $M$ . Essendo soddisfatte tutte le ipotesi del teorema 4, abbiamo  $\text{Tan}(M, (1, 2, 3)) = \{df(0, 0)(t, u) : (t, u) \in \text{Tan}(S, (0, 0))\} = \{(0, t+u, u-t) : (t, u) \in \mathbb{R}^2\}$ . □

$$J_{\mathbf{f}}(t, u) = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_{\mathbf{f}}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>5</sup>Infatti, necessariamente, si ha che  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ . Dunque, si spezzi  $\mathbb{N}$  nei due insiemi  $N := \{m \in \mathbb{N} : \mathbf{x}_m = \hat{\mathbf{x}}\}$  e  $N' := \{m \in \mathbb{N} : \mathbf{x}_m \neq \hat{\mathbf{x}}\}$ . Il limite su  $N$  è evidente:  $\lim_{m \in N} \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m} = \mathbf{0}$ . Se  $N'$  fosse infinito, riportandosi al primo caso si avrebbe che esiste un vettore  $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^n$ , tale che  $\lim_{m \in N'} \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m} = \mathbf{v}'$  e  $df(\hat{\mathbf{x}})[\mathbf{v}'] = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ ; da cui  $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$ , per l’iniettività del differenziale  $df(\hat{\mathbf{x}})$ . Dunque, complessivamente,  $\lim_{m \in \mathbb{N}} \frac{\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}}{\lambda_m} = \mathbf{0}$ . Quindi il vettore richiesto da (5) è il vettore nullo.

## 5 Diffeomorfismi

Una funzione  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è detta **bicontinua** su  $\Omega \subset A$  (o **omeomorfismo** su  $\Omega$ ), se  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  e  $\forall \{\mathbf{x}_m\}_m \subset \Omega$  vale l'equivalenza

$$(1) \quad \mathbf{x}_m \rightarrow \mathbf{x} \iff \mathbf{f}(\mathbf{x}_m) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Se  $\mathbf{f}$  è bicontinua su  $\Omega$ , allora è necessariamente iniettiva su  $\Omega$  e, qualunque sia  $K \subset \Omega$ , l'insieme  $\mathbf{f}(K)$  è compatto (risp. connesso per archi) sse  $K$  è compatto (risp. connesso per archi)<sup>6</sup>.

Una funzione  $\mathbf{g} : A \rightarrow B$  iniettiva e suriettiva tra due aperti  $A, B$  di  $\mathbb{R}^n$  è detta “**diffeomorfismo** (di classe  $C^1$ ) **tra aperti**”, se  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{g}^{-1}$  sono di classe  $C^1$ .

Diremo che  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un **diffeomorfismo su**  $\Omega \subset A$  (di classe  $C^1$ ), se  $\Omega$  e  $\mathbf{f}(\Omega)$  sono aperti e la restrizione  $\mathbf{f}|_{\Omega}$  è un omeomorfismo tra aperti.

**Proposizione 4 (proprietà elementari dei diffeomorfismi).** *Sia  $\mathbf{f}$  un diffeomorfismo su un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{g}$  un diffeomorfismo su  $\mathbf{f}(\Omega)$ . Allora*

(2)  $\mathbf{f}$  è iniettiva e di classe  $C^1$  su  $\Omega$  e  $\det(\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x})) \neq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ ;

(3)  $\mathbf{J}(\mathbf{f}|_{\Omega}^{-1})(\mathbf{y}) = (\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ;

(4)  $\mathbf{f}$  è bicontinua su  $\Omega$  e mappa aperti contenuti in  $\Omega$  in aperti;

(5) la composizione  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  è un diffeomorfismo su  $\Omega$ ;

(6)  $\text{Tan}(\mathbf{f}(S), \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{d}\mathbf{f}(\mathbf{x})(\text{Tan}(S, \mathbf{x}))$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$  e  $S \subset \Omega$ ;

(7)  $\text{Tan}(\mathbf{f}(S), \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  è uno spazio vettoriale, se  $\text{Tan}(S, \mathbf{x})$  lo è.

**Dimostrazione.** La (2) è data dalla definizione di diffeomorfismo tra aperti. Per la differenziabilità delle funzioni composte da  $f|_{\Omega}^{-1} \circ f|_{\Omega} = \text{id}$  si ottiene  $\mathbf{J}(f|_{\Omega}^{-1})(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \circ \mathbf{J}(f|_{\Omega})(\mathbf{x}) = \text{“matrice identità”}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ ; perciò  $\mathbf{J}(f|_{\Omega}^{-1})(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (\mathbf{J}(f|_{\Omega})(\mathbf{x}))^{-1}$  e  $\det(\mathbf{J}(f|_{\Omega}^{-1})(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \cdot \det(\mathbf{J}(f|_{\Omega})(\mathbf{x})) = 1$ . Da ciò seguono (3) e parte di (2), poiché  $\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{f}|_{\Omega})(\mathbf{x})$ . Per convalidare (4), basta notare che in (1) l'implicazione ‘ $\implies$ ’ è dovuta alla continuità di  $\mathbf{f}$ , mentre l'implicazione opposta segue dalla continuità di  $f|_{\Omega}^{-1}$ . La (6) segue dal teorema 4§4 oppure dall'applicazione della proposizione 3§4 alle funzioni  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}|_{\Omega}^{-1}$ . Infine la (7) segue da (6) e dalla linearità del differenziale.  $\square$

**Teorema 5** *La proprietà (2) caratterizza i diffeomorfismi su  $\Omega$ .*

La dimostrazione di questo teorema sarà data nel prossimo paragrafo.

**Teorema 6 (sui diffeomorfismi locali o sulla funzione inversa)** *Sia  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  su un aperto  $A$ . Se lo jacobiano di  $\mathbf{f}$  non è nullo nel punto  $\mathbf{x}_0 \in A$ , allora esiste un aperto  $\Omega$  con  $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset A$ , su cui  $\mathbf{f}$  è un diffeomorfismo.*

**Dimostrazione del teorema sui diffeomorfismi locali.** L'applicazione  $\mathbf{x} \mapsto \det(\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}))$  è una applicazione continua. Quindi essendo  $\det(\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0$ , esiste un  $\mu > 0$  tale che si abbia  $\det(\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x})) \neq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in B_{\mu}(\mathbf{x}_0)$ . D'altra parte, per il lemma 2§4 esiste un numero reale positivo  $\delta < \mu$  verificante (3§4). Posto  $\Omega := B_{\delta}(\mathbf{x}_0)$ , si osserva che la funzione  $\mathbf{f}$  è iniettiva su  $\Omega$  (in virtù di (3§4)), è di classe  $C^1$  ed, infine, ha jacobiano non nullo in tutti i punti di  $\Omega$ . Dunque dal teorema precedente sulla caratterizzazione dei diffeomorfismi segue che  $\mathbf{f}$  è un diffeomorfismo su  $\Omega$ .  $\square$

<sup>6</sup>“compatto” := “chiuso+limitato” e “ $K$  è connesso per archi” := “qualunque siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ , esiste una curva continua con traiettoria contenuta in  $K$  e congiungente  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ ”.

## 6 Caratterizzazione dei diffeomorfismi

**Lemma 4 (sulla suriettività del differenziale)** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenziabile in un punto  $\hat{x}$  e sia il differenziale  $df(\hat{x})$  suriettivo. Allora esiste  $\delta \in \mathbb{R}_{++}$  tale che  $B_{\delta^2/2}(f(\hat{x})) \subset f(B_\delta(\hat{x}))$ .

**Dimostrazione.** La suriettività di  $df(\hat{x})$  comporta l'esistenza di un sottospazio vettoriale  $V$  di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $k$  su cui il differenziale è iniettivo. Perciò, grazie al lemma 2 del §4, esiste un  $\delta > 0$  tale che si abbia  $\overline{B}_\delta(\hat{x}) \subset \Omega$  e

$$(*)1) \quad \delta \|x - \hat{x}\| \leq \|f(x) - f(\hat{x})\| \quad \forall x \in \overline{B}_\delta(\hat{x}) \cap V$$

Vogliamo dimostrare che questo  $\delta$  è quello richiesto dal lemma. Preso arbitrariamente un punto  $\bar{y} \in B_{\delta^2/2}(f(\hat{x}))$  verifichiamo che  $\bar{y} \in f(B_\delta(\hat{x}))$  col mostrare che esiste  $\bar{x} \in B_\delta(\hat{x}) \cap V$  tale che  $\bar{y} = f(\bar{x})$ .

1° passo: "scelta di  $\bar{x} \in \overline{B}_\delta(\hat{x}) \cap V$ ". Lo si scelga in  $\overline{B}_\delta(\hat{x}) \cap V$  in modo che

$$(*)2) \quad \|f(\bar{x}) - \bar{y}\|^2 = \min\{\|f(x) - \bar{y}\|^2 : x \in \overline{B}_\delta(\hat{x}) \cap V\}.$$

$\bar{x}$  esiste, poiché  $f$  è continua e  $\overline{B}_\delta(\hat{x}) \cap V$  è chiuso e limitato (v. teor. di Weierstrass).

2° passo: "verifica di  $\bar{x} \in B_\delta(\hat{x}) \cap V$ ". Immediata, poiché da  $(*)1)$ - $(*)2)$  segue che  $\delta \|\bar{x} - \hat{x}\| \leq \|f(\bar{x}) - f(\hat{x})\| \leq \|f(\bar{x}) - \bar{y}\| + \|\bar{y} - f(\hat{x})\| \leq \|f(\hat{x}) - \bar{y}\| + \|\bar{y} - f(\hat{x})\| < \delta^2$ .

3° passo: "verifica di  $\bar{y} = f(\bar{x})$ ". Supponiamo per assurdo che  $w := \bar{y} - f(\bar{x}) \neq 0$ .

Allora

(1•)  $w \notin \text{Tan}(f(B_\delta(\hat{x}) \cap V), f(\bar{x}))$ , poiché  $f(B_\delta(\hat{x}) \cap V) \cap B_{\|w\|}(f(\bar{x}) + w) = \emptyset$ ;

(2•)  $\text{Tan}(f(B_\delta(\hat{x}) \cap V), f(\bar{x})) \supset df(\hat{x})[\text{Tan}(B_\delta(\hat{x}) \cap V, \bar{x})]$  (vedi prop. 3§4);

(3•)  $\text{Tan}(B_\delta(\hat{x}) \cap V, \bar{x}) = V$ , poiché la sfera aperta  $B_\delta(\hat{x})$  contiene  $\bar{x}$ .

Grazie alla suriettività, si ha  $df(\hat{x})[V] = \mathbb{R}^k$ . Quindi, combinando (2•) e (3•) si ottiene che  $\text{Tan}(f(B_\delta(\hat{x}) \cap V), f(\bar{x})) = \mathbb{R}^k$ , in evidente contraddizione con (1•).  $\square$

**Teorema 7 (caratterizzazione dei diffeomorfismi)** Una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è un diffeomorfismo su un aperto  $\Omega \subset A$  se (e solo se)

(1)  $f$  è iniettiva su  $\Omega$ , è di classe  $C^1$  su  $\Omega$  e  $\det(Jf(x)) \neq 0$  per ogni  $x \in \Omega$ .

**Dimostrazione.** Tracciamo la dimostrazione.

1ª asserzione: " $f(\Omega)$  è aperto". Poiché  $\det(Jf(x)) \neq 0$ , il differenziale è suriettivo in ogni punto di  $\Omega$ . Quindi dal lemma precedente si ha che  $f(\Omega)$  è aperto.

2ª asserzione: " $f$  è bicontinua su  $\Omega$ ". Segue facilmente dal lemma precedente.

3ª asserzione: " $(f|_\Omega)^{-1}$  è differenziabile su tutto  $f(\Omega)$ ". L'inversa di  $f|_\Omega$  esiste, perché  $f$  è per ipotesi iniettiva su  $\Omega$ . Ora, per dimostrare la differenziabilità di  $(f|_\Omega)^{-1}$ , si applichi il teorema 2§2 del cireneo sulla caratterizzazione della differenziabilità, tenendo conto del lemma 3§4, le cui ipotesi sono soddisfatte (perché  $f$  è bicontinua e il differenziale di  $f$  è iniettivo in ogni punto di  $\Omega$ ).

4ª asserzione: " $(f|_\Omega)^{-1}$  è di classe  $C^1$  su  $\Omega$ ". Basta dimostrare che la funzione  $y \mapsto J((f|_\Omega)^{-1})(y)$  è continua su  $f(\Omega)$ . Abbiamo che <sup>7</sup>

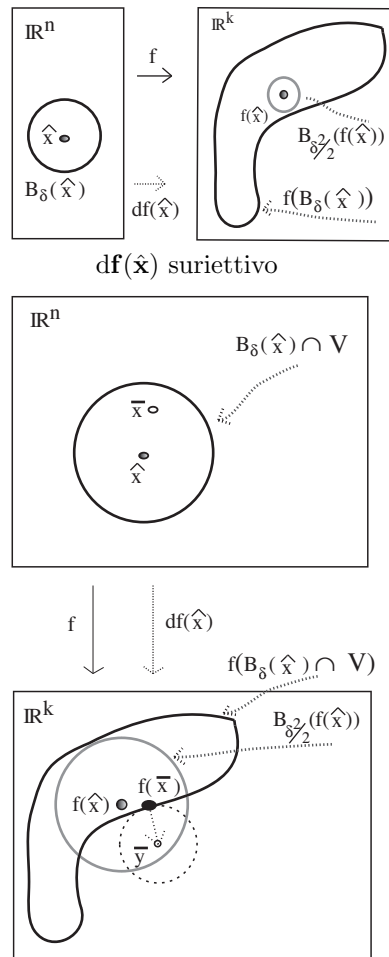
$$(*)1) \quad \text{la funzione } x \mapsto (Jf(x))^{-1} \text{ è continua, perché, essendo } (Jf(x))^{-1} = \frac{\text{cof}(Jf(x))}{\det(Jf(x))},$$

le componenti di  $\sigma$  sono funzioni polinomiali dei termini della matrice  $Jf(x)$ ;

(2\*) la funzione  $y \mapsto (f|_\Omega)^{-1}(y)$  è continua, perché è differenziabile (v. sopra).

Dalla formula sulla differenziabilità delle funzioni composte, per ogni  $y \in f(\Omega)$ , abbiamo che  $J(f^{-1})(y) = (Jf[f^{-1}(y)])^{-1} = [\sigma \circ \varphi](y)$ ; quindi  $y \mapsto J((f|_\Omega)^{-1})(y)$  è continua, perché è la composizione  $\sigma \circ \varphi$  di due funzioni continue.  $\square$

<sup>7</sup>In queste righe che seguono e completano la dimostrazione, scriveremo  $f^{-1}$  al posto di  $(f|_\Omega)^{-1}$



## 7 Coordinate polari, cilindriche e sferiche

Dal punto di vista dell'uso che ne faremo, i diffeomorfismi serviranno a descrivere

- *trasformazioni* - insiemi di un "universo"  $\mathbb{R}^n$  vengono trasformati in insiemi dello stesso "universo" o di un "altro universo" avente stessa dimensione. *Esempi*: rotazioni, riflessioni, traslazioni, glissoriflessioni, omotetie, affinità, isomorfismi lineari.

- *sistemi di coordinate*: i punti di un aperto  $\mathbb{R}^n$  vengono "etichettati" con nuove  $n$ -uple di numeri, dalle vecchie si passa alle nuove coordinate. *Esempi*: coordinate polari, cilindriche, sferiche.

- *cambiamenti di coordinate, cambiamenti di variabile o sostituzioni di variabile, parametrizzazioni*: le coordinate dei punti di un aperto vengono espresse mediante delle nuove coordinate o delle  $n$ -uple di parametri. *Esempi*: vedi i cambiamenti di coordinate descritti qui di seguito.

**Coordinate polari nel piano.**  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è definita

$$\mathbf{f}(\rho, \vartheta) := (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta).$$

$\mathbf{f}$  è di classe  $C^1$  e rispetto alla matrice Jacobiana si osserva:

$$\mathbf{Jf}(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad e \quad \det(\mathbf{Jf}(\rho, \vartheta)) = \rho.$$

Su ognuno dei seguenti insiemi

$$(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \quad (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$$

la trasformazione  $\mathbf{f}$  è iniettiva, quindi è pure un diffeomorfismo, per il teorema 7.  $\square$

**Coordinate cilindriche nello spazio.**  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è definita

$$\mathbf{f}(\rho, \vartheta, z) := (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z)$$

$\mathbf{f}$  è di classe  $C^1$  e rispetto all matrice Jacobiana si osserva:

$$\mathbf{Jf}(\rho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{Jf}(\rho, \vartheta, z)) = \rho.$$

Su ognuno dei seguenti insiemi

$$(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \quad (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$$

la trasformazione  $\mathbf{f}$  è iniettiva, quindi è pure un diffeomorfismo, per il teorema 7.  $\square$

**Coordinate sferiche nello spazio.**  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è definita

$$\mathbf{f}(\rho, \vartheta, \varphi) := (\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \rho \cos \varphi \sin \vartheta, \rho \sin \varphi)$$

$\mathbf{f}$  è di classe  $C^1$  e rispetto all matrice Jacobiana si osserva:

$$\mathbf{Jf}(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \cos \varphi \sin \vartheta & -\rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi & 0 & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}, \det(\mathbf{Jf}(\rho, \vartheta, \varphi)) = \rho^2 \cos \varphi$$

Su ognuno dei seguenti insiemi

$$(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \quad (0, +\infty) \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

la trasformazione  $\mathbf{f}$  è iniettiva, quindi è pure un diffeomorfismo, per il teorema 7.  $\square$