Lezione 11 (24/11/2014)

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 16.1. *Risolvere l'equazione logistica*

$$N'(t) = \varepsilon\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t), \qquad N(0) = N_0$$

con il parametro malthusiano dipendente dal tempo nel modo seguente (periodicità stagionale)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \cos 2\pi t$$

e la capacità portante $K = 100$. Studiare la soluzione in funzione del tempo t.

Sostituendo il parametro malthusiano $\varepsilon(t)$ nell'equazione logistica, si trova un'equazione differenziale che si può risolvere col metodo di separazione delle variabili. Infatti si può raccogliere nel seguente modo:

$$\frac{N'(t)}{N(t)(\frac{K-N(t)}{K})} = \varepsilon(t).$$

Dunque integrando separatamente i due membri si ha che il primo dà la soluzione canonica della logistica mentre il secondo è un integrale facilmente calcolabile, ovvero

$$\ln\left(\frac{|N(t)|}{|K - N(t)|}\right) - \ln\left(\frac{|N_0|}{|K - N_0|}\right) = \int_0^t \frac{1}{2} + \cos 2\pi s \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t.$$

Passando alla notazione esponenziale, possiamo semplificare questa espressione ottenendo

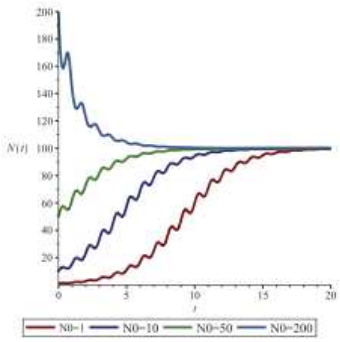

Figure 16.1: Il grafico dell'equazione $N(t)$ per diversi valori di N_0.

$$\frac{N(t)}{K-N(t)} \cdot \frac{K-N_0}{N_0} = e^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t}$$

$$N(t) = \frac{Ke^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t}}{\frac{K-N_0}{N_0} + e^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t}}$$

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K-N_0)e^{-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t}}.$$

Si nota (Figura 16.1) che il termine trigonometrico introduce delle oscillazioni nell'andamento di $N(t)$, però queste oscillazioni non alterano la convergenza a K quando t cresce.

Esercizio 16.2. *Considerate il caso di una malattia che non prevede guarigione ma tende a divenire cronica. Considerate cioè il modello delle malattie infettive nel caso $\gamma = 0$. Quale sarebbe in questo caso il comportamento della soluzione?*

La popolazione si può dividere in due classi, gli individui infettivi I e quelli suscettibili S, ovvero sani e passibili di contagio. Indichiamo con $I(t)$ e $S(t)$ il numero di infettivi e di suscettibili all'istante t, poiché la malattia non è mortale, si avrà che $I(t) + S(t) = N$ dove N indica la totalità della popolazione sotto osservazione. I parametri r e γ indicano, rispettivamente, il tasso di contagio e di guarigione. Allora, all'istante t si ha la seguente equazione differenziale, $I'(t) = rS(t)I(t) - \gamma I(t)$. Infatti rSI indica il numero di nuovi infetti per unità di tempo e γI il numero di infetti che guarisce nell'unità di tempo. Da $S + I = N$ si ricava $S = N - I$ che sostituito nell'equazione differenziale dà:

$$I'(t) = (rN-\gamma)\left(1 - \frac{r}{rN-\gamma}I(t)\right)I(t) \implies I(t) = \frac{(rN-\gamma)I_0}{(rN-\gamma-rI_0)e^{(\gamma-rN)t} + rI_0},$$

dove $0 < I_0 < N$ è il numero di infetti al tempo iniziale $t = 0$. Siccome nel nostro caso $\gamma = 0$ perché non si guarisce da questo tipo di malattia, la formula precedente si semplifica in

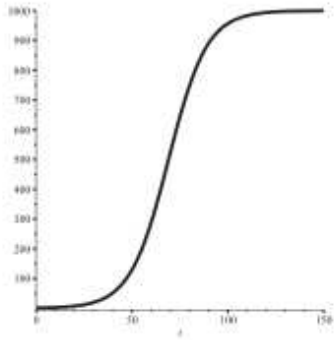

Figure 16.2: Il grafico dell'equazione $I(t)$ per $I_0 = 1$, $N = 1000$ e $r = 0.0001$.

$$I(t) = \frac{rNI_0}{(rN-rI_0)e^{-rNt} + rI_0}.$$

Il grafico di Figura 16.2 mostra, come ci aspettavamo, che gradualmente tutti gli individui diventino malati (infettivi). Lo possiamo ricavare anche matematicamente dal modello osservando che la derivata di $I(t)$ è

$$I'(t) = \frac{r^2 N^2 I_0 (rN - rI_0) e^{-rNt}}{((rN - rI_0)e^{-rNt} + rI_0)^2} > 0,$$

ovvero è sempre positiva, in quanto $N > I_0$ per l'ipotesi del modello.

Esercizio 16.3. *Risolvere la seguente equazione a variabili separabili, con la condizione iniziale* $y(0) = 0$,

$$y'(x) = 1 + y^2(x).$$

Questa equazione si può risolvere col metodo delle variabili separabili oppure in essa si può riconoscere un'equazione di Bernoulli. Usando il primo metodo, si portano le y al primo membro e la funzione dipendente da x al secondo (in questo caso è semplicemente la funzione 1). Si ha quindi:

$$\frac{y'(x)}{1 + y^2(x)} = 1 \implies \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{1 + z^2}\, \mathrm{d}z = \int_0^x 1\, \mathrm{d}x.$$

Sviluppando gli integrali si ottiene

$$\arctan z \Big|_0^y = \arctan y = x \implies y(x) = \tan x.$$

Si può verificare che $y(x) = \tan x$ soddisfa l'equazione differenziale in quanto si ha che $y'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2(x)$.