1

LEZIONE 1

Esercizio 1.1. *Il* 15% *degli individui di una popolazione è stato colpito da un'epidemia. L'*8% *delle persone colpite è morto. Calcolare la mortalità rispetto all'intera popolazione.*

Bisogna calcolare l'8% del 15% della popolazione, ovvero $0.08 \cdot 0.15 = 0.012$, dunque il tasso di mortalità della malattia è dell'1.2%.

Esercizio 1.2. *La popolazione mondiale nel 1974 era costituita da circa* 3.8×10^9 *individui. Ogni settimana la popolazione mondiale è aumentata di* 1.4 *milioni di persone. Calcolare l'aumento percentuale annuale.*

La variazione percentuale di popolazione è data dalla formula

$$\text{var } \% = \frac{P_f - P_i}{P_i} \cdot 100,$$

dove P_i e P_f indicano rispettivamente la popolazione all'inizio dell'anno e alla fine dell'anno. Il termine P_f si calcola considerando che un anno è formato da 52 settimane, quindi

$$P_f = P_i + 52 \cdot 1.4 \cdot 10^6 = 3.8 \cdot 10^9 + 7.28 \cdot 10^7.$$

Di conseguenza la variazione percentuale annua è pari a

$$\text{var } \% = \frac{P_f - P_i}{P_i} \cdot 100 = \frac{7.28 \cdot 10^7}{3.8 \cdot 10^9} \cdot 100 \approx 1.916\%.$$

Esercizio 1.3. *La Terra è, approssimativamente, una sfera di circonferenza* $40\,000$ *Km. Supponiamo di avvolgere una corda attorno all'equatore. Ora, supponiamo di allungare tale corda (lunga* $40\,000$ *Km) di* 10 *m e di riavvolgerla attorno alla Terra in modo che la distanza fra la corda e il terreno sia uguale lungo tutto l'equatore. Un topo sarà adesso in grado di passare sotto la corda?*

Se la circonferenze della Terra è lunga quanto la corda, cioé $40\,000$ Km, allora il raggio della Terra sarà $R_T = 40000/2\pi \approx 6366.197722$ Km. Aumentando ora di 10 m la lunghezza della corda, il nuovo raggio diventa $R = 40000.01/2\pi \approx 6366.199314$ Km. La differenza tra i due raggi determina se il topo può passare sotto la corda, e si ha $R - R_T = 0.001592$ Km, ovvero 1.5 m e il topo passa comodamente.

Esercizio 1.4. *Il diametro di una molecola di H_2O è circa 2.5×10^{-10} m. In 1 mole $= 18$ grammi di acqua ci sono 6.02×10^{23} molecole (numero di Avogadro). Quale distanza si raggiungerebbe se si mettessero in fila tutte le molecole di una mole di H_2O?*

Poiché in una mole vi sono 6.02×10^{23} molecole di acqua, e dato che ogni molecola ha diametro 2.5×10^{-10}, mettendo tutte le molecole in fila si ottiene $6.02 \times 10^{23} \cdot 2.5 \times 10^{-10} = 1.505 \times 10^{14}$ m. Tale lunghezza corrisponde a circa mille volte la distanza media tra la Terra e il Sole.

Esercizio 1.5. *Calcolare le seguenti espressioni.*

(a) $6!/4! = 6 \cdot 5 = 30$.

(b) $97!/98! = 1/98$.

Esercizio 1.6. *Calcolare le seguenti espressioni.*

(a) $5!/4! = 5$.

(b) $2 + 1/2! + 1/3! + 1/4! = 65/24$.

Esercizio 1.7. *Risolvere le seguenti equazioni rispetto a x.*

(a) $x^2 = 2x \implies x = 0$ e $x = 2$.

(b) $x^3 = 3x^2 \implies x = 0, 0, 3$.

(c) $a^2x = x^3,\ a > 0 \implies x = 0, a, -a$.

Esercizio 1.8. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

(a) $x + 4 > 7 \implies x > 3$.

(b) $8 - y > 1 \implies y < 7$.

(c) $4(\gamma - 5) > 3(5 - \gamma) \implies \gamma > 5$.

(d) $1 - x^2 \leq (2 - x)(x + 1) \implies x \geq -1$.

(e) $2x^2 < 8 \implies -2 < x < 2$.

(f) $3 < u^2 \implies -\infty < u < -\sqrt{3}$ e $\sqrt{3} < u < \infty$.

(g) $x(x - 1) > 0 \implies -\infty < x < 0$ e $1 < x < \infty$.

(h) $(x - 1)(x + 2) > 0 \implies -\infty < x < -2$ e $1 < x < \infty$.

(i) $x^2 + 4x + 21 > 0 \implies \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(j) $2x^2 + x < 3 \implies -\dfrac{3}{2} < x < 1$.

(k) $4x^2 + 10x - 6 < 0 \implies -3 < x < \frac{1}{2}$.

(l) $x^2 + 2x + 4 > 0 \implies \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(m) $3x^2 - x - 4 \geq 0 \implies -\infty < x \leq -1$ e $\frac{4}{3} \leq x < \infty$.

(n) $2x + 8 > x^2 \implies -2 < x < 4$.

(o) $23x^6 + 5x^2 + 18 < 0 \implies \emptyset$.

(p) $x^2 - 6x + 9 > 0 \implies -\infty < x < 3$ e $3 < x < \infty$, ovvero $\mathbb{R} - \{3\}$.

(q) $2x^2 - 3x + 2 > 0 \implies \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.9. *Individuare nel piano i punti (x, y) per i quali:*

(a) $x < 2$.

(b) $x = -1$.

(c) $x + 2y < 0$.

I tre insiemi sono evidenziati in grigio, rispettivamente nei tre grafici di Figura 1.1.

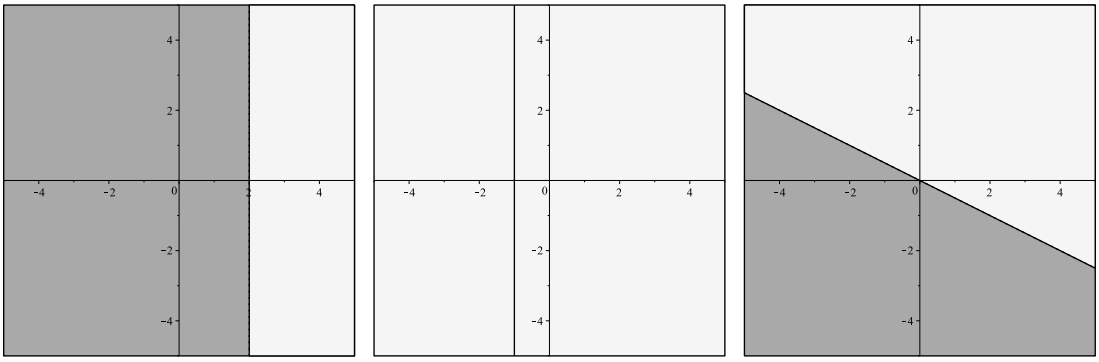

Figure 1.1: Rispettivamente i casi (a), (b) e (c).

Esercizio 1.10. *Sia $\boldsymbol{A}$ il punto di coordinate $(3, -1)$ e $\boldsymbol{B}$ il punto di coordinate $(-1, y)$. Trovare i valori di y per cui la distanza fra $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sia $\sqrt{20}$.*

Per il teorema di Pitagora, la distanza tra i due punti nel piano euclideo è data da

$$d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (-1 - y)^2} = \sqrt{y^2 + 2y + 17} = \sqrt{20}.$$

Da questa relazione si ricava, elevando al quadrato ambo i membri, che

$$y^2 + 2y + 17 = 20 \implies y = 1, -3.$$

Si nota (Figura 1.2), che sono due i punti che soddisfano la condizione richiesta.

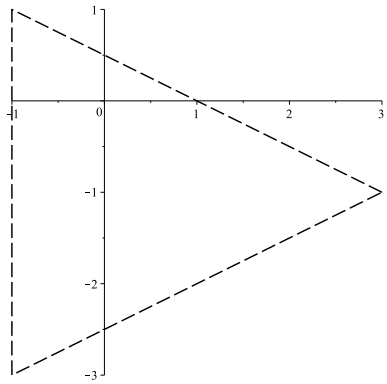

Figure 1.2: Il grafico mostra le due soluzioni, per la coordinata y del punto $\boldsymbol{B}$.

Esercizio 1.11. *Dato il punto $\boldsymbol{A}$ di coordinate $(1, 2)$, determinare le coordinate di un punto $\boldsymbol{B}$ tale che la distanza fra $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sia 4.*

Chiaramente, la soluzione non è unica, ve ne sono infinite, disposte intorno ad una circonferenza di raggio 4 e centro $\boldsymbol{A}$. Per il teorema di Pitagora, la distanza tra i due punti nel piano euclideo è data da

$$d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \sqrt{(1-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} = 4.$$

In effetti la formula precedente, elevando al quadrato i membri, rappresenta l'equazione di una circonferenza (Figura 1.3). Possiamo risolvere per y ad esempio,

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 16 \implies y = 2 \pm \sqrt{15 + 2x - x^2}.$$

Si può notare come la formula precedente abbia significato solo per $-3 \leq x \leq 5$, o equivalente-

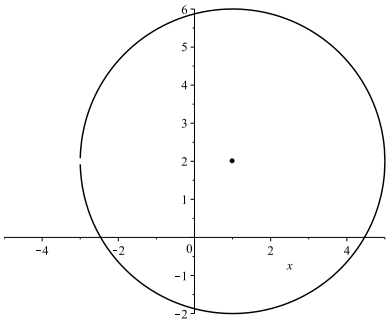

Figure 1.3: Il grafico mostra la famiglia di soluzioni (una circonferenza) per il punto $\boldsymbol{B}$.

mente, se si risolve la x in funzione di y, per $-2 \leq y \leq 6$.

Esercizio 1.12. *Mostrare che*

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j+\alpha)=\sum_{j=1}^{n}x_j+n\alpha.$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j+\alpha)^2=\sum_{j=1}^{n}x_j^2+2\alpha\sum_{j=1}^{n}x_j+n\alpha^2.$

Entrambi i casi richiesti coinvolgono somme di un numero finito di termini, quindi si può applicare tranquillamente la proprietà commutativa delle somme.

(a) Vediamo il primo caso:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(x_j+\alpha) &= x_1+\alpha+x_2+\alpha+\ldots+x_n+\alpha\\ &= x_1+x_2+\ldots+x_n+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha\\ &= \sum_{j=1}^{n}x_j+n\alpha.\end{aligned}$$

(b) Per il secondo caso si ha:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(x_j+\alpha)^2 &= x_1^2+2\alpha x_1+\alpha^2+x_2^2+2\alpha x_2+\alpha^2+\ldots+x_n^2+2\alpha x_n+\alpha^2\\ &= x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2\alpha(x_1+x_2+\ldots+x_n)+\alpha^2+\alpha^2+\ldots+\alpha^2\\ &= \sum_{j=1}^{n}x_j^2+2\alpha\sum_{j=1}^{n}x_j+n\alpha^2.\end{aligned}$$

Esercizio 1.13. *Qual è la relazione fra gli insiemi* $A=\{t\in\mathbb{R}|0<t<3\}$ *e* $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right\}$*?*

Si ha che $B\subset A$.

Esercizio 1.14. *Trovare gli insiemi delle soluzioni per le seguenti equazioni e disequazioni.*

(a) $\{t\in\mathbb{R}|t+7<12\}$. Risolvendo, l'insieme delle soluzioni è $\{t\in\mathbb{R}|t<5\}$.

(b) $\{x\in\mathbb{R}|x=3(x+3)-x\}$. Risolvendo, l'insieme delle soluzioni è $\{x\in\mathbb{R}|x=-9\}$.

(c) $\{u\in\mathbb{R}|u^2<16\}$. Risolvendo, l'insieme delle soluzioni è $\{u\in\mathbb{R}|u\in(-4,4)\}$.

(d) $\{x\in\mathbb{R}|(x-3)(x+2)=x^2\}$. Risolvendo, l'insieme delle soluzioni è $\{x\in\mathbb{R}|x=-6\}$.

Esercizio 1.15. *Determinare graficamente l'intersezione e l'unione degli insiemi*

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y-5>0\}\qquad e\qquad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x-2y+2>0\}.$$

Determinare inoltre il complementare di $A\cap B$ *in* $\mathbb{R}^2$.

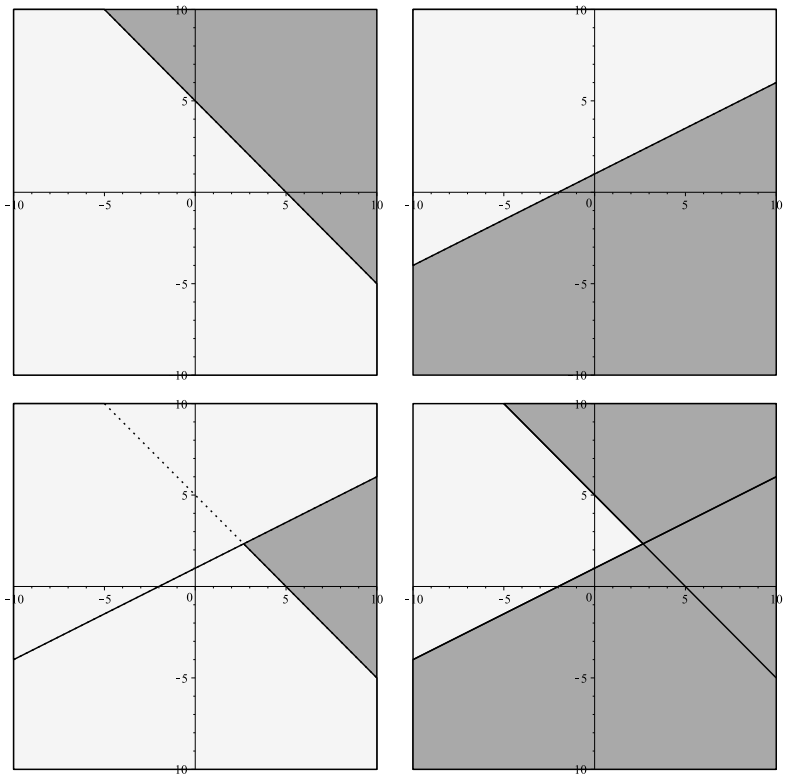

Figure 1.4: In alto: A sinistra la rappresentazione (in grigio) dell'insieme A, a destra l'insieme B. In basso: A sinistra la rappresentazione (in grigio) dell'insieme $A \cap B$, a destra l'insieme $A \cup B$. Il grafico a sinistra (in bianco) indica il complementare dell'intersezione $A \cap B$.

I grafici richiesti sono in Figura 1.4.

Esercizio 1.16. *Risolvere le seguenti equazioni.*

(a) $|x-5| = 7$. Si inizia dividendo i casi $x-5 \geq 0$ e $x-5 < 0$.

- $x-5 \geq 0 \implies x-5 = 7 \implies x = 12$. Questa soluzione soddisfa $x-5 \geq 0$ e quindi è accettabile.
- $x-5 < 0 \implies -x+5 = 7 \implies x = -2$. Anche questa soluzione è compatibile con l'ipotesi $x-5 < 0$.

Le due soluzioni dell'equazione sono dunque $x = -2, 12$.

(b) $|3x+2| = 1$. Questa si risolve similmente alla precedente, le soluzioni sono $x = -\dfrac{1}{3}, -1$.

(c) $|x+2| - 2|x-3| = 1$. In questo caso bisogna studiare il segno delle due espressioni contenute nei valori assoluti, ci sono quattro possibilità. Il grafico della funzione è riportato in Figura 1.5.

- $x+2 \geq 0$ e $x-3 \geq 0$. Risolvendo questo sistema di due disequazioni si trova una condizione su x che deve essere soddisfatta dalla soluzione dell'equazione. Si ha

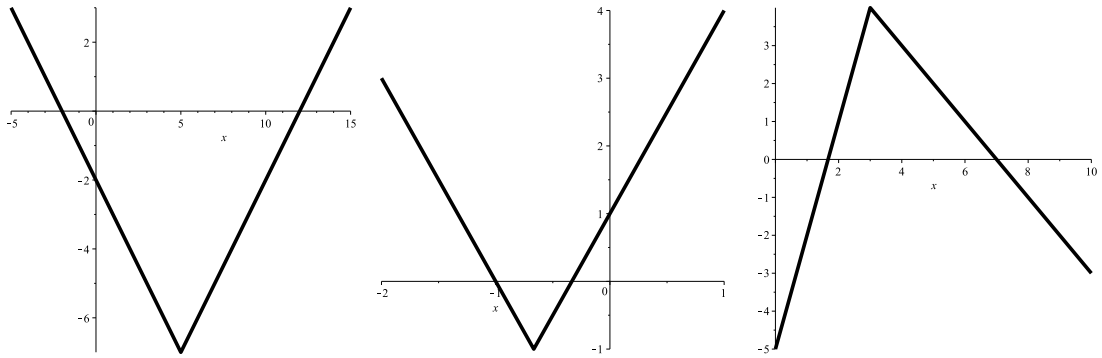

Figure 1.5: I grafici delle tre funzioni, da sinistra rispettivamente (a), (b) e (c).

che $x \geq -2$ e $x \geq 3$, mettendo insieme queste due condizioni, si trova che x deve soddisfare $x \geq 3$. Questo permette di scrivere l'equazione come

$$x + 2 - 2(x - 3) - 1 = 0 \implies -x + 7 = 0 \implies x = 7.$$

Questa è quindi una soluzione accettabile.

- $x + 2 \geq 0$ e $x - 3 < 0$. Risolvendo questo sistema di due disequazioni si trova una condizione su x che deve essere soddisfatta dalla soluzione dell'equazione. Si ha che $x \geq -2$ e $x < 3$, mettendo insieme queste due condizioni, si trova che x deve soddisfare $-2 \leq x < 3$. Questo permette di scrivere l'equazione come

$$x + 2 - 2(-x + 3) - 1 = 0 \implies 3x - 5 = 0 \implies x = \frac{5}{3}.$$

Questa è quindi una soluzione accettabile.

- $x + 2 < 0$ e $x - 3 \geq 0$. Risolvendo questo sistema di due disequazioni si trova una condizione su x che deve essere soddisfatta dalla soluzione dell'equazione. Si ha che $x < -2$ e $x \geq 3$, mettendo insieme queste due condizioni, si trova un assurdo e non serve continuare. L'equazione associata diventerebbe

$$-x - 2 - 2(x - 3) - 1 = 0 \implies -3x + 5 = 0 \implies x = \frac{5}{3}.$$

Questa non è quindi una soluzione accettabile.

- $x + 2 < 0$ e $x - 3 < 0$. Risolvendo questo sistema di due disequazioni si trova una condizione su x che deve essere soddisfatta dalla soluzione dell'equazione. Si ha che $x < -2$ e $x < 3$, mettendo insieme queste due condizioni, si trova che x deve soddisfare $x < -2$. Questo permette di scrivere l'equazione come

$$-x - 2 - 2(-x + 3) - 1 = 0 \implies x = 9.$$

Questa non è quindi una soluzione accettabile, rimangono solo $x = \frac{5}{3}, 7$.

Esercizio 1.17. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

(a) $|x-2|>1, \implies -\infty<x<1$ e $3<x<\infty$.

(b) $|6x+1|<-1, \implies \emptyset$.

(c) $|x+2|+2|x-3|>-2, \implies \forall\, x\in\mathbb{R}$ (Figura 1.6).

(d) $|x+2|>|x-1|, \implies -\dfrac{1}{2}<x<\infty$ (Figura 1.6).

(e) $x^2-|2x-1|>0$.

- $2x-1\geq 0$, ovvero $x\geq\frac{1}{2}$, da cui la disequazione diventa $x^2-2x+1>0$. Questa funzione ha come zero $x=1$ con molteplicità doppia, la parabola associata ha la concavità verso l'alto, dunque le soluzioni della disequazione sono $(-\infty,1)\cup(1,\infty)=\mathbb{R}-\{1\}$, ma va considerata solo per $x\geq\frac{1}{2}$.
- L'altro caso da considerare è per $x<\frac{1}{2}$, la disequazione diventa $x^2+2x-1>0$. Questa funzione ha per zeri $x=-1\pm\sqrt{2}$, la parabola associata ha la concavità verso l'alto, quindi la soluzione è $(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},\infty)$, tuttavia, per l'ipotesi fatta, va considerata solo per $x<\frac{1}{2}$.

In conclusione come soluzione bisogna unire gli intervalli dati dal primo e dal secondo, rispettivamente, $[\frac{1}{2},1)\cup(1,\infty)$ e $(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},\frac{1}{2})$, ovvero con una facile semplificazione $(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},1)\cup(1,\infty)$. (Figura 1.6)

(f) $2x^2-|4x+3|>0, \implies -\infty<x<1-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ e $1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}<x<\infty$.

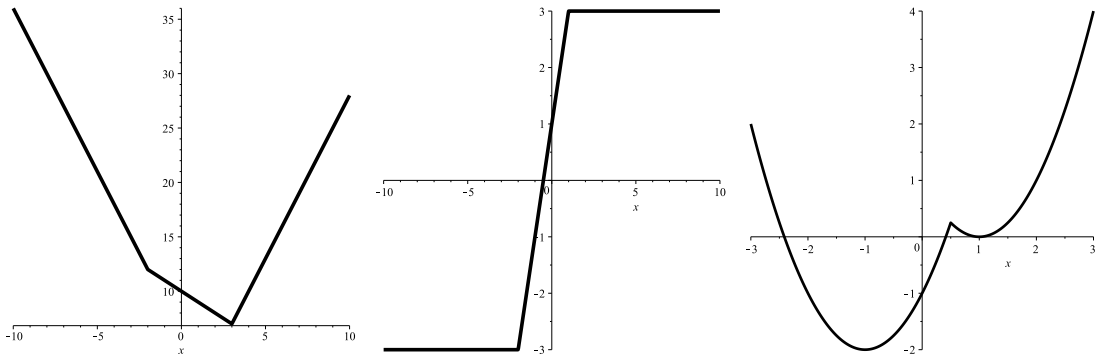

Figure 1.6: I grafici delle tre funzioni, da sinistra rispettivamente (c), (d) e (e).

Esercizio 1.18. *Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni.*

(a) $\begin{cases} x & > & -2 \\ -x & > & -1 \end{cases} \implies -2<x<1.$

(b) $\begin{cases} 3x & \geq & 4 \\ 4x & \leq & 7 \end{cases} \implies \frac{4}{3} < x < \frac{7}{4}.$

(c) $\begin{cases} (x+1)(x-3) & > & 0 \\ (x+4)(x-6) & \leq & 0 \end{cases} \implies -4 \leq x < -1 \text{ e } 3 < x \leq 6.$

(d) $\begin{cases} 2x^2 & \leq & 6x \\ 4x & > & 1 \end{cases} \implies \frac{1}{4} < x \leq 3.$

Esercizio 1.19. *Rappresentare sul piano cartesiano (x, y) i seguenti insiemi.*

(a) $A = \{y - |2x+1| > 0\}$ (in bianco in Figura 1.7 a sinistra).

(b) $B = \{2y + |x-1| > 0\}$ (in grigio in Figura 1.7 a destra).

(c) $C = \{x + y \leq 10\} \cap \{x \geq 1\}$ (in grigio in Figura 1.8 a sinistra).

(d) $D = \{x + 2y \geq 8\} \cap \{y \geq 2\}$ (in grigio in Figura 1.8 al centro).

(e) $E = C \cap D$ (in grigio in Figura 1.8 a destra).

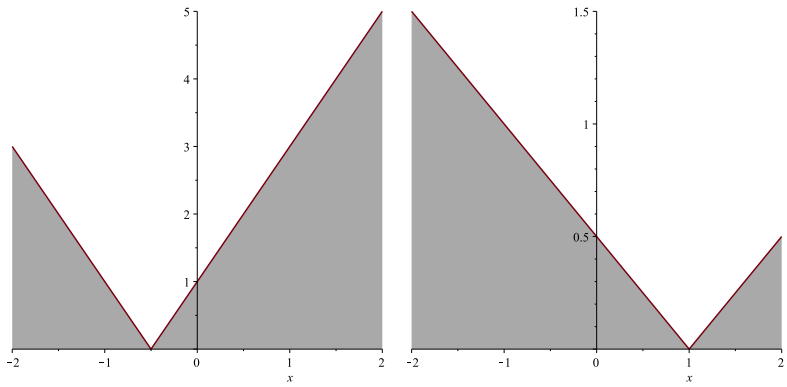

Figure 1.7: I grafici degli insiemi, da sinistra rispettivamente (a) e (b).

Esercizio 1.20. *Quali sono i domini delle seguenti funzioni?*

(a) $\dfrac{2}{(x^2+1)} \implies x \in \mathbb{R}.$

(b) $\sqrt{-x} \implies x \leq 0.$

(c) $\sqrt{4-x^2} \implies 4 - x^2 \geq 0 \implies -2 \leq x \leq 2.$

(d) $\dfrac{1}{(x^2-4)} \implies x \neq \pm 2.$

(e) $\sqrt{x^2} \implies x \in \mathbb{R}.$

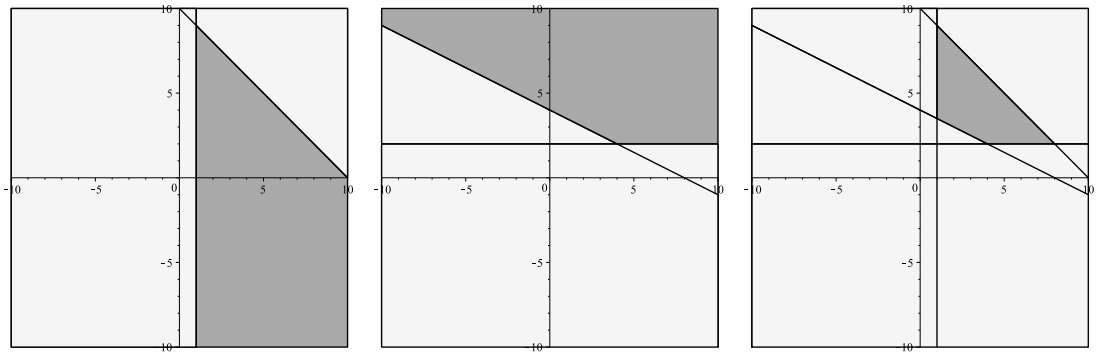

Figure 1.8: I grafici degli insiemi, da sinistra rispettivamente (c) (d) ed (e).

(f) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1} \implies \{x \neq \pm 1\} \cap \{x \geq 0\} \implies \{x \geq 0\} - \{x = 1\}$.

Esercizio 1.21. *Data la funzione $f(x) = x^2$ determinare l'immagine $f(D)$ se il dominio D è:*

(a) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \implies f(D) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$.

(b) $D = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\} \implies f(D) = [0, 1]$.

(c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\} \implies f(D) = [0, \infty)$.

(d) $D = \mathbb{R} \implies f(D) = [0, \infty)$.

Esercizio 1.22. *Data la funzione $f(x) = x^3$ determinare l'immagine $f(D)$ se il dominio D è:*

(a) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \implies f(D) = \{-8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, 125\}$.

(b) $D = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\} \implies f(D) = [-1, 1]$.

(c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\} \implies f(D) = (-\infty, 0]$.

(d) $D = \mathbb{R} \implies f(D) = \mathbb{R}$.