Lezione 1 (18/09/2014)

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. Il 15% degli individui di una popolazione è stato colpito da un'epidemia. L'8% delle persone colpite è morto. Calcolare la mortalità rispetto all'intera popolazione.

Soluzione Bisogna calcolare l'8% del 15% della popolazione, ovvero $0.08 \cdot 0.15 = 0.012$, dunque il tasso di mortalità della malattia è dell'1.2%.

Esercizio 2. La popolazione mondiale nel 1974 era costituita da circa 3.8×10^9 individui. Ogni settimana la popolazione mondiale è aumentata di 1.4 milioni di persone. Calcolare l'aumento percentuale annuale.

Soluzione La variazione percentuale di popolazione è data dalla formula

$$var\% = \frac{P_f - P_i}{P_i} \cdot 100$$

dove P_i e P_f indicano rispettivamente la popolazione all'inizio dell'anno e alla fine dell'anno. Il termine P_f si calcola considerando che un anno è formato da 52 settimane, quindi

$$P_f = P_i + 52 \cdot 1.4 \times 10^6 = 3.8 \times 10^9 + 7.28 \times 10^7.$$

Di conseguenza la variazione percentuale annua è pari a

$$var\% = \frac{P_f - P_i}{P_i} \cdot 100 = \frac{7.28 \times 10^7}{3.8 \times 10^9} \cdot 100 \approx 1.916\%$$

Esercizio 3. La Terra è, approssimativamente, una sfera di circonferenza 40000 Km. Supponiamo di avvolgere una corda attorno all'equatore. Ora, supponiamo di allungare tale corda (lunga 40000 Km) di 10 m e di riavvolgerla attorno alla Terra in modo che la distanza fra la corda e il terreno sia uguale lungo tutto l'equatore. Un topo sarà adesso in grado di passare sotto la corda?

Soluzione Se la circonferenze della Terra è lunga quanto la corda, cioè 40000 Km, allora il raggio della Terra sarà

$$R_T = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366.197722 Km$$

Aumentando ora di 10 m la lunghezza della corda, il nuovo raggio diventa

$$R = \frac{40000.01}{2\pi} \approx 6366.199314Km$$

La differenza tra i due raggi determina se il topo può passare sotto la corda, e si ha $R - R_T = 0.001592$ Km, ovvero 1.5 m e il topo passa comodamente.

Esercizio 4. Sherlock Holmes era noto assumere una soluzione al 7% di oppiacei. Dopo uno scontro particolarmente duro ha sentito il bisogno di portare la sua soluzione di 10 g dal 7% al 12%. Quanti grammi di oppiacei ha aggiunto?

Soluzione Dire che 10 g di soluzione sono al 7% vuol dire che

$$\left(\frac{7}{100}\right)10g = 0.7g$$

sono oppiacei.
Indichiamo con x la quantità di oppiacei da aggiungere per portarla al 12%. Il nuovo peso sarà $10 + x$g e avrà

$$\left[\left(\frac{7}{100}\right)10 + x\right]g = \left[\frac{12}{100}(10 + x)\right]g$$

Dunque

$$x = \frac{12 - 7}{100 - 12} \cdot 10 = \frac{50}{88} \approx 0.57g$$

Esercizio 5. Calcolare le seguenti espressioni.

(a) $\frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

(b) $\frac{97!}{98!} = \frac{1}{98}$

Esercizio 6. Calcolare le seguenti espressioni.

(a) $\frac{5!}{4!} = 5$

(b) $2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2 + frac12 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24}$

Esercizio 7. Risolvere le seguenti equazioni.

(a) $x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$ e $x_2 = 2$

(b) $x^3 = 3x^2 \Longrightarrow x_{1,2} = 0$ e $x_3 = 3$

(c) $a^2x = x^3$, $a > 0 \Longrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = a$ e $x_3 = -a$

Esercizio 8. Risolvere le seguenti disequazioni.

(a) $x + 4 > 7 \Longrightarrow x > 3$

(b) $8 - y > 1 \Longrightarrow y < 7$

(c) $4(\gamma - 5) > 3(5 - \gamma) \Longrightarrow \gamma > 5$

(d) $1 - x^2 \leq (2 - x)(x + 1) \Longrightarrow x \geq -1$

(e) $2x^2 < 8 \Longrightarrow -2 < x < 2$

(f) $3 < u^2 \Longrightarrow -\infty < u < -\sqrt{3}$ e $\sqrt{3} < u < \infty$

(g) $x(x - 1) > 0 \Longrightarrow -\infty < x < 0$ e $1 < x < \infty$

(h) $(x - 1)(x + 2) > 0 \Longrightarrow -\infty < x < -2$ e $1 < x < \infty$

(i) $x^2 + 4x - 21 > 0 \Longrightarrow -\infty < x < -7$ e $3 < x < \infty$

(j) $2x^2 + x < 3 \Longrightarrow -\frac{3}{2} < x < 1$

(k) $4x^2 + 10x - 6 < 0 \Longrightarrow -3 < x < \frac{1}{2}$

(l) $x^2 + 2x + 4 > 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

(m) $3x^2 - x - 4 \geq 0 \Longrightarrow -\infty < x \leq -1$ e $\frac{4}{3} \leq x < \infty$

(n) $2x + 8 > X^2 \Longrightarrow -2 < x < 4$

(o) $23x^6 + 5x^2 + 18 < 0 \Longrightarrow \emptyset$

(p) $x^2 - 6x + 9 > 0 \Longrightarrow -\infty < x < 3$ e $3 < x < \infty$

(q) $2x^2 - 3x + 2 > 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

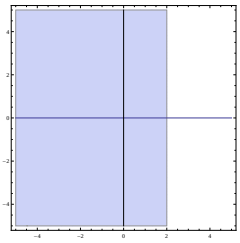
Esercizio 9. Individuare nel piano i punti (x, y) per i quali

(a) $x < 2$

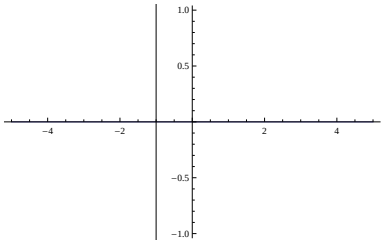
(b) $x = -1$

(c) $x + 2y < 0$

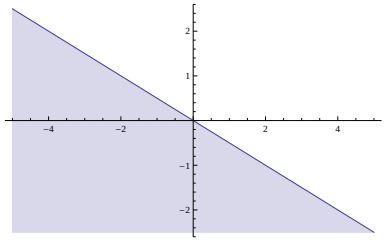
Soluzione



(a)



(b)



(c)

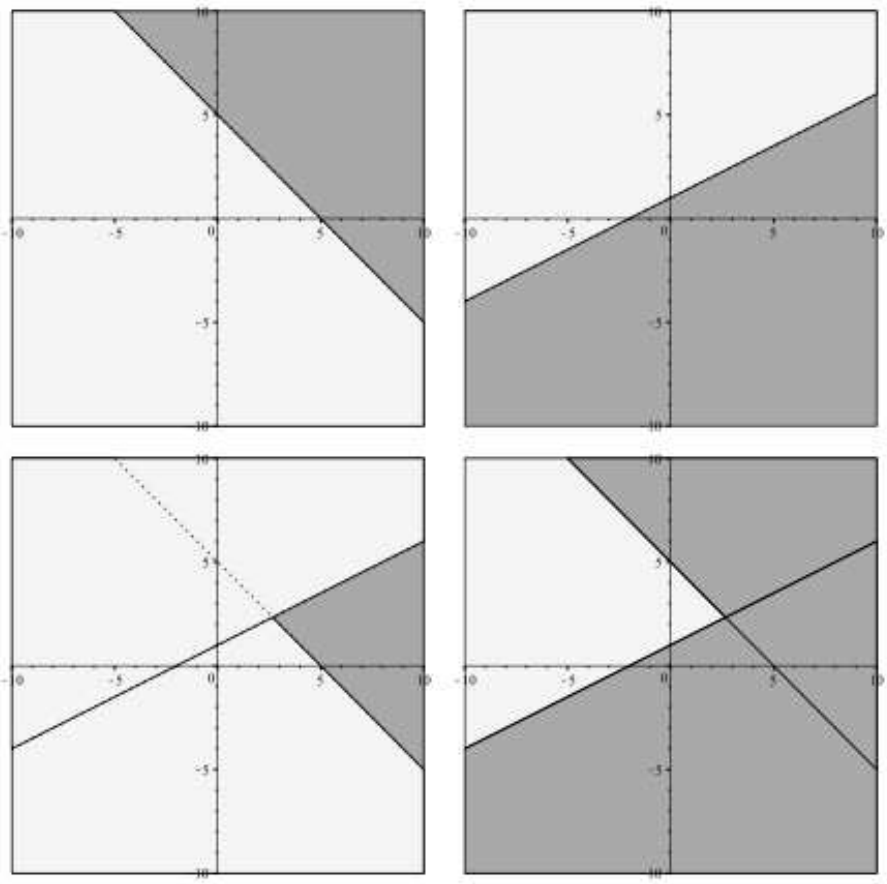
Esercizio 10. Determinare graficamente l'intersezione e l'unione degli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x + y - 5 > 0\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x - 2y + 2 > 0\}.$$

Determinare inoltre il complementare di $A \cap B$ in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione Nelle quattro figure sono rappresentati A, B, $A \cup B$ e $A \cap B$ ed il complementare di $A \cap B$



Nota 1. Per misurare la temperatura esistono tre scale:

- Celsius (C)
- Fahrenheit (F)
- Kelvin (K)

E per queste scale valgono le seguenti relazioni:

- $0C \rightarrow$ punto di congelamento dell'acqua a pressione atmosferica standard
- $0K \rightarrow$ zero assoluto (completa assenza di calore)
- $0C = 32F$
- $1C \rightarrow \frac{1}{100}$ della differenza tra ebollizione e congelamento
- $1K \rightarrow \frac{1}{273.16}$ della differenza tra il punto triplo dell'acqua e lo zero assoluto
- $1F \rightarrow \frac{1}{32}$ della differenza tra il congelamento dell'acqua e $0F$
- $-40C = -40F$

Usiamo una formula lineare per trasformare $F \rightarrow C$

C=Fx+y

$0C = 32F$
$-40C = 40F$

Da cui ricaviamo le seguenti equazioni:

$32x + y = 0$
$-40x + y = -40$

E quindi troviamo:

C=$\frac{5}{9}$(F-32)

Esercizio 11. Per trovare la temperatura in gradi centigradi C dalla temperatura in gradi Fahrenheit F , si usa a seguente procedura: si sottrae 32 a F , poi si moltiplica il risultato per 5 e lo si divide per 9. Scrivere tale regola in forma di relazione lineare fra F e C.

Soluzione Si ha che

$$C = \frac{5(F-32)}{9}$$

Esercizio 12. Le scale di temperature Celsius e Kelvin usano la stessa unità di misura, però la scala Kelvin ha lo zero che coincide con lo zero assoluto, cioè -273.15C

(a) Se T indica la temperatura Celsius e τ quella nella scala Kelvin, scrivere la legge $\tau = \tau(T)$ che traduce il valore della temperatura in gradi Celsius nel valore in Kelvin.

(b) Qual è il dominio di definizione di questa funzione?

(c) Il punto $(0, 273.15)$ appartiene al grafico di τ?

(d) Il punto $(273.15, 0)$ appartiene al grafico di τ ?

(e) Tra i punti $(0, 273.15)$ e $(273.15, 0)$, quale appartiene al grafico di T ?

Soluzione

(a) $\tau(T) = T + 273.15$

(b) $T \in [-273.15, \infty)$

(c) Sì, è il punto in cui la retta $\tau(T)$ taglia l'asse delle τ

(d) No

(e) Solo il secondo, è il punto in cui la retta $T(\tau) = \tau - 273.15$ taglia l'asse delle T.