2

LEZIONE 2

Esercizio 2.1. *Stabilire se le sequenti funzioni sono iniettive*

(a) $1 + 4x - x^2$. Cercando di ottenere l'inversa si ha che $y = 1 + 4x - x^2$ da cui

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(y-1)}}{2},$$

e si vede che ci sono coppie di punti che danno lo stesso valore, a causa della radice quadrata.

(b) $\sqrt{x}$. Si ha che $y = \sqrt{x} \implies x = y^2$ che ha un'unica soluzione.

(c) L'altezza di una persona. In genere si ha che una persona cresca a partire dalla nascita fino ad un certo punto, quando nella vecchiaia, tende a incurvarsi e quindi diminuire, anche se di poco, la propria altezza. Ci sarà quindi una certa altezza che un uomo raggiungerà in due istanti diversi.

(d)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2	2	2.5	6	5

Si vede che il valore 2 è stato assunto sia per 2 che per 3, quindi non è iniettiva.

(e)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2	2.8	2.5	6	5

Si vede che non ci sono valori assunti due volte, quindi è iniettiva.

Esercizio 2.2. *Stabilire per le sequenti funzioni il dominio, l'immagine e se sono iniettive.*

(a) $\dfrac{1+x}{2x+1}$. L'unico problema col dominio si ha dove il denominatore si annulla, ovvero quando $2x + 1 = 0$, cioè $D = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$. Per l'immagine e l'iniettività si considera

$$y = \frac{1+x}{2x+1} \implies 1 + x = y(2x+1) \implies 1 + x - 2xy - y = 0,$$

risolvendo la precedente per x si ricava che

$$x(1-2y) = y - 1 \implies x = \frac{y-1}{1-2y}.$$

Da qui si vede che la soluzione è unica, quindi la funzione è iniettiva, per quanto riguarda l'immagine, si vede che sono assunti tutti i valori di $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

(b) $\dfrac{1}{2+x}$. Per dominio ha $\mathbb{R} - \{-2\}$, cercando di invertire la funzione si ha $1 = 2y + xy \implies x = \frac{1-2y}{y}$, quindi la funzione è iniettiva e ha come immagine $\mathbb{R} - \{0\}$.

(c) $x|x|$. Conviene sviluppare il valore assoluto, e riscrivere la funzione come

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Si vede dunque che il dominio è dato da tutti i numeri reali, così come anche l'immagine, inoltre è iniettiva.

(d) $x^3 + 1$. Dominio e immagine sono i numeri reali, l'inversa dà $x = \sqrt[3]{y-1}$ che ha soluzione unica (sui reali), quindi è iniettiva.

Esercizio 2.3. *Quali delle seguenti funzioni sono iniettive?*

(a) $x^3 - 3$. Si ha che $x = \sqrt[3]{y+3}$ che ha un'unica radice reale, quindi è iniettiva.

(b) $6x^2 - 1$. Si ha che $x = \sqrt{\dfrac{y+1}{6}}$ che, quando la radice ha senso, ovvero per $y > -1$, ha due radici reali, quindi non è iniettiva.

(c) $x^{1/5}$. Il dominio è $x \geq 0$, invertendola $x = y^5$ che ha soluzione unica, quindi è iniettiva.

(d) $x^3 - 2x$. Si ha che $f(x) = x(x^2 - 2) = y$, in particolare, $y = 0$ è assunto per $x = 0, \pm\sqrt{2}$, quindi non è iniettiva.

(e) $\dfrac{1}{x^2+1}$. Si ha che $x = \sqrt{\dfrac{1-y}{y}}$, dunque ci sono due radice reali, quindi non è iniettiva. In alternativa si poteva osservare che $f(x) = f(-x)$ ovvero la funzione è pari.

(f) $x^4 + \sqrt{x^2+7}$. Si può osservare che $f(x) = f(-x)$ ovvero la funzione è pari.

Esercizio 2.4. *Trova le funzioni inverse delle funzioni iniettive dell'esercizio precedente.*

Le inverse sono date rispettivamente nei casi (a) e (c).

Esercizio 2.5. *Per ogni funzione non iniettiva dell'esercizio precedente trova un opportuno dominio in corrispondenza del quale, per restrizione, la funzione risulti iniettiva.*

(b) $6x^2 - 1$. Due domini in cui restringere la funzione rendendola iniettiva sono $x \geq 0$ e $x \leq 0$.

(d) $x^3 - 2x$. Si ha che $f(x) = x(x^2 - 2) = y$. Chiaramente vanno bene gli intervalli $x \leq -\sqrt{2}$ e $x \geq \sqrt{2}$. Facendo uno studio di funzione più approfondito, che richiede tuttavia la conoscenza delle derivate, si può mostrare che i tre domini più ampi in cui la restrizione è iniettiva sono $x \leq -\sqrt{6}/3$, $-\sqrt{6}/3 \leq x \leq \sqrt{6}/3$ e $x \geq \sqrt{6}/3$ (Figura 2.1).

(e) $\dfrac{1}{x^2+1}$. Due domini in cui restringere la funzione rendendola iniettiva sono $x \geq 0$ e $x \leq 0$ (Figura 2.1).

(f) $x^4 + \sqrt{x^2+7}$. Due domini in cui restringere la funzione rendendola iniettiva sono $x \geq 0$ e $x \leq 0$ (Figura 2.1).

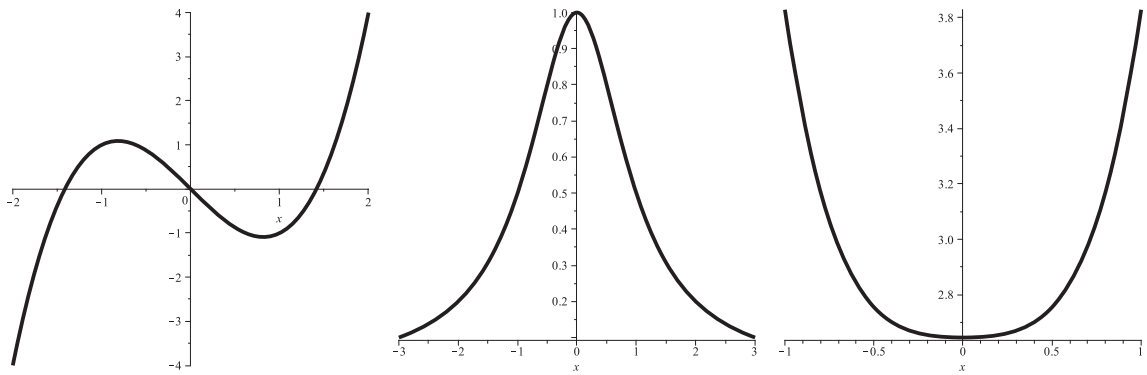

Figure 2.1: I grafici delle funzioni, da sinistra rispettivamente, (d) (e) ed (f).

Esercizio 2.6. *Date le funzioni* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *e* $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ *calcolare* $f \circ g$, $g \circ f$ *e* $f \circ f$.

Ricordando che $f \circ g(x) = f(g(x))$, si ha che $f \circ g(x) = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1}$ che è definita ovunque tranne dove si annullano i due denominatori, ovvero in -2 e -1; $g \circ f(x) = \frac{x+1/x+1}{x+1/x+2} = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$ è definita su $\mathbb{R} - \{-1\}$ ed infine $f \circ f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1/x} = \frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+1)}$ è definita su $\mathbb{R} - \{0\}$.

Esercizio 2.7. *Assegnata la funzione* $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ *calcolare le seguenti composizioni.*

- $f(-x)$. Si ha che $f(-x) = \frac{1-x}{1+x}$.
- $f(1/x) = \frac{1+1/x}{1-1/x} = \frac{1+x}{-1+x}$.
- $f(1/(1-x)) = \dfrac{1 + \frac{1}{1-x}}{1 - \frac{1}{1-x}} = \dfrac{x-2}{x}$.
- $f(f(x)) = \dfrac{1 + \frac{1+x}{1-x}}{1 - \frac{1+x}{1-x}} = -\dfrac{1}{x}$.

Esercizio 2.8. *Data la tabella*

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

valutare $(f \circ g)(1)$, $(g \circ f)(1)$, $(f \circ f)(1)$, $(g \circ g)(1)$, $(g \circ f)(3)$, $(f \circ g)(6)$.

Si ha che $(f \circ g)(1) = 5$, $(g \circ f)(1) = 2$, $(f \circ f)(1) = 4$, $(g \circ g)(1) = 3$, $(g \circ f)(3) = 1$, $(f \circ g)(6) = 4$.

Esercizio 2.9. *Scrivere la funzione* $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ *come composizione di tre altre funzioni.*

Ragionando dall'esterno verso l'interno, ci sarà bisogno di una funzione frazione $f(x) = \frac{1}{x}$, di una funzione radice quadrata $g(x) = \sqrt{x}$ e di una funzione somma $h(x) = x + \sqrt{x}$. Ora si può verificare che la composizione $(f \circ g \circ h)(x)$ è proprio la funzione cercata.

Esercizio 2.10. *Per trovare la temperatura in gradi centigradi C dalla temperatura in gradi Fahrenheit F, si usa a seguente procedura: si sottrae 32 a F, poi si moltiplica il risultato per 5 e lo si divide per 9. Scrivere tale regola in forma di relazione lineare fra F e C.*

Si ha che $C = \dfrac{5(F-32)}{9}$.

Esercizio 2.11. *Trovare l'espressione analitica della funzione che rappresenta:*

(a) la metà superiore della circonferenza di equazione $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

(b) la metà inferiore della parabola di equazione $x + (y-1)^2 = 0$.

(c) il segmento che unisce i punti $(2, -4)$ e $(4, -5)$.

I tre casi sono, rispettivamente:

(a) $y = +\sqrt{1-(x-1)^2}$.

(b) $y = \dfrac{2+\sqrt{4-4(x+1)^2}}{2}$.

(c) La retta che passa per quei punti si scrive $y = mx + q$, con $m = \frac{-5+4}{4-2} = -\frac{1}{2}$, la q si ricava da $q = y - mx$. Valutando la precedente nel primo punto si ha $q = -4 + \frac{1}{2} \cdot 2 = -3$. Dunque il segmento si può rappresentare con $y = -\frac{1}{2}x - 3$. In alternativa si può parametrizzare direttamente il segmento con una funzione $f(t)$ con $t \in [0, 1]$ in modo che $f(0) = -4$ e $f(1) = -5$. La $f(t) = at + b$, quindi basta risolvere il sistema $b = -4$ e $a + b = -5$, che risulta in $a = -1$ e $b = -4$.

Esercizio 2.12. *Una scatola aperta di volume $2m^3$ ha la base quadrata, determinare la superficie della scatola in funzione del lato di base.*

Il volume della scatola è $V = l^2 h = 2$ dove l è il lato della base quadrata e h l'altezza del bordo. La superficie si esprime come $S = 4lh + l^2$. A questo punto basta ricavare l'altezza in funzione del lato e del volume dalla prima formula e sostituirla nella seconda. In particolare si ha

$$h = \frac{V}{l^2} \implies S = 4lh + l^2 = 4l \cdot \frac{2}{l^2} + l^2 = \frac{8}{l} + l^2.$$

Esercizio 2.13. *Un contadino ha a disposizione 20 m di rete con cui costruire un pollaio rettangolare, di cui uno dei lati è costituito dal muro della stalla. Scrivere l'area del pollaio in funzione della lunghezza del lato parallelo al muro della stalla.*

Il perimetro del pollaio si scrive $P = 2a + b = 20$ dove a e b sono i due lati, b quello parallelo al muro della stalla. L'area è data da $A = ab$, ora basta ricavare a dalla prima formula, $a = \frac{20-b}{2}$, e usarla in quella per l'area: $A = ab = \frac{20-b}{2}b$.

Esercizio 2.14. *Il perimetro di un triangolo rettangolo è 6, esprimere l'area del triangolo in funzione della sua ipotenusa.*

Chiamando b, h, l, i due cateti e l'ipotenusa del triangolo rettangolo, si ha che

$$P = b + h + l = 6 \implies b + h = 6 - l.$$

Per il teorema di Pitagora si ha che $l^2 = b^2 + h^2$. Ora sfruttando i prodotti notevoli,

$$(b+h)^2 = b^2 + h^2 + 2bh \implies bh = \frac{(b+h)^2 - (b^2+h^2)}{2} = \frac{(6-l)^2 - l^2}{2}.$$

Ora l'area del triangolo rettangolo di cateti b e h si scrive

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{(6-l)^2 - l^2}{4}.$$

Esercizio 2.15. *(a) Scrivere in formula la funzione che associa a x il suo stesso valore diminuito di 3 unità e poi diviso per x.*

(b) Scrivere in formula la funzione che associa a x il suo stesso valore diviso per il doppio di $x - 1$.

(c) Descrivere in formula, la relazione tra il numero di larici e di pini in un bosco se ci sono 7 pini per ogni larice.

(a) $x \mapsto \dfrac{x-3}{x} = 1 - \dfrac{3}{x}$.

(b) $x \mapsto \dfrac{x}{2(x-1)}$.

(c) $p = 7l$.

Esercizio 2.16. *Le scale di temperature Celsius e Kelvin usano la stessa unità di misura, però la scala Kelvin ha lo zero che coincide con lo zero assoluto, cioè $-273.15°C$.*

(a) Se T indica la temperatura Celsius e τ quella nella scala Kelvin, scrivere la legge $\tau = \tau(T)$ che traduce il valore della temperatura T in gradi Celsius nel valore τ in Kelvin.

(b) Qual è il dominio di definizione di questa funzione?

(c) Il punto $(0, 273.15)$ appartiene al grafico di τ?

(d) Il punto $(273.15, 0)$ appartiene al grafico di τ?

(e) Tra i punti $(0, 273.15)$ e $(273.15, 0)$, quale appartiene al grafico di T?

(a) $\tau(T) = T + 273.15$.

(b) $T \in [-273.15, \infty)$.

(c) Sì, è il punto in cui la retta $\tau(T)$ taglia l'asse delle τ.

(d) No.

(e) Solamente il secondo, è il punto in cui la retta $T(\tau) = \tau - 273.15$ taglia l'asse delle T.

Esercizio 2.17. *La legge $h(t) = -\frac{gt^2}{2} + h_0$ descrive come varia la distanza dal suolo di un corpo pesante che, nel vuoto, cade da un'altezza h_0 con una velocità iniziale nulla.*

(a) Qual è il dominio della funzione $h(t)$?

(b) Quanto tempo impiega il corpo a toccare terra?

(c) Il tempo che il corpo impiega a toccare terra è funzione dell'altezza da cui viene lasciato cadere?

(d) Se il corpo impiega esattamente T secondi per cadere, quale dev'essere l'altezza iniziale?

(a) Il dominio è $t \geq 0$ fino al tempo T in cui il corpo tocca terra, a quel punto la legge non è più valida, così come prima del tempo iniziale in cui viene lasciato libero.

(b) Bisogna risolvere $h(t) = 0$, ovvero $t = +\sqrt{2h_0/g}$.

(c) Sì, l'altezza iniziale condiziona il tempo di caduta.

(d) Sapendo che $h(T) = 0$, per trovare l'altezza iniziale basta invertire la formula, $h_0 = \frac{1}{2}gT^2$.

Esercizio 2.18. *Dopo aver tracciato il grafico di $f(x) = \sqrt{x}$, dedurre da esso i grafici di*

$$-\sqrt{x} \qquad -\sqrt{x+1} \qquad |\sqrt{x} - 1| \qquad -\sqrt{|x-2|}.$$

Il grafico di $f(x)$ si ottiene come il grafico di un solo ramo della parabola $y = x^2$ ruotato di $90°$ verso destra, Figura 2.2. Gli altri grafici si possono ottenere da quello di $f(x)$. Quello di $-\sqrt{x}$ è il simmetrico rispetto all'asse x, quello di $-\sqrt{x+1}$ dalla simmetria rispetto all'asse x seguito da una traslazione di 1 verso sinistra, quello di $|\sqrt{x} - 1|$, per $x \geq 1$ è lo stesso di f traslato a destra di 1, mentre per $0 \leq x < 1$ si ottiene per simmetria su x seguita da una traslazione verso l'alto di 1 (per $x < 0$ non è definita, se non sui numeri complessi), infine il grafico di $-\sqrt{|x-2|}$ si ricava da quello di $-\sqrt{x}$ per $x \geq 2$, per $x < 2$ dalla doppia riflessione del grafico di $-\sqrt{x}$ in x e in y, seguito da una traslazione. I vari grafici sono presentati rispettivamente in Figura 2.3.

Esercizio 2.19. *Tracciare il grafico approssimato delle seguenti funzioni.*

Non discuteremo qui in modo approfondito lo studio di funzione, ma, data la semplicità delle funzioni, ci limiteremo a dedurre le informazioni necessarie per tracciare il loro grafico.

(a) $f(x) = |2 - |x||$. Si comincia discutendo il segno del valore assoluto più esterno, distinguendo il caso

- $2 - |x| \geq 0$. Questo caso implica $|x| \leq 2$ ovvero $x \in [-2, 2]$. In questo caso si può levare il primo modulo e concentrarsi sul secondo, l'equazione diventa $2 - |x|$. Per questo secondo valore assoluto bisogna distinguere $x \geq 0$, nel qual caso bisogna

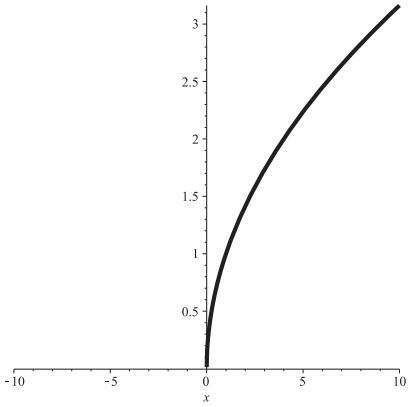

Figure 2.2: Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$

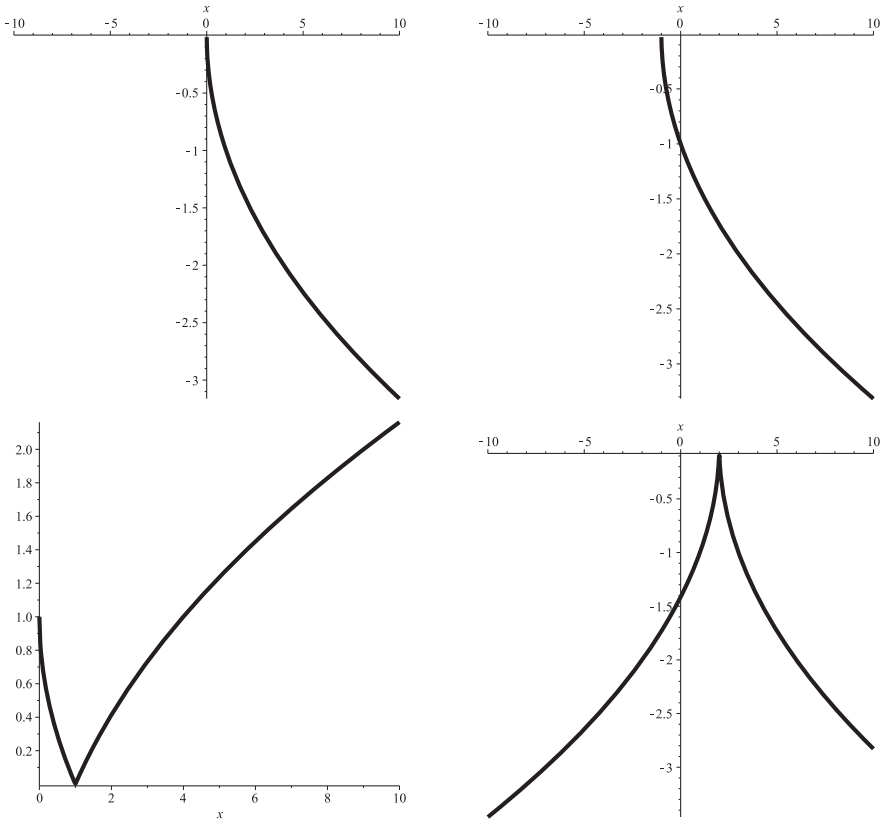

Figure 2.3: Il grafico delle funzioni $-\sqrt{x}$, $-\sqrt{x+1}$, $|\sqrt{x} - 1|$, $-\sqrt{|x-2|}$.

disegnare la funzione $f(x) = 2 - x$ per $x \in [0, 2]$, e $x < 0$, quindi $f(x) = 2 + x$ per $x \in [-2, 0)$.

- $2 - |x| < 0$. In questo caso la condizione sulla x permette $-\infty < x < -2$ e $2 < x < \infty$. Passando al secondo modulo, se $x \geq 0$ allora $f(x) = -2 + x$ per $2 < x < \infty$; mentre $f(x) = -2 - x$ per $-\infty < x < -2$.

Ora ci sono tutte le informazioni per disegnare la funzione $f(x) = |2 - |x||$ (Figura 2.4).

(b) $f(x) = -(x-1)^3$. Questo grafico corrisponde a quello di x^3 traslato a destra di 1 e specchiato rispetto all'asse x (Figura 2.4).

(c) $f(x) = |4 - x^2|$. Basta discutere il valore assoluto: se $4 - x^2 \geq 0$, cioè $-2 \leq x \leq 2$ allora $f(x) = 4 - x^2$; se $4 - x^2 < 0$ allora $f(x) = x^2 - 4$. Il grafico risultante è quello di due parabole con vertice sull'asse y, (Figura 2.4).

(d) $f(x) = 2 - |4 - x^2|$. Il ragionamento da fare è simile all'esercizio precedente: per $-2 \leq x \leq 2$ si ha $f(x) = 2 - 4 + x^2 = x^2 - 2$, mentre per $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ si ha $f(x) = 2 - 2(-4 + x^2) = -x^2 + 6$, (Figura 2.4).

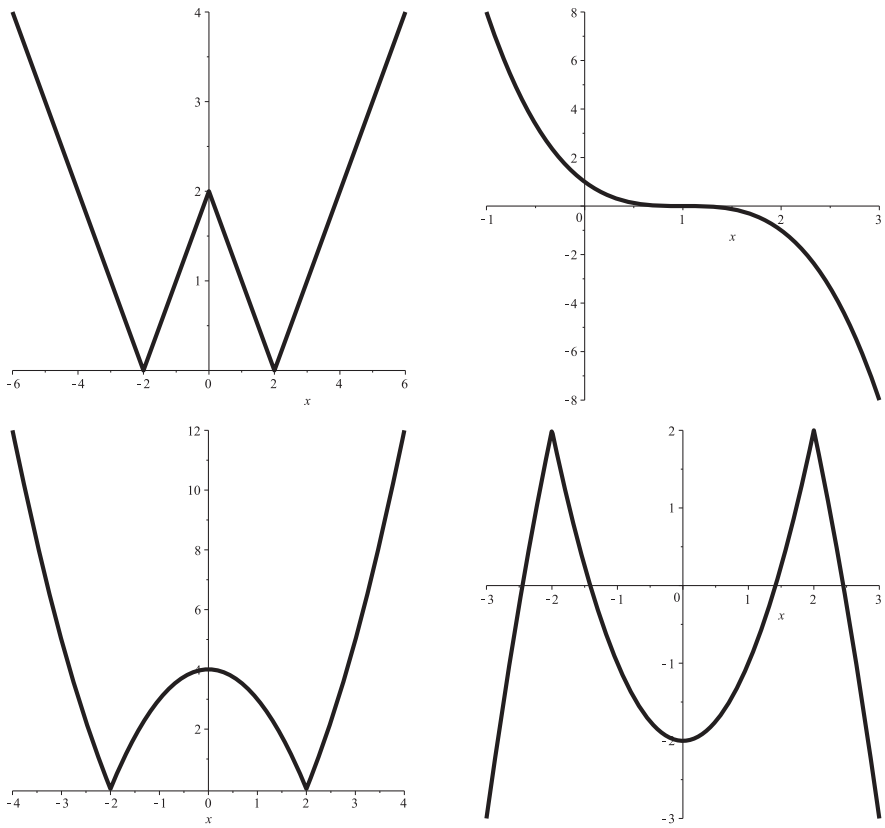

Figure 2.4: Il grafico delle funzioni $|2 - |x||$, $-(x-1)^3$, $|4 - x^2||$, $2 - |4 - x^2|$.

Esercizio 2.20. *Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari o nessuna delle due.*

- $\dfrac{x}{1+x^2}$ è dispari.
- $\dfrac{x^2+1}{1+x^4}$ è pari.
- $\dfrac{x^3+1}{1+x^4}$ nè pari nè dispari.
- x^5+1 nè pari nè dispari.
- $x(x+1)$ nè pari nè dispari.
- $[x]$ è dispari, Figura 2.5.

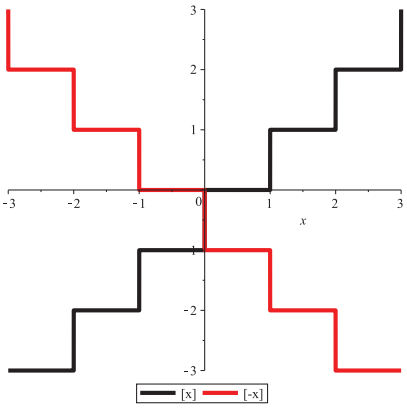

Figure 2.5: Il grafico della funzione floor $[x]$ in nero, di $[-x]$ in rosso. Si vede che quindi $-[-x]=[x]$.

Esercizio 2.21. *Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari.*

- $\sqrt[3]{x^3-1}$ nè pari nè dispari.
- $\dfrac{x}{1-x^2}$ è dispari.
- $\dfrac{x^3+x}{1+x^4}$ è dispari.
- $\dfrac{2x+1}{8x^2+1}$ nè pari nè dispari.
- $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+5}}$ è pari.
- $\dfrac{2x^2+1}{x^4+2}$ è pari.

Esercizio 2.22. *Data la parabola* $y = f(x) = -x^2 + 3x + 1$*, trovare le coordinate dei punti* $\boldsymbol{A} = (1, f(1))$*,* $\boldsymbol{B} = (-1, f(-1))$ *appartenenti al grafico della funzione, le intersezioni della curva con gli assi cartesiani e l'insieme di valori* x *per cui* $f(x) > 0$*.*

Il monomio di grado massimo della parabola è negativo, dunque sarà con la concavità verso il basso. Le coordinate di $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ si ricavano valutando la funzione in ± 1, e si ha rispettivamente $\boldsymbol{A} = (1, 3)$ e $\boldsymbol{B} = (-1, -3)$ (n.b che la funzione non è nè pari nè dispari). Le intersezioni con l'asse x si ricavano risolvendo $f(x) = 0$, ovvero usando la formula per le equazioni di secondo grado si ha che $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$. Dato che la concavità è verso il basso la f è positiva tra le due radici appena trovate (estremi esclusi). L'intersezione con l'asse y si trova valutando $f(0) = 1$.

Esercizio 2.23. *I grafici delle funzioni riportate in Figura 2.6 sono stati ottenuti da quello di* f *mediante traslazioni e simmetrie, scrivere le funzioni in termini di* f*.*

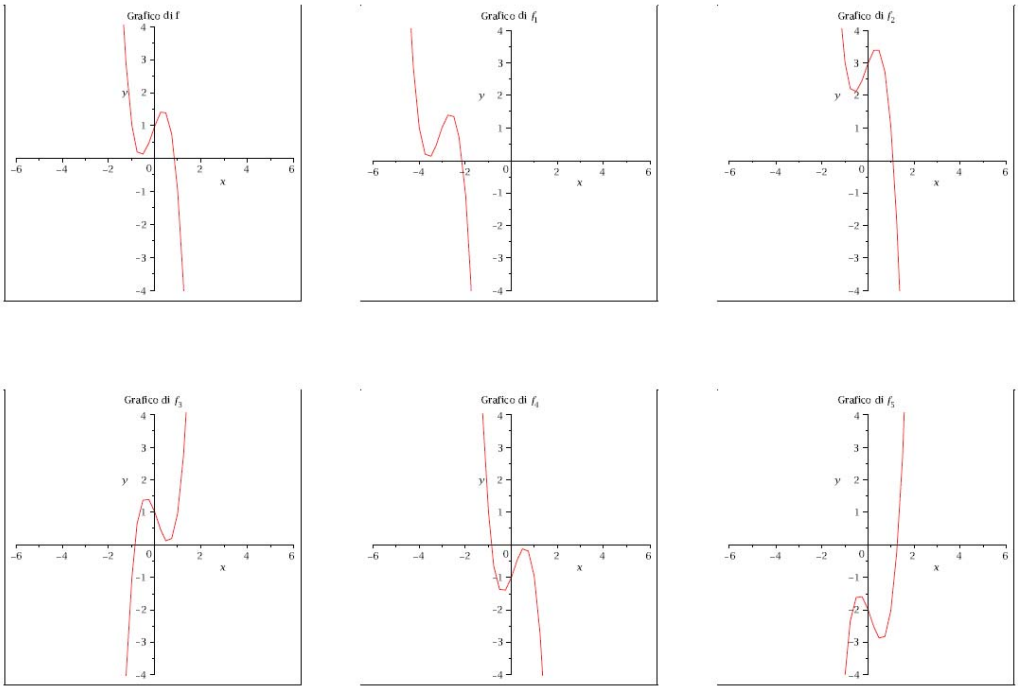

Figure 2.6: Il grafico delle varie funzioni.

I vari casi sono rispettivamente $f_1 = f(x+3)$, $f_2 = f(x) + 2$, $f_3 = f(-x)$, $f_4 = f(x) - 2$, $f_5 = f(-x) - 3$.

Esercizio 2.24. *Data la funzione esponenziale* $f(x) = aq^x$ *trovare l'incremento* $\Delta y = f(x+1) - f(x)$ *e mostrare che è anch'esso esponenziale.*

Si ha che $\Delta y = f(x+1) - f(x) = aq^{x+1} - aq^x = a(q-1)q^x$. Quest'ultima espressione mostra come l'incremento abbia la forma Aq^x con $A = a(q-1)$, ovvero sia a sua volta esponenziale.

Esercizio 2.25. *Dire quale sia il grafico della funzione* $f(x) = 2^{x+2}$*.*

Poiché la base di questa funzione esponenziale è maggiore di 1, si ha che f tende a 0 per $x \to -\infty$, la funzione passa per 1 quando l'esponente è nullo, ovvero per $x+2=0 \implies x=-2$, attraversa l'asse delle y in $x=0$ e assume il valore 4. Quindi la figura cercata è la (c).

Esercizio 2.26. *Dire se le seguenti affermazioni siano corrette o meno.*

(a) $\exists\, a\ t.c.\ 2^a = 0$. Poiché la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva, questa affermazione è falsa.

(b) $\exists\, a\ t.c.\ 2^a = -4$. Vale lo stesso ragionamento del punto precedente, è falso.

(c) $\exists\, a\ t.c.\ -2^{-a} = 8$. Si ha che $2^{-a} = -8$ e anche in questo caso l'esponenziale non può essere negativo, quindi l'affermazione è falsa.

(d) $\exists\, a\ t.c.\ 2^{-a} = \sqrt{5}$. Si ha che $\sqrt{5} > 0$ e la funzione esponenziale assume tutti i valori positivi, quindi in particolare ci sarà un valore di a per cui $2^{-a} = \sqrt{5}$. Si può determinare questo valore anche esplicitamente, prendendo il logaritmo (in base 2) di ambo i membri, $\log_2(2^{-a}) = \log_2(\sqrt{5}) \implies a = -\log_2(\sqrt{5}) = -\frac{1}{2}\frac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx -1.16$.

Esercizio 2.27. *Indicare se le seguenti uguaglianze siano corrette o meno.*

(a) $\log_4(8) = 2$. Si ha che $4^x = 8 \implies 2^{2x} = 2^3 \implies 2x = 3 \implies x = \frac{3}{2}$. Quindi l'uguaglianza proposta è falsa.

(b) $\log_9(1/3) = \frac{1}{2}$. Si ha che $9^x = \frac{1}{3} \implies 3^{2x} = 3^{-1} \implies 2x = -1 \implies x = -\frac{1}{2}$. Quindi l'uguaglianza proposta è falsa.

(c) $\log_4(1/2) = -\frac{1}{2}$. Si ha che $4^x = \frac{1}{2} \implies 2^{2x} = 2^{-1} \implies 2x = -1 \implies x = -\frac{1}{2}$. Quindi l'uguaglianza proposta è vera.

(d) $\log_{10}(0.1) = -1$. Si ha che $10^x = 10^{-1} \implies x = -1$. Quindi l'uguaglianza è vera.

Esercizio 2.28. *Sapendo che* $\log_{10} 32 = \alpha$*, determinare il valore di* $\log_{10} 320000$.

Anche in questo esercizio basta applicare le proprietà dei logaritmi, in particolare da $\log_{10} 32 = \alpha$ si ricava che $10^\alpha = 32$, ora bisogna determinare x tale che $10^x = 320000 = 32 \cdot 10^4 = 10^\alpha \cdot 10^4 = 10^{\alpha+4}$. Dunque $x = \alpha + 4$.

Esercizio 2.29. *Sapendo che* $\log_3 \alpha = \frac{19}{4}$*, quale delle seguenti stime è vera?*

$$(a)\ 81 < \alpha < 100 \qquad (b)\ 100 < \alpha < 160 \qquad (c)\ 160 < \alpha < 343$$

Usando le proprietà dei logaritmi, $\alpha = 3^{19/4} = 3^4 \cdot 3^{3/4} = 3^4 \cdot \sqrt[4]{27} = 3^4 \cdot \sqrt{\sqrt{27}}$. Se ora supponiamo di non saper o non voler calcolare $\sqrt{\sqrt{27}}$, possiamo dire che $\alpha > 3^4 \sqrt[4]{16} = 3^4 \cdot 2 = 162$. Si può dare anche una stima dall'alto, maggiorando 27 con $81 = 3^4$, in questo modo si ha che $\alpha < 3^4 \cdot \sqrt[4]{81} = 3^4 \cdot 3 = 3^5 = 243$. Mettendo insieme le due stime fatte non si può far altro che scegliere la stima (c).

Esercizio 2.30. *I dati sul Walleye (un pesce della specie perca) raccolti in Ontario ci dicono che questi pesci, nel corso della loro vita, crescono sempre più lentamente ma senza mai fermarsi. La dimensione dei pesci nel tempo $L(t)$ è descritta dalla funzione*

$$L(t) = 72\left(1 - e^{-0.09t}\right).$$

(a) Calcolare $L(0)$ ed interpretare il dato iniziale.

(b) Calcolare il limite a cui tende $L(t)$ per $t \to \infty$ e convincersi che il grafico di Figura 2.7 è corretto.

(c) Supponendo che il Walleye cominci a riprodursi quando ha raggiunto una lunghezza di circa 45 cm, calcolare l'età alla quale questa specie diventa adulta.

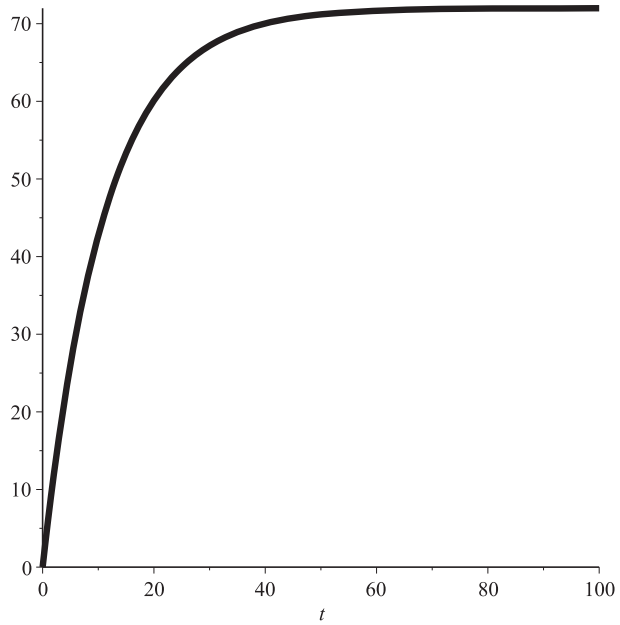

Figure 2.7: La crescita del Walleye.

(a) $L(0) = 0$ rappresenta la nascita del pesce.

(b) $\lim_{t\to\infty} L(t) = 72$.

(c) Bisogna risolvere l'equazione $45 = 72(1 - e^{-0.09t}) \implies 45 = 72 - 72e^{-0.09t}$ da cui $e^{-0.09t} = \frac{45-72}{-72} = \frac{3}{8} \implies \ln(3/8) = -0.09t$ quindi $t = \frac{-\ln(3)-\ln(8)}{-0.09} \approx 10.89$.

Esercizio 2.31. *Trovare l'espressione esplicita delle funzioni quadratiche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano:*

(a) $f(0) = 0,\ f(2) = 1,\ f(4) = 0$.

(b) $f(-1) = 0,\ f(0) = 1,\ f(3) = 0$.

(c) $f(2) = -1,\ f(0) = 2$ *e ha massimo in* $x = 0$.

(d) $f(0) = -1,\ f(1) = 2$ *e* $f(x)$ *è pari.*

Per risolvere questi problemi basta costruire un sistema lineare che tenga conto delle varie condizioni richieste. Supponiamo di scrivere $f(x) = ax^2 + bx + c$, si tratta di determinare a, b, c tali che:

(a) $f(0) = 0 = c,\ f(2) = 1 = 4a + 2b + 1,\ f(4) = 0 = 16a + 4b$. Si ha $b = -4a$ e sostituendo nelle altre equazioni, $4a - 8a = 1 \implies -4a = 1 \implies a = -\frac{1}{4}$, quindi $b = 1$ e $c = 0$.

(b) $f(-1) = 0 = a - b + c,\ f(0) = 1 = c,\ f(3) = 0 = 9a + 3b + c$. Si ha $a = b - 1$ e sostituendo nelle altre equazioni, $9(b-1) + 3b + 1 = 0 \implies 12b = 8 \implies b = \frac{2}{3}$. Dunque $a = -\frac{1}{3}$ e $c = 1$.

(c) $f(2) = -1 = 4a + 2b + c,\ f(0) = 2 = c$ e ha massimo in $x = 0$ che si esprime con $b = 0$. Risolvendo il sistema lineare si trova $a = -\frac{3}{4}$, $b = 0$ e $c = 2$.

(d) $f(0) = -1 = c,\ f(1) = 2 = a + b - 1$ e $f(x)$ è pari, quindi $f(-1) = 2 = a - b - 1$. Dalla terza equazione, $a = b + 3$ da cui $b + 3 + b - 1 = 2 \implies 2b = 0$. Dunque $a = 3,\ b = 0,\ c = -1$.

Esercizio 2.32. *Vogliamo recintare un campo rettangolare usando* 900 *m di filo spinato. Che dimensioni deve avere il campo perché abbia area massima? Quanto misura quest'area? Come si modifica il risultato se possiamo usare su un lato una lunga siepe (per cui devi utilizzare il filo spinato solo per gli altri tre lati)?*

Se a e b sono i lati del rettangolo, il perimetro si esprime come $P = 2(a + b) = 900$, da cui risolvendo per una lato, diciamo per b, si ricava $b = 450 - a$. L'area del campo è $A = ab = a(450 - a) = -a^2 + 450a$. Questa funzione è una parabola con la concavità verso il basso, quindi la funzione area ammette massimo. Derivando l'espressione per A si trova $-2a + 450 = 0$ da cui $a = \frac{450}{2} = 225$. Questo implica $b = 225$, ovvero l'area del campo è massima a parità di perimetro quando il campo è quadrato di area $A = 225^2 = 50625m^2$.
Se ora non sostituiamo una lato del campo con la siepe, il filo spinato dovrà bastare a soddisfare $2a + b = 900$, da cui $b = 900 - 2a$. A questo punto l'area si riscrive come $A = ab = a(900 - 2a) = -2a^2 + 900a$. Derivando questa espressione e risolvendo per a, si trova $-4a = -900$, ovvero $a = 225$. Ciò implica $b = 450$ e l'area è $A = 225 \cdot 450 = 101250m^2$.

Esercizio 2.33. *In una colonia di uccelli il numero di piccoli che sopravvivono dipende dalla densità dei nidi nella colonia. Se i nidi sono troppo lontani, i predatori possono catturare i piccoli con maggiore facilità ; se invece sono troppo vicini, il cibo potrebbe scarseggiare e i piccoli potrebbero perdersi o essere uccisi da altri adulti. Una possibile relazione fra il numero* N *di piccoli che sopravvivono e la densità* μ *dei nidi è data da*

$$N = a\mu(b - \mu)$$

per certe costanti a, b*. Trovare la densità ottimale dei nidi se* $a = 300$ *e* $b = 6$*; e per* a, b *qualsiasi.*

Per il primo caso basta sostituire i valori assegnati e massimizzare N, ovvero

$$N = 300\mu(6-\mu) = -300\mu^2 + 1800\mu.$$

Questa funzione ammette massimo, e lo si trova ponendo a zero la derivata prima, $-600\mu + 1800 = 0 \implies \mu = 3$.
Nel caso generale la funzione da massimizzare è $N = -a\mu^2 + ab\mu$, affinché abbia massimo serve che $a > 0$, fatto che implica $b \geq 0$. La derivata della funzione è $-2a\mu + ab = 0 \implies \mu = \frac{ab}{2a} = \frac{b}{2}$.

Esercizio 2.34. *L'energia potenziale di una massa m sospesa a una molla di costante elastica k, è data da $U = \frac{kz^2}{2} + mgz$, cioè dall'energia potenziale della molla sommata all'energia potenziale gravitazionale mgz, dove z è la quota della massa, assumendo $z = 0$ nel punto in cui la molla ha estensione nulla e g è la costante di accelerazione gravitazionale. Trovare il minimo di $U(z)$.*

Per trovare il minimo è sufficiente notare che per $k > 0$ la funzione $U(z)$ rappresenta una parabola rivolta verso l'alto, ammette quindi minimo. Esso si può trovare derivando $U(z)$ rispetto alla variabile z, ovvero$U'(z) = kz + mg$, da cui $z^\star = -\frac{mg}{k}$.

Esercizio 2.35. *Data la funzione quadratica $f(x) = ax^2 + bx + c$, definita su tutto $\mathbb{R}$, voglio eseguire una traslazione del grafico di una quantità T in orizzontale e q in verticale in modo che*

(a) la nuova funzione abbia minimo $m = 0$ in $x = 0$, se $a = 1, b = 6, c = 1$.

(b) la nuova funzione abbia minimo $m = 0$ in $x = 0$, se $a = 1$, con b, c qualsiasi.

(c) la nuova funzione, ristretta al dominio $[0, 1]$, abbia minimo $m = 0$ in $x = 0$ e massimo $M = 2$ per $x = 1$, con $a = b = c = 1$.

Una traslazione di $f(x)$ si effettua mediante $g(x) = f(x-T)+q = a(x-T)^2+b(x-T)+c+q$.

(a) $g(x) = x^2 + (6-2T)x + T^2 + 1 + q - 6T$, se deve avere minimo $m = 0$ in $x = 0$ significa che $g'(0) = 0$ ovvero $g'(x) = 2x + 6 - 2T \implies 6 - 2T = 0 \implies T = 3$. Siccome il massimo deve valere zero in $x = 0$ si ha che $g(0) = 0 = q - 8 \implies q = 8$.

(b) $f(x) = x^2 + (b-2T)x + T^2 + c + q - bT$, la cui derivata è $f'(x) = 2x + b - 2T$, calcolando $f'(0) = 0 \implies T = b/2$. Sostituendo ora T e calcolando $f(0) = 0 = -(1/4)b^2 + c + q$ si ricava che $q = \frac{1}{4}b^2 - c$.

(c) $f(x) = x^2 + (1-2T)x + T^2 + 1 + q - T$, la cui derivata è $f'(x) = 2x + 1 - 2T$. Per ipotesi sappiamo che f assume minimo e massimo agli estremi. Questa volta non possiamo imporre semplicemente che $f'(0) = f'(1) = 0$ perché troveremmo un assurdo. La cosa giusta da fare è rendere crescente la funzione in modo da soddisfare le ipotesi. Lo possiamo fare sfruttando il fatto che conosciamo i valori di f sul minimo e sul massimo. Dunque basta imporre $f(0) = 0 = T^2 + 1 + q - T$ e $f(1) = (1-T)^2 + 2 - T + q = 2$. Risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} T^2 + 1 + q - T &= 0 \\ (1-T)^2 + 2 - T + q &= 2 \end{cases} \implies q = -T^2 + T - 1,$$

sostituendo q nella seconda, $1 - 2T + T^2 + 1 - T + 1 - T^2 + T - 1 - 2 = 0$ si ricava $T = 0$ da cui $q = -1$.

Esercizio 2.36. *Data la funzione convessa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostrare che sono convesse $g(x) = f(x) + 3$ e $h(x) = f(x + 1)$.*

Dato che la convessità è invariante per traslazioni (non per rotazioni), e le g, h sono traslazioni di f, continuano ad essere convesse. Vediamo che è così sapendo che per f vale $f(ax_1+(1-a)x_2) \leq af(x_1) + (1 - a)f(x_2)$.

$$g(ax_1 + (1 - a)x_2) = f(ax_1 + (1 - a)x_2) + 3 \leq af(x_1) + (1 - a)f(x_2) + 3,$$

d'altra parte si ha anche che

$$ag(x_1) + (1 - a)g(x_2) = af(x_1) + +3a + (1 - a)f(x_2) + (1 - a)3 = af(x_1) + (1 - a)f(x_2) + 3,$$

dunque g è convessa.
Per quanto riguarda h, osserviamo che si ha,

$$a(x_1 + 1) + (1 - a)(x_2 + 1) = ax_1 + a + (1 - a)x_2 + (1 - a) = ax_1 + (1 - a)x_2 + 1,$$

di conseguenza

$$h(ax_1 + (1 - a)x_2) = f(ax_1 + (1 - a)x_2 + 1) = f(a(x_1 + 1) + (1 - a)(x_2 + 1)),$$

possiamo ora applicare la convessità di f,

$$f(a(x_1 + 1) + (1 - a)(x_2 + 1)) \leq af(x_1 + 1) + (1 - a)f(x_2 + 1) = ah(x_1) + (1 - a)h(x_2).$$

La dimostrazione è conclusa.

Esercizio 2.37. *L'altezza di un sasso lanciato in aria lungo la verticale, viene misurata in 3 differenti istanti dopo il lancio, ottenendo i seguenti risultati*

$t\,(sec)$	1	30	40
$altezza\,(m)$	539	800	500

Sapendo che l'altezza di un sasso dipende dal tempo secondo una legge quadratica, trova l'altezza massima raggiunta e l'istante in cui il sasso tocca terra. Sapendo che l'accelerazione di gravità è approssimativamente $9.8\,m/sec^2$, possiamo accorgerci che non siamo sulla Terra?

Sapendo che la traiettoria è regolata da una legge quadratica, è sufficiente risolvere il problema di interpolazione

$$\begin{cases} f(1) & = & a + b + c & = & 539 \\ f(30) & = & 30^2a + 30b + c & = & 800 \\ f(40) & = & 40^2a + 40b + c & = & 500 \end{cases}$$

La soluzione del sistema dà $a = -1$, $b = 40$ e $c = 500$. Il termine di grado massimo[1] corrisponde a $-\frac{1}{2}g^\star t^2 = -1t^2$ per cui l'accelerazione dovuta alla gravità è di $g^\star = 2$ mentre sulla Terra $g = 9.81$.

Esercizio 2.38. *La densità di una certa sostanza contenuta nelle cellule di una cavia dipende in modo quadratico dal raggio della cellula. Alcune misure dirette forniscono i seguenti dati*

raggio (μm)	10	15	20
densità (g/cm^3)	96	28	12

Trovare la funzione che descrive i dati.

Sapendo che la densità è regolata da una legge quadratica, è sufficiente risolvere il problema di interpolazione

$$\begin{cases} f(10) &= 100a + 10b + c &= 96 \\ f(15) &= 15^2a + 15b + c &= 28 \\ f(20) &= 20^2a + 20b + c &= 12 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è $a = \frac{26}{25}$, $b = -\frac{198}{5}$ e $c = 388$.

[1] In effetti la cinematica ci insegna che lo spazio percorso in un moto uniformemente accelerato è $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, dove a rappresenta l'accelerazione, v_0 la velocità iniziale e x_0 la posizione iniziale.