Lezione 12 (04/12/2014)

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. *Trovare la soluzione delle seguenti equazioni differenziali di Bernoulli, ciascuna con condizione iniziale* $y(0) = 2$.

- La prima equazione è
$$y'(x) = 2y(x) - y^3(x).$$
Si può dividere per il termine di grado più alto in y, cioè $y^3(x)$, si ottiene
$$\frac{y'(x)}{y^3(x)} = 2y^{-2}(x) - 1, \tag{17.1}$$
e a questo punto si identifica con $u(x) = y^{-2}(x)$ così che $u'(x) = -2y^{-3}y'(x)$. Quest'ultima quantità la si ritrova al primo membro dell'equazione (17.1), che infatti si può riscrivere in termini di $u(x)$ come
$$-\frac{u'(x)}{2} = 2u - 1 \implies u'(x) = -4u(x) + 2.$$
Abbiamo dunque trasformato l'equazione non lineare di partenza in una lineare a coefficienti costanti che sappiamo risolvere. Per farlo dobbiamo risolvere i due integrali ausiliari che servono per costruire la soluzione. Il primo è l'integrale del coefficiente di $u(x)$, l'altro considera anche il coefficiente del termine noto, ovvero
$$\int_0^x -4\,\mathrm{d}x = -4x, \qquad \int_0^x e^{4\sigma} \cdot 2\,\mathrm{d}\sigma = 2 \cdot \frac{1}{4} e^{4\sigma}\Big|_0^x = \frac{1}{2}\left(e^{4x} - 1\right).$$
La soluzione dell'equazione in u è quindi
$$u(x) = c \cdot e^{-4x} + e^{-4x} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{4x} - 1\right) = \frac{1}{2} + \left(c - \frac{1}{2}\right) e^{-4x},$$
dove c è una costante che si determina a partire dal dato iniziale su y. Passiamo ora dalla soluzione di u a quella di y ricordando la relazione che lega le due funzioni, avevamo posto $u(x) = y^{-2}(x)$ quindi $y(x) = u(x)^{-1/2}$, ovvero
$$y(x) = \left(\frac{1}{2} + \left(c - \frac{1}{2}\right) e^{-4x}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Determiniamo c usando l'ipotesi $y(0) = 2$, quindi $2 = y(0) = c^{-1/2} \implies c = 1/4$. In conclusione la soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) e^{-4x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2 - e^{-4x}}}.$$

- La seconda equazione è

$$y'(x) = 2y(x) + \sqrt{y(x)}.$$

Con la tecnica esposta nell'esercizio precedente possiamo trasformare l'equazione in

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} = 2\sqrt{y(x)} + 1$$

e quindi porre $u = \sqrt{y(x)}$ da cui $u'(x) = \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}}$. L'equazione diventa dunque

$$2u'(x) = 2u(x) + 1 \implies u'(x) = u(x) + \frac{1}{2}$$

che è lineare a coefficienti costanti. I due integrali ausiliari necessari per risolverla sono:

$$\int_0^x 1\,\mathrm{d}s = x, \qquad \frac{1}{2}\int_0^x e^{-\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{2}e^{-\sigma}\Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

La soluzione della funzione u è di conseguenza

$$u(x) = c \cdot e^x + e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}\right),$$

sapendo ora che $u(x) = \sqrt{y(x)} \implies y(x) = u(x)^2$ si ricava

$$y(x) = \left(c \cdot e^x + e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}\right)\right)^2 = \left(e^x\left(c + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)^2,$$

e da $2 = y(0) = c^2$ si ha che $c = \sqrt{2}$, per cui

$$y(x) = \left(e^x\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)^2.$$

- La terza equazione è

$$y'(x) = 2y(x) + x\sqrt{y(x)}.$$

con la sostituzione $u(x) = \sqrt{y(x)} \implies u'(x) = \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}}$ l'equazione si trasforma in

$$2u'(x) + 2u(x) + x \implies u'(x) = u(x) + \frac{1}{2}x.$$

Il primo integrale ausiliario è semplicemente $\int_0^x 1\,\mathrm{d}s = x$, mentre il secondo è

$$\frac{1}{2}\int_0^x \sigma e^{-\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{2}\sigma e^{-\sigma}\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}(1 - e^{-x}).$$

La soluzione in u è quindi

$$u(x) = ce^x + e^x\left(-\frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}(1-e^{-x})\right),$$

ora sostituendo $y(x) = u^2(x)$ abbiamo la soluzione per y,

$$y(x) = \left(ce^x + e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}(x+1)\right)\right)^2.$$

Calcolando $y(0)$ si ha $2 = c^2 \implies c = \sqrt{2}$ quindi

$$y(x) = \left(\sqrt{2}e^x + e^x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}(x+1)\right)\right)^2.$$

- La quarta ed ultima equazione è più difficile da risolvere,

$$y'(x) = y^2(x) + y(x) - 2,$$

essa è un'equazione a variabili separabili, ma vi si può riconoscere, con una piccola astuzia, un'equazione di Bernoulli. Vediamo entrambe le soluzioni, iniziando con il metodo della separazione delle variabili. Si raccolgono tutte le y al primo membro, ottenendo

$$\frac{y'(x)}{y^2(x) + y(x) - 2} = 1 \implies \int_2^{y(x)} \frac{1}{z^2 + z - 2}\,\mathrm{d}z = \int_0^x 1\,\mathrm{d}x.$$

Il secondo integrale è elementare e vale x, per quanto riguarda il primo, osserviamo che si può scomporre l'integrando in fratti semplici del tipo

$$\frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2},$$

dove $z = 1, -2$ sono le radici del denominatore $z^2 + z - 2$ e A, B si trovano con i metodi già illustrati. Con facili passaggi si trovano $A = 1/3$ e $B = -1/3$. Siamo ora in grado di risolvere l'integrale della funzione razionale:

$$\int_2^{y(x)} \frac{1}{z^2 + z - 2}\,\mathrm{d}z = \int_2^{y(x)} \frac{\frac{1}{3}}{z-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{z+2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\ln|y(x)-1| - 0 - \frac{1}{3}\ln|y(x)+2| + \frac{1}{3}\ln 4.$$

Raccogliendo i termini si ha

$$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{|y(x)-1|}{|y(x)+2|}\right) + \frac{2}{3}\ln 2 = x \implies \left(\frac{|y(x)-1|}{|y(x)+2|}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}2^{1/3}e^x,$$

il secondo membro è sempre positivo quindi possiamo togliere i moduli e prendere il cubo di ambo i membri per eliminare la radice,

$$\frac{y(x)-1}{y(x)+2} = \frac{1}{4}e^{3x} \implies y(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{3x}}{1 - \frac{1}{4}e^{3x}}.$$

Risolviamo ora l'equazione con il metodo di Bernoulli, osserviamo subito che l'equazione non è della forma giusta per applicare la tecnica, così come fatto finora. Sappiamo infatti risolvere equazioni del tipo $y' = a(x)y(x) + b(x)y^\alpha$ ma questa volta compare anche un termine noto che non sappiamo come trattare. Bisogna dunque vedere se siamo in grado di ricondurre questo caso al caso omogeneo senza termine noto. Ciò lo si può fare cercando un opportuno cambio di variabili per y tale che il nuovo differenziale coincida con quello di y'. Una possibile strategia potrebbe essere di cercare un'opportuna traslazione, ovvero un cambio di variabile $z(x) = y(x) + k$ dove $k \in \mathbb{R}$. Con questo cambio si ha che $z'(x) = y'(x)$ e $y(x) = z(x) - k$. Sostituiamo questo valore di $y(x)$ nell'equazione e cerchiamo di annullare il termine noto scegliendo un appropriato valore di k. Riscrivendo l'equazione differenziale con il nuovo cambio di variabili si ha:

$$z'(x) = (z(x) - k)^2 + (z(x) - k) - 2 = z^2(x) + (1 - 2k)z(x) + k^2 - k - 2.$$

Possiamo cercare un valore di k che annulli il termine noto dell'equazione differenziale precedente ovvero porre $k^2 - k - 2 = 0$. Quest'equazione ammette due soluzioni, $k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$. Scegliendo una delle due radici, per esempio $k = 2$, l'equazione differenziale diventa

$$z'(x) = z^2(x) - 3z(x), \quad \text{con} \quad z(0) = y(0) + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Abbiamo dunque trasformato l'equazione di partenza in una di Bernoulli che sappiamo risolvere con le tecniche degli esercizi precedenti. In particolare, dividendo ambo i membri per $z^2(x)$,

$$\frac{z'(x)}{z^2(x)} = -\frac{3}{z(x)} + 1 \implies u(x) = \frac{1}{z(x)} \implies u'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}.$$

In questo modo si passa dalla forma non lineare di Bernoulli a quella lineare

$$u'(x) = 3u(x) - 1.$$

Il primo integrale ausiliario è $\int_0^x 3\,\mathrm{d}s = 3x$, mentre il secondo è

$$\int_0^x e^{-3\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3}\left(e^{-3x} - 1\right).$$

La soluzione generale dell'equazione in u è quindi

$$u(x) = ce^{3x} + \frac{1}{3}e^{3x}\left(e^{-3x} - 1\right) = \frac{1}{3} + \left(c - \frac{1}{3}\right)e^{3x}.$$

Facendo la sostituzione inversa $u = 1/z$ da cui $z = 1/u$ si ha

$$z(x) = \frac{1}{\frac{1}{3} + \left(c - \frac{1}{3}\right)e^{3x}} \implies 4 = z(0) = \frac{1}{c} \implies c = \frac{1}{4}.$$

Possiamo scrivere la soluzione in y calcolando $z(x) - 2$, ovvero

$$y(x) = \frac{1 + 1/6e^{3x} - 2/3}{-1/12e^{3x} + 1/3} = \frac{1/3 + 1/6e^{3x}}{1/3 - 1/12e^{3x}} = \frac{\frac{1}{3}(1 + 1/2e^{3x})}{\frac{1}{3}(1 - 1/4e^{3x})} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{3x}}{1 - \frac{1}{4}e^{3x}},$$

che è la stessa soluzione trovata con il metodo di separazione delle variabili. Facciamo ora la verifica che la soluzione trovata rispetti l'equazione differenziale $y' = y^2 + y - 2$, il primo membro si scrive come

$$y'(x) = \frac{\frac{3}{2}(1 - \frac{1}{4}e^{3x}) - (-\frac{3}{4}e^{3x})(1 + \frac{1}{2}e^{3x}}{(1 - \frac{1}{4}e^{3x})^2} = \frac{\frac{3}{2}e^{3x} - \frac{3}{8}e^{6x} + \frac{3}{4}e^{3x} + \frac{3}{8}e^{3x}}{(1 - \frac{1}{4}e^{3x})^2} = \frac{\frac{9}{4}e^{3x}}{(1 - \frac{1}{4}e^{3x})^2}.$$

Il secondo membro è $y^2 + y - 2$ ed equivale a

$$\begin{aligned} y^2 + y - 2 &= \frac{(1 + \frac{1}{2}e^{3x})^2 + (1 + \frac{1}{2}e^{3x})(1 - \frac{1}{4}e^{3x}) - 2(1 - \frac{1}{4}e^{3x})}{(1 - \frac{1}{4}e^{3x})^2} \\ &= \frac{1 + e^{3x} + \frac{1}{4}e^{6x} + 1 + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2})e^{3x} - \frac{1}{8}e^{6x} - 2 + e^{3x} - \frac{1}{8}e^{6x}}{(1 - \frac{1}{4}e^{3x})^2} \\ &= \frac{(2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2})e^{3x}}{(1 - \frac{1}{4}e^{3x})^2} \\ &= \frac{\frac{9}{4}e^{3x}}{(1 - \frac{1}{4}e^{3x})^2} = y'(x). \end{aligned}$$

Dunque la soluzione trovata rispetta l'equazione differenziale.

Esercizio 2. *Studiare l'equazione logistica nel caso in cui la capacità portante vari nel tempo secondo la legge*

$$K(t) = 10(2 - e^{-t})$$

con tasso di crescita costante $\varepsilon = 1$. Determinare la soluzione e il suo andamento.

La nuova equazione che si forma è (tralasciando di scrivere esplicitamente la dipendenza dal tempo t di $N(t)$ e $K(t)$),

$$N' = \left(1 - \frac{N}{K}\right) N,$$

con dato iniziale $N(0) = N_0$. Si nota subito che ci sono due soluzioni stazionarie, $N(t) = 0$ e $N(t) = K(t)$. Vediamo come trovare le soluzioni non banali. Sviluppando il secondo membro si trova un'equazione di Bernoulli:

$$N' = N - \frac{N^2}{K} \implies \frac{N'}{N} = \frac{1}{N} - \frac{1}{K}.$$

Possiamo risolverla come le equazioni precedenti, ponendo $u = \frac{1}{N} \implies u' = -\frac{N'}{N^2}$, dunque la nuova equazione è lineare, ed è

$$u' = -u + \frac{1}{10(2 - e^{-t})}.$$

Il primo integrale ausiliario è $\int_0^t -1\,\mathrm{d}s = -t$, il secondo è più laborioso da calcolare:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{e^\sigma}{10(2-e^{-\sigma})}\,\mathrm{d}\sigma &= -\frac{1}{10}\int_0^t \frac{e^\sigma}{-2+e^{-\sigma}}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad \left[z = e^\sigma \implies \mathrm{d}z = e^\sigma\,\mathrm{d}\sigma,\ e^{-\sigma} = \frac{1}{z}\right] \\
&= -\frac{1}{10}\int_1^{e^t} \frac{1}{-2+\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z \quad = -\frac{1}{10}\int_1^{e^t} \frac{z}{1-2z}\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{10}\int_1^{e^t} -\frac{1}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{10}\int_1^{e^t} -\frac{1}{2}\frac{z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{20}\int_1^{e^t} 1+\frac{1}{2}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{20}\left(z+\frac{1}{2}\ln\left|z-\frac{1}{2}\right|\right)\Bigg|_1^{e^t}.
\end{aligned}$$

L'ultima espressione si può semplificare in

$$\frac{1}{20}\left(e^t - 1 + \frac{1}{2}\ln\left|e^t - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{20}\left(e^t - 1 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2e^t-1}{2}\right| + \frac{1}{2}\ln 2\right).$$

Possiamo semplificare i logaritmi di due e togliere il modulo, perché per $t \in [0,\infty)$ l'argomento è positivo, si trova che il secondo integrale ausiliario vale

$$\int_0^t \frac{e^\sigma}{10(2-e^{-\sigma})}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{20}\left(e^t - 1 + \frac{1}{2}\ln(2e^t-1)\right).$$

La soluzione generale di $u(t)$ è quindi

$$u(t) = ce^{-t} + \frac{1}{20}e^{-t}\left(e^t - 1 + \frac{1}{2}\ln(2e^t-1)\right),$$

per una costante c dipendente dal dato iniziale $N(0) = N_0$. Ricordando ora che $N = \frac{1}{u}$ si ha che

$$N(t) = \frac{1}{ce^{-t} + \frac{1}{20}e^{-t}\left(e^t - 1 + \frac{1}{2}\ln(2e^t-1)\right)}.$$

Calcoliamo ora $N(0)$ per determinare c, consideriamo per comodità $u(0)$ e poi prendiamo il reciproco,

$$u(0) = c + \frac{1}{20}\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\ln(2-1)\right) = c,$$

dunque $N_0 = N(0) = 1/c$ da cui $c = \dfrac{1}{N_0}$.

Per quanto riguarda l'andamento, osserviamo che effettivamente $N(0) = N_0$, mentre il limite per $t \to \infty$ della funzione è 20 come ci aspettavamo, sapendo che l'equazione della logistica tende alla portante K, infatti il limite della funzione portante $K(t)$ per $t \to \infty$ è proprio 20. Dunque per $0 < N_0 < K(0) = 10$ la funzione cresce verso 20, mentre per valori superiori, decresce fino a 20. Per $N_0 = 0$ la funzione non è definita (divisione per zero) ma, come si evince dalla Figura 17.1, il limite di $N(t)$ per $N_0 \to 0$ è la funzione nulla (la soluzione stazionaria trovata all'inizio).

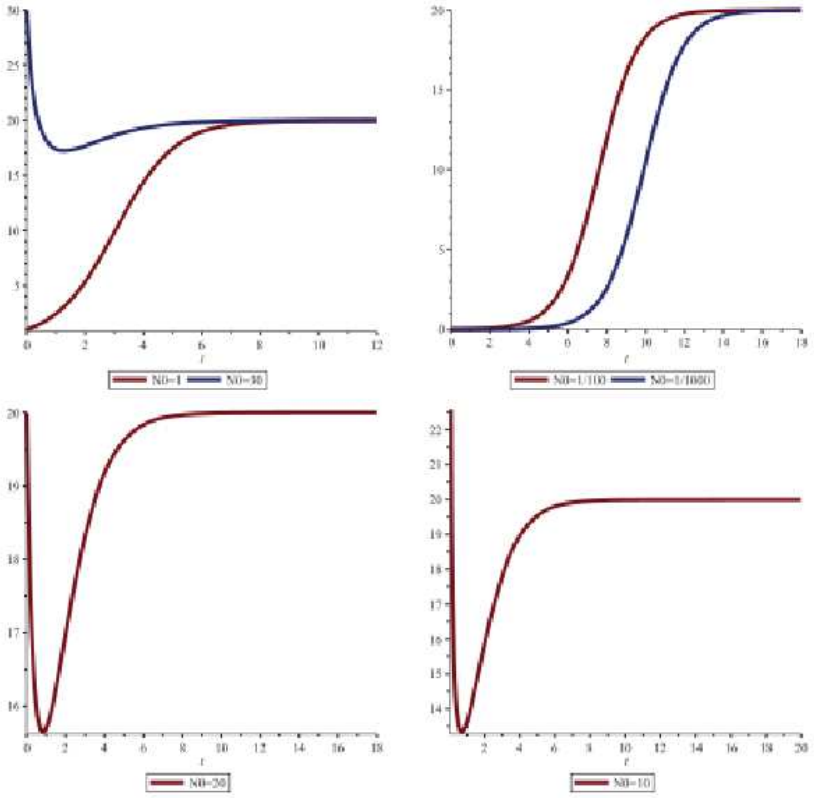

Figure 17.1: Il grafico dell'equazione $N(t)$ per diversi valori di N_0.

Esercizio 3. *Considerate il caso di una malattia cronica (caso $\gamma = 0$) e, tenendo conto della parametrizzazione $r = \frac{c\chi}{N}$, dove c è il numero di contatti per unità di tempo, χ la probabilità di essere infettati in un contatto con un infettivo, studiare il caso in cui il numero di contatti vari periodicamente secondo la legge*

$$c(t) = 1 + \sin 2\pi t,$$

e sia $N = 1000$ e $I_0 = 10$.

L'equazione per il numero di infettivi è data da

$$I'(t) = (rN - \gamma)\left(1 - \frac{r}{rN - \gamma} I(t)\right) I(t) \implies I'(t) = r(t)N\,I(t) - r(t)I^2(t).$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale di Bernoulli, la rendiamo lineare con i seguenti passaggi:

$$\frac{I'(t)}{I^2(t)} = \frac{r(t)N}{I(t)} - r(t) \implies u(t) = \frac{1}{I(t)},\ u'(t) = -\frac{I'(t)}{I^2(t)},$$

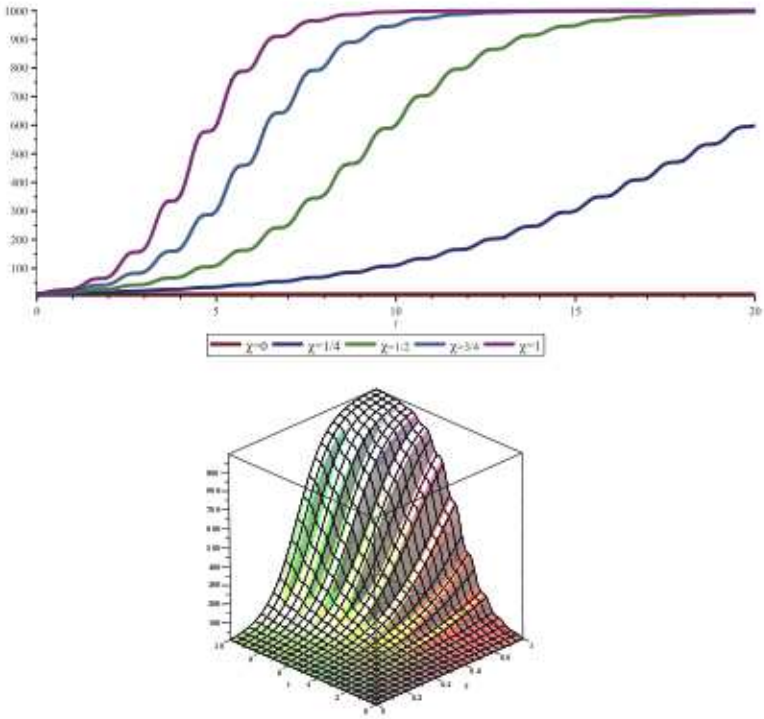

Figure 17.2: Il grafico dell'equazione $I(t)$ per diversi valori di χ.

ovvero semplificando $u'(t) = -N\,r(t)u(t) + r(t)$. Indichiamo con $R(t)$ l'integrale

$$R(t) = \int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\chi}{N}\int_0^t 1 + \sin 2\pi s\,\mathrm{d}s = \frac{\chi}{N}\left(t - \frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t + \frac{1}{2\pi}\right).$$

Allora il primo integrale ausiliario è

$$A(t) = -NR(t) = -N\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s = -\chi\left(t - \frac{1}{2\pi}\cos 2\pi t + \frac{1}{2\pi}\right).$$

Per quanto riguarda il secondo integrale ausiliario, possiamo evitare di calcolarlo esplicitamente osservando che esso si scrive come

$$\int_0^t e^{-A(\sigma)} r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^t e^{NR(\sigma)}\cdot r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^t e^{N\int_0^\sigma r(s)\,\mathrm{d}s}\cdot r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

allora per risolverlo è sufficiente il cambio di variabile $y = N\int_0^\sigma r(s)\mathrm{d}s = NR(\sigma)$ per cui, usando il teorema di derivazione di un integrale definito, $\mathrm{d}y = Nr(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$, quindi si ha la semplificazione

$$\int_0^t e^{N\int_0^\sigma r(s)\,\mathrm{d}s}\cdot r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{N\int_0^t r(s)\,\mathrm{d}s}\frac{e^y}{N}\,\mathrm{d}y = \int_0^{NR(t)}\frac{e^y}{N}\,\mathrm{d}y = \frac{e^{NR(t)}-1}{N}.$$

Allora la soluzione generale per l'equazione differenziale in u è

$$u(t) = k \cdot e^{-NR(t)} + e^{-NR(t)} \left(\frac{e^{NR(t)} - 1}{N} \right) = \frac{1}{N} + \left(k - \frac{1}{N} \right) e^{-NR(t)}.$$

Di conseguenza la soluzione per l'equazione degli infettivi è

$$I(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \left(k - \frac{1}{N} \right) e^{-NR(t)}},$$

osservando che $R(0) = \frac{\chi}{N}(-1/2\pi + 1/2\pi) = 0$ si ha che

$$10 = I_0 = I(0) = \frac{1}{\frac{1}{N} + \left(k - \frac{1}{N} \right)} \implies k = \frac{1}{10}.$$

Il comportamento asintotico di $I(t)$ è regolato dall'esponente $R(t)$, il quale per $t \to \infty$ vale

$$\lim_{t \to \infty} R(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{\chi}{N} \left(t - \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t + \frac{1}{2\pi} \right) = +\infty,$$

ovvero $e^{-NR(t)} \to 0$, e allora $I(t) \to N$. L'andamento è riportato in Figura 17.2 per diversi valori della probabilità di contagio χ.