# Lezione 2 (25/09/2014)

---

Esercizi svolti a lezione

**Nota 1.** Ripassiamo le proprietà particolari di certe funzioni, le proprietÃ  dei logaritmi e la composizione di funzioni.

**Composizione di funzioni**

Date due funzioni $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, se $g(D_g) \subset D_f$ si definisce la composizione di $f$ con $g$ (nell'ordine) come

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$x \in D_g$.

**NB!** L'operazione di composizione **non** è commutativa

**Esercizio 1.** Date le funzioni $f(x) = x + \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ calcolare $f \circ g$, $g \circ f$ e $f \circ f$.

**Soluzione** Ricordando che $f \circ g(x) = f(g(x))$, abbiamo che

$$f \circ g(x) = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1}$$

che è definita ovunque tranne in $-2, -1$.

$$g \circ f(x) = \frac{((x+1)/x) + 1}{((x+1)/x) + 2)} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

che è definita ovunque tranne in $-1$ e

$$f \circ f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)/x} = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2+1)}$$

che è definita ovunque tranne in 0.

**Esercizio 2.** Assegnata la funzione $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ calcolare le seguenti composizioni.

$$f(-x) \quad f(1/x) \quad f(1/(1-x)) \quad f(f(x))$$

**Soluzione**

$f(-x) = \frac{1-x}{1+x}$

$f(1/x) = \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{1+x}{-1+x}$

$f(1/(1-x)) = \frac{1+\frac{1}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = \frac{x-2}{x}$

$f(f(x)) = \frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{x}$

**Esercizio 3.** Data la tabella

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 | 5 |
| $g(x)$ | 6 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 |

Valutare $(f \circ g)(1)$, $(g \circ f)(1)$, $(f \circ f)(1)$, $(g \circ g)(1)$, $(g \circ f)(3)$, $(f \circ g)(6)$

**Soluzione**

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(6) = 5$
$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 2$
$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(3) = 4$
$(g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(6) = 3$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 1$
$(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = 4$

**Nota 2.** Ricordiamo le funzioni con **proprietà particolari**.
Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbiamo che:

- se $f(-x) = f(x)$ la funzione si dice **pari**
- se $f(-x) = -f(x)$ la funzione si dice **dispari**
- se $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$ la funzione si dice **crescente**
- se $f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$ la funzione si dice **decrescente**

**Esercizio 4.** Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari o nessuna delle due.

$\frac{x}{1+x^2} \to$ dispari infatti $\frac{-x}{1+(-x)^2} = \frac{-x}{1+x^2} = -\frac{x}{1+x^2}$

$\frac{x^2+1}{1+x^4} \to$ pari

$\frac{x^3+1}{1+x^4} \to$ nessuna delle due

$x^5 + 1 \to$ nessuna delle due

$x(x+1) \to$ nessuna delle due

**Esercizio 5.** Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari o nessuna delle due.

$\sqrt[3]{x^3 - 1} \to$ nessuna delle due

$\frac{x}{1-x^2} \to$ dispari

$\frac{x^3+x}{1+x^4} \to$ dispari

$\frac{2x+1}{8x^2+1} \to$ nessuna delle due

$\frac{x^2}{\sqrt{x^4+5}} \to$ pari

$\frac{2x^2+1}{x^4+2} \to$ pari

**Nota 3.** Ricordiamo le proprietà dei logaritmi. Per definizione stessa di logaritmo vale che

$$x = a^{log_a x} \quad x = log_a(a^x)$$

Le proprietà sono:

$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$

$log_a(x/y) = log_a(x) - log_a(y)$

$log_a(x^y) = y \cdot log_a(x)$

$log_a(x) = \frac{log_c(x)}{log_c(a)}$

Le basi maggiormente utilizzate sono la base 10 e il **numero di Nepero** $e = 2.718...$ Il logaritmo in base $e$ è anche detto logaritmo naturale e si indica con $ln(x)$.

**Esercizio 6.** Sapendo che $log_{10}32 = \alpha$, determinare il valore di $log_{10}320000$.

**Soluzione** Applichiamo le proprietà dei logaritmi e abbiamo che

$$log_{10}320000 = log_{10}32 \cdot 10^4 = log_{10}32 + log_{10}10^4 = \alpha + 4$$

**NB!** Ricordiamo infatti che, per trovare il valore di $log_a b =?$ dobbiamo risolvere $a^? = b$

**Nota 4.** Vediamo come **trasformare un grafico**. Modificando la funzione in un modo opportuno, possiamo modificare il nostro grafico. Consideriamo $a > 0$:

**(a)** Traslazione del grafico lungo l'asse delle $x$ verso destra: $f(x-a)$

**(b)** Traslazione del grafico lungo l'asse delle $x$ verso sinistra: $f(x+a)$

**(c)** Traslazione del grafico lungo l'asse delle $y$ in alto: $f(x)+a$

**(d)** Traslazione del grafico lungo l'asse delle $y$ in basso: $f(x)-a$

**(e)** Simmetria rispetto l'asse delle $x$ : $-f(x)$

**(f)** Simmetria rispetto l'asse delle $y$ : $f(-x)$

**(g)** Riflessione della parte negativa del grafico lungo l'asse delle $x$ quando il grafico interseca l'asse delle x: $|f(x)|$

**Esercizio 7.** Dopo aver tracciato il grafico di $f(x) = \sqrt(x)$, dedurre i grafici di

$$-\sqrt{x} \quad -\sqrt{x+1} \quad |\sqrt{x}-1| \quad -\sqrt{|x-2|}$$

**Soluzione** Il grafico di $f(x)$ si ottiene come il grafico di un solo ramo della parabola $y = x^2$ ruotato di 90 gradi verso destra. Gli altri grafici si possono ottenere da quello di $f(x)$. Quello di $-\sqrt{x}$ è il simmetrico rispetto all'asse x, quello di $-\sqrt{x+1}$ dalla simmetria rispetto all'asse x seguito da una traslazione di 1 verso sinistra, quello di $|\sqrt{x}-1|$, per $x \geq 1$ è lo stesso di $f$ traslato a destra di 1, mentre per $0 \leq x < 1$ si ottiene per simmetria su x seguita da una traslazione verso l'alto di 1 (per $x < 0$ non è definita, se non sui numeri complessi), infine il grafico di $-\sqrt{|x-2|}$ si ricava da quello di $-\sqrt{x}$ per $x \geq 2$, per $x < 2$ dalla doppia riflessione del grafico di $-\sqrt{x}$ in x e in y, seguito da una traslazione.

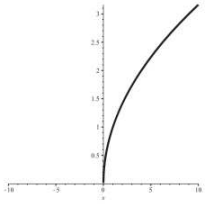


Figure 2.2: Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$

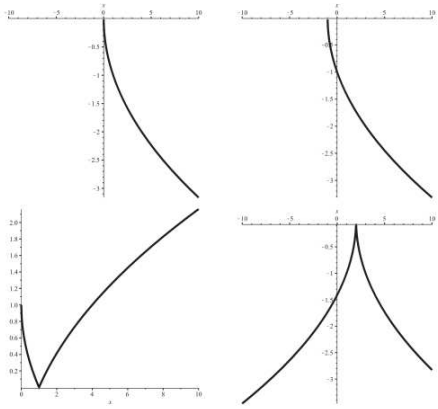
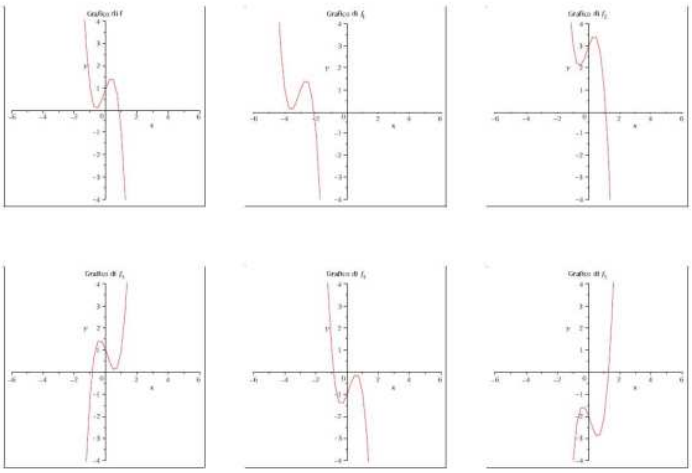


Figure 2.3: Il grafico delle funzioni $-\sqrt{x}$, $-\sqrt{x+1}$, $|\sqrt{x}-1|$, $-\sqrt{|x-2|}$.

**Esercizio 8.** I grafici delle funzioni riportate in Figura sono stati ottenuti da quello di $f$ mediante traslazioni e simmetrie, scrivere le funzioni in termini di $f$.



**Soluzione** I vari casi sono $f_1 = f(x+3)$, $f_2 = f(x)+2$, $f_3 = f(-x)$, $f_4 = f(x)-2$ e $f_5 = f(-x)-3$.

**Nota 5.** Ripassiamo le **funzioni quadratiche**. Le funzioni quadratiche corrispondono alla forma analitica

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$D = \mathbb{R}$ e il loro grafico è una parabola con asse verticale.

Se $a > 0$

1. $f(x)$ è pari
2. $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, 0]$ e crescente in $[0, +\infty)$
3. $f(x)$ ha minimo $m = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ in $x_m = -\frac{b}{2a}$
4. $f(x)$ è convessa

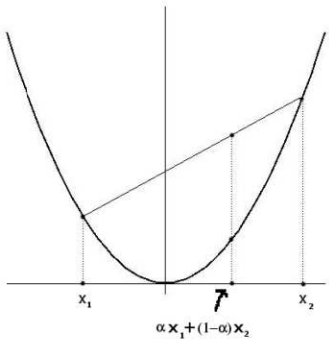
Ricordiamo che una funzione ha **minimo (massimo)** in $x_m$ ($x_M$) se

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in D \quad (f(x_M) \geq f(x) \quad \forall x \in D)$$

e che una funzione è **convessa** se, scelti $x_1$ e $x_2$ qualsiasi e $\alpha \in [0, 1]$, abbiamo che

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Se consideriamo la seguente figura




possiamo vedere che il grafico giace sotto al segmento passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Per verificarlo basta un semplice calcolo, come è stato fatto a lezione, che si basa sulla maggiorazione

$$x_1 x_2 \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Infatti, essendo in questo caso $f(x) = x^2$, abbiamo che

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 = \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1 x_2$$

$$\leq \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 + \alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2) = \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

**Esercizio 9.** Verificare se $f(x) = x^2 + x + 1$ è convessa.

**Soluzione** Procedendo in modo analogo a quanto fatto in classe utilizziamo la maggiorazione

$$x_1 x_2 \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

ed otteniamo

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 + 1 =$$

$$= \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1 x_2 + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 + 1$$

$$\leq \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 + \alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2) + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 + 1 =$$

$$= \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 + 1 =$$

$$= \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 + 1 + \alpha - \alpha =$$

$$= \alpha x_1^2 + \alpha x_1 + \alpha + (1-\alpha)x_2^2 + (1-\alpha)x_2 + (1-\alpha) =$$

$$= \alpha(x_1^2 + x_1 + 1) + (1-\alpha)(x_2^2 + x_2 + 1) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

**Esercizio 10.** Data la funzione convessa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostrare che sono convesse $g(x) = f(x) + 3$ e $h(x) = f(x+1)$.

**Soluzione** Dato che la convessità è invariante per traslazioni (non per rotazioni), e le $g$, $h$ sono traslazioni di $f$, continuano ad essere convesse. Vediamo che è così sapendo che per $f$ vale

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Abbiamo dunque

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + 3 \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) + 3,$$

d'altra parte si ha anche che

$$\alpha g(x_1)+(1-\alpha)g(x_2) = \alpha f(x_1)+3\alpha+(1-\alpha)f(x_2)+(1-\alpha)3 = \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)+3,$$

dunque $g$ è convessa.

Per quanto riguarda $h$, osserviamo che si ha,

$$\alpha(x_1+1)+(1-\alpha)(x_2+1) = \alpha x_1+\alpha+(1-\alpha)x_2+(1-\alpha) = \alpha x_1+(1-\alpha)x_2+1,$$

di conseguenza

$$h(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) = f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2+1) = f(\alpha(x_1+1)+(1-\alpha)(x_2+1)),$$

possiamo ora applicare la convessità di $f$ ,

$$f(\alpha(x_1+1)+(1-\alpha)(x_2+1)) \leq \alpha f(x_1+1)+(1-\alpha)f(x_2+1) = \alpha h(x_1)+(1-\alpha)h(x_2).$$

La dimostrazione è conclusa.

**Esercizio 11.** Trovare l'espressione esplicita delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano:

**(a)** $f(0) = 0$, $f(2) = 1$, $f(4) = 0$.

**(b)** $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(3) = 0$.

**(c)** $f(2) = -1$, $f(0) = 2$, ha massimo in $x = 0$.

**(d)** $f(0) = -1$, $f(1) = 2$, $f(x)$ è pari.

**Soluzione** Per risolvere questi problemi basta costruire un sistema lineare che tenga conto delle varie condizioni richieste. Supponiamo di scrivere $f(x) = ax2 + bx + c$, si tratta di determinare $a, b, c$ tali che:

**(a)** $f(0) = 0 = c$, $f(2) = 1 = 4a+2b+1$, $f(4) = 0 = 16a+4b$. Si ha $b = -4a$ e, sostituendo nelle altre equazioni, $4a-8a = 1$ e quindi $-4a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$,

quindi $b = 1$ e $c = 0$.

**(b)** $f(-1) = 0 = a-b+c$, $f(0) = 1 = c$, $f(3) = 0 = 9a+3b+c$. Si ha $a = b-1$ e, sostituendo nelle altre equazioni, $9(b-1)+3b+1 = 0 \Rightarrow 12b = 8 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$ . Dunque $a = -\frac{1}{3}$ e $c = 1$.

**(c)** $f(2) = -1 = 4a + 2b + c$, $f(0) = 2 = c$ e ha massimo in $x = 0$ che si esprime con $b = 0$.Risolvendo il sistema lineare si trova $a = -\frac{3}{4}$ , $b = 0$ e $c = 2$.

**(d)** $f(0) = -1 = c$, $f(1) = 2 = a + b - 1$ e $f(x)$ è pari, quindi $f(-1) = 2 = a - b - 1$. Dalla terza equazione, $a = b+3$ da cui $b+3+b-1 = 2 \Rightarrow 2b = 0$. Dunque $a = 3$, $b = 0$, $c = -1$.

**Esercizio 12.** Vogliamo recintare un campo rettangolare usando 900 m di filo spinato. Che dimensioni deve avere il campo perché abbia area massima? Quanto misura quest'area? Come si modifica il risultato se possiamo usare su un lato una lunga siepe (per cui devi utilizzare il filo spinato solo per gli altri tre lati)?

**Soluzione** Se $a$ e $b$ sono i lati del rettangolo, il perimetro si esprime come

$$P = 2(a + b) = 900,$$

da cui, risolvendo per una lato, diciamo per $b$, si ricava $b = 450 - a$.
L'area del campo è

$$A = ab = a(450 - a) = -a^2 + 450a$$

Questa funzione è una parabola con la concavità verso il basso, quindi la funzione area ammette massimo. Derivando l'espressione per $A$ si trova $-2a+450 = 0$

(**NB!** Ricordiamo che la **derivata** di $x^a$ è pari a $ax^{a-1}$ e che è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva e quindi, per essere un massimo, deve essere pari a 0 ovvero la tangente deve essere parallela all'asse delle $x$.)

Da cui $a = \frac{450}{2} = 225$. Questo implica $b = 225$, ovvero l'area del campo è massima a parità di perimetro quando il campo è quadrato di area

$$A = 225^2 = 50625m^2.$$

Se ora sostituiamo una lato del campo con la siepe, il filo spinato dovrà bastare a soddisfare $2a+b=900$, da cui $b=900-2a$. A questo punto l'area si riscrive come

$$A = ab = a(900-2a) = -2a^2 + 900a.$$

Derivando questa espressione e risolvendo per $a$, si trova $-4a = -900$, ovvero $a = 225$. Ciò implica $b = 450$ e l'area è

$$A = 225 \cdot 450 = 101250m^2.$$