Lezione 25 - 12 Dicembre 2013

- I sistemi dinamici discreti

Nella lezione 21 abbiamo visto l'esempio di una popolazione divisa in due componenti (piante giovani e piante adulte) il cui stato viene seguito di anno in anno e ci abbiamo il vettore

$$\vec{V}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

dove $\underline{n}$ indica l'anno in cui si considera lo stato. Abbiamo visto che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} s & \beta \\ \mu & s \end{pmatrix}$$

regola il passaggio da un anno all'altro in modo che

$$\vec{V}_{n+1} = A \vec{V}_n \qquad (1)$$

Questa equazione definisce un <u>sistema dinamico discreto</u>.

Un esempio ancora più semplice è costituito dalla versione <u>discreta</u> del modello di Malthus considerato nella lezione 13. Infatti, se facciamo il bilancio dei nuovi nati e dei sopravvissuti da un anno all'altro, otteniamo

$$N_{n+1} = \alpha N_n = \beta \Delta t N_n + s N_n \qquad (2)$$

dove

- N_n è il numero di individui nell'anno n
- $\alpha = \beta \Delta t + s$
- $s = 1 - \mu \Delta t \geq 0$

se Δt è la lunghezza di 1 anno misurata nell'unità di tempo in cui sono definite la fertilità β e la mortalità μ. Notare che s è la frazione sopravvissuta.

Un ulteriore esempio è dato dal modello demografico di Leslie definito dalla matrice L introdotta alla fine della lezione 21. Qui la popolazione è rappresentata nelle sue classi di età

$$\vec{N} \equiv \begin{pmatrix} N^1 \\ \vdots \\ N^A \end{pmatrix}$$

e il modello che ne deriva

$$\vec{N}_{n+1} = L \vec{N}_n \qquad (3)$$

è un sistema dinamico di dimensione A.

In fondo, le equazioni (2), (3) definiscono lo stesso processo di evoluzione di una popolazione a vari livelli di descrizione.

Se consideriamo il modello (2) abbiamo

$N_0 \leftarrow$ popolazione iniziale

$$N_1 = \alpha N_0$$

$$N_2 = \alpha^2 N_0$$

$$\vdots$$

$$\boxed{N_n = \alpha^n N_0} \qquad (4)$$

la (4) costituisce una soluzione esplicita del modello. Si conclude che:

$$\begin{cases} \text{se } 0 < \alpha < 1 & N_n \to 0 \text{ per } n \to +\infty \\ \text{se } \alpha > 1 & N_n \to +\infty \text{ per } n \to +\infty \end{cases}$$

Anche per gli altri modelli abbiamo le formule esplicite

$$\vec{N}_n = A^n \vec{N}_0$$

dove compare la potenza n-sima di una matrice, ma a questo punto bisogna identificare A^n, se vogliamo trarne conclusioni.

Vediamo qualche esempio particolare

1) $A = \begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & b \end{pmatrix}$

allora è facile vedere che $A^n = \begin{pmatrix} a^n, & 0 \\ 0, & b^n \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 0, & a \\ b, & 0 \end{pmatrix}$

allora:

$$A^2 = \begin{pmatrix} ab, & 0 \\ 0, & ab \end{pmatrix} = ab \cdot I$$

$$A^3 = abA \quad , \quad A^4 = abA^2 = a^2b^2 \cdot I$$

dunque

$$A^{(2k+1)} = a^k b^k A \quad , \quad A^{2k} = a^k b^k \cdot I$$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

(caso della matrice idempotente)

4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $A^n = 0$

(caso della matrice nilpotente)

Per avere indicazioni ~~utili~~ generali ma come cavarcela con il sistema

$$\vec{N}_{n+1} = A \vec{N}_n \qquad (5)$$

Consideriamo il caso particolare della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

che anche se non contempla tutte le possibilità che si possono presentare, comunque fornisce un'idea completa di quello che si può fare.

Notiamo che il problema (5), per la matrice (6) è un problema del tipo di Leslie anche se relativo ad intervalli estremi.

$\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1$

Di fatto tale problema corrisponde a quello dei "conigli di Fibonacci" (n indica il mese)

$$\begin{cases} N^1_{n+1} = N^2_n \\ N^2_{n+1} = N^1_n + N^2_n \end{cases} \qquad (7)$$

Se infatti consideriamo $a_n = N^1_n + N^2_n$ che corrisponde al totale dei conigli presenti abbiamo

$$a_{n+1} = N^1_{n+1} + N^2_{n+1} = N^2_n + N^1_n + N^2_n$$

$$= a_n + N^2_n = a_n + N^1_{n-1} + N^2_{n-1}$$

$$= a_n + a_{n-1}$$

che è la legge di formazione dei numeri di Fibonacci.

Per capire come procedere ci ispiriamo al caso di una dimensione rappresentato dal problema (2). In tal caso la soluzione è data dalla (4) e allora ci chiediamo se non sia possibile trovare una soluzione delle (5)-(6) nella forma

$$\vec{N}_n = \lambda^n \vec{V} \qquad (8)$$

Nella (8) le incognite da determinare sono:

- il parametro scalare λ
- il vettore $\vec{v}$

Imponendo che la (8) sia soluzione di (5) abbiamo

$$\lambda^{M+1}\vec{v} = A(\lambda^M \vec{v}) = \lambda^M A\vec{v}$$

da cui

$$\lambda\vec{v} = A\vec{v} \qquad (9)$$

ossia

$$(\lambda \cdot I - A)\vec{v} = 0 \qquad (10)$$

dove I è l'identità $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ora, (10) è un sistema lineare come quelli considerati nella lezione 24 e, per avere una soluzione che non sia $\vec{v} \equiv 0$ deve risultare

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (11)$$

che, nel caso della nostra matrice (6) fornisce l'equazione:

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

nell'incognita λ.

Dunque, risolvendo l'equazione abbiamo due valori

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad (12)$$

che dovrebbero permetterci di trovare una soluzione nella forma (8). Restano da determinare i corrispondenti vettori, ~~dunque~~ delle (10), quando si fissi ~~x~~ per λ uno dei due valori (12). Per questo consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\pm} & , & -1 \\ -1 & , & \lambda_{\pm}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} \lambda_{\pm} x - y = 0 \\ -x + (\lambda_{\pm}-1) y = 0 \end{cases}$$

da cui $\quad y = \lambda_{\pm} x \quad , \quad -x + \lambda_{\pm}(\lambda_{\pm}-1)x = 0$

e poiché

$$\left(-1+\lambda_{\pm}(\lambda_{\pm}-1)\right)x = \left(\lambda_{\pm}^2-\lambda_{\pm}-1\right)x = 0$$

qualunque sia x, possiamo scegliere $x=1$ e in corrispondenza avere $y=\lambda_{\pm}$. In definitiva troviamo il vettore $\vec{v}_{\pm}$ ~~[illegible]~~ corrispondente a $\lambda_{\pm}$ nella forma

$$\vec{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm} \end{pmatrix}$$

(Naturalmente ogni altro vettore proporzionale, ossia della forma $a\vec{v}_{\pm}$, andrebbe bene).

I due valori $\lambda_{\pm}$ si dicono <u>autovalori</u> della matrice A e i vettori $\vec{v}_{\pm}$ si dicono <u>autovettori</u> corrispondenti.

In conclusione, il nostro tentativo di trovare soluzioni nella forma (8) ha avuto successo e abbiamo trovato due soluzioni:

$$\vec{N}_n^{+} = \lambda_+^n \vec{v}_+ \quad , \quad \vec{N}_n^{-} = \lambda_-^n \vec{v}_-$$

Tutto ciò vuol dire che <u>se</u> il dato iniziale $\vec{N}_0$ è uguale a $\vec{V}_+$, oppure proporzionale:

$$\vec{N}_0 = \alpha \vec{V}_+$$

allora la soluzione è data da

$$\vec{N}_\mu = \lambda_+^\mu \vec{N}_0 = \alpha \lambda_+^\mu \vec{V}_+$$

Analogamente, <u>se</u> $\vec{N}_0 = \beta \vec{V}_-$ ~~allora~~ abbiamo la soluzione

$$\vec{N}_\mu = \lambda_-^\mu \vec{N}_0 = \beta \lambda_-^\mu \vec{V}_-$$

Ciò vuole anche dire che <u>se</u>

$$\vec{N}_0 = \alpha \vec{V}_+ + \beta \vec{V}_-$$

la soluzione è data da

$$\vec{N}_\mu = \alpha \lambda_+^\mu \vec{V}_+ + \beta \lambda_-^\mu \vec{V}_- \qquad (14)$$

Allora si pone il problema:

$$\boxed{\text{Dato un qualunque vettore iniziale } \vec{N}_0 \text{, è possibile esprimerlo come } \vec{N}_0 = \alpha \vec{V}_+ + \beta \vec{V}_- \ ?} \qquad (15)$$

Il problema dunque si riconduce a risolvere il sistema

$$\begin{cases} N_0^1 = \alpha + \beta \\ N_0^2 = \alpha\lambda_+ + \beta\lambda_- \end{cases}$$

nelle incognite α e β con N_0^1, N_0^2 numeri reali assegnati.

Sempre in i discorsi fatti nella lezione 21 ciò è possibile se il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è diverso da zero, cioè:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{vmatrix} = 0$$

Ma, nel nostro caso

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{vmatrix} = \lambda_- - \lambda_+ = -\sqrt{5} \neq 0$$

dunque il problema (15) ha soluzione e, una volta determinati α e β la soluzione è data dalla (14).

A questo punto dalla forma (14) possiamo determinare il comportamento asintotico di $\vec{N}_n$, perché abbiamo

$$|\lambda_+| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$$

$$|\lambda_-| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$$

dunque

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_+^n = +\infty \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} \lambda_-^n = 0$$

e per n grande $\vec{N}_n$ si comporta come

$$\boxed{\vec{N}_n \approx \alpha \lambda_+^n \vec{V}_+}$$

Notiamo che il procedimento che abbiamo seguito ha avuto successo perché abbiamo trovato due autovalori $\lambda_\pm$ reali e distinti. Ci si chiede se nel caso generale ~~[illegible]~~, quando cioè gli

autovalori sono reali coincidenti o complessi coniugati, si possono trarre conclusioni analoghe ... la risposta è positiva ....

ma noi ci fermiamo qui.

Esercizi

1) Considerate il caso della lezione 21, e la matrice

$$\begin{pmatrix} s & \beta \\ m & s \end{pmatrix}$$

con

$$s = 1/2 \quad , \quad m = 1$$

e determinate β in modo che la popolazione di piante possa sopravvivere.

(calcolate gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 1/2 , & \beta \\ 1 , & 1/2 \end{pmatrix}$ e trovate β in modo che almeno uno degli autovalori abbia valore assoluto maggiore di 1)

2) Considerate la popolazione di galline dell'esercizio 24.8. Calcolando gli autovalori della matrice, determinate se la popolazione sopravviverà o se invece si estinguerà.