3

LEZIONE 3

Esercizio 3.1. *Tracciare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni determinando eventuali asintoti orizzontali e verticali, questi grafici si tracciano semplicemente a partire da funzioni note.*

$$f(x) = (x-2)^3 + 1 \qquad g(x) = \frac{1+2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} \qquad h(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}.$$

Il grafico di $f(x)$ corrisponde al grafico di x^3 traslato a destra di due unità e verso l'alto di una, Figura 3.1.
Il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $\sqrt{x}$, infatti basta osservare che $g(x) = \frac{1+2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + 2$. Dunque basta costruire nell'ordine, il grafico di $\sqrt{x}$, del suo reciproco $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (che assomiglia a quello dell'iperbole $1/x$, traslarlo a destra di due unità e in alto di altre due, Figura 3.1.
Per il grafico di $h(x)$ si può osservare che non si riesce a fattorizzare il numeratore,$x^2+2x+2 \implies x = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} \in \mathbb{C}$. Procedendo in questo modo sembra che non si riesca a semplificare l'espressione per $h(x)$, tuttavia, al numeratore, se si scrive il termine noto 2 come $1+1$, si ha che

$$h(x) = \frac{x^2+2x+1+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2} = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

A questo punto è chiaro che il grafico richiesto si ottiene da quello di $1/x^2$ traslato a sinistra di 1 e in alto di 1, Figura 3.1.

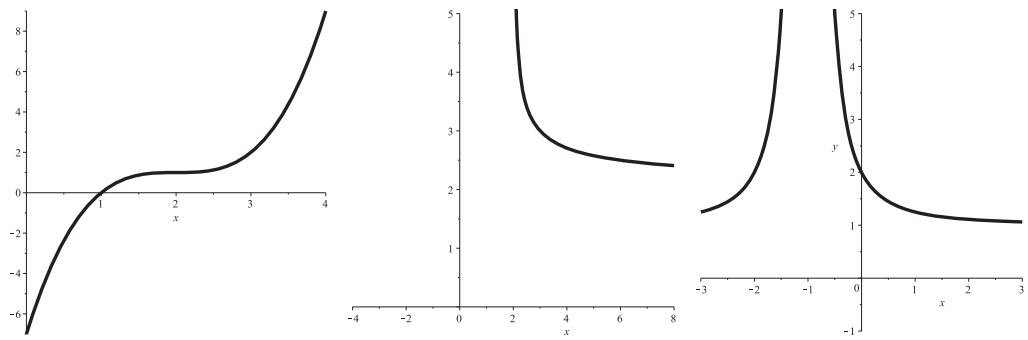

Figure 3.1: I grafici delle funzioni, da sinistra rispettivamente, (a) (b) e (c).

Esercizio 3.2. *Tracciando un grafico approssimativo, discutere qualitativamente l'esistenza di radici reali dei seguenti polinomi, al variare del parametro q:*

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2x + q \qquad\qquad g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + q$$

Per quanto riguarda il primo polinomio, si ha in generale che una cubica può avere tre radici reali (anche coincidenti), oppure una radice reale e due complesse. Esse possono essere determinate direttamente mediante l'uso della formula generale per le equazioni di terzo grado e c'è tutta una branca dell'Algebra, la teoria di Galois, che studia le proprietà dei polinomi. Tuttavia se serve determinare la natura delle radici (che siano sempre 3 ce lo assicura il teorema fondamentale dell'Algebra), non occorre arrivare a risolvere l'equazione. Benché ci siano tecniche algebriche come lo studio del determinante e del risolvente del polinomio (il famoso $\Delta = b^2 - 4ac$ delle equazioni di secondo grado), si può dire qualcosa con tecniche puramente analitiche. Innanzitutto, dato che il grado del polinomio è dispari, avremo che il limite per $x \to -\infty$ sarà meno infinito, mentre sarà a più infinito per $x \to \infty$. Questo basta ad assicurarci che ci sarà sempre almeno una radice reale. Ne rimangono da determinare due: possono essere solo entrambe reali o entrambe complesse coniugate. Non può succedere che ce ne siano una per tipo perché le radici complesse sono sempre in numero pari. Graficamente gli andamenti possibili sono i riportati in Figura 3.2. Dalla figura si nota come la posizione di eventuali massimi

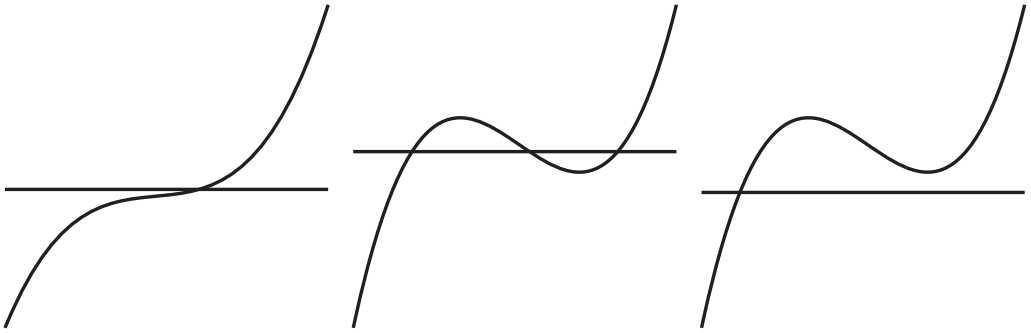

Figure 3.2: Casi di radici reali e complesse per una cubica.

e minimi della funzione implichi o meno l'esistenza delle radici. Nel caso del polinomio $f(x)$ i punti critici sono dati dagli zeri della derivata prima, $f'(x) = 3x^2 + 2x + 2 \implies \Delta = 4 - 4 \cdot 6 < 0$. Essendo il discriminante negativo, non ci sono punti stazionari, ovvero la funzione è monotona (crescente), quindi per ogni valore di q ci sarà soltanto una radice reale (e una coppia di radici complesse coniugate). Ponendo a zero la derivata seconda si trova il punto di flesso del polinomio, ovvero dove cambia la concavità del grafico, $f''(x) = 6x + 2 \implies x = -1/3$.
Nel caso del polinomio $g(x)$ si può ripetere il ragionamento fatto per $f(x)$, anche se i casi che si possono presentare sono più numerosi: 4 radici reali, 2 reali e 2 complesse, 4 complesse; le radici reali possono anche essere coincidenti. Iniziamo a cercare i punti stazionari risolvendo gli zeri della derivata prima di $g(x)$. Si ha che

$$g'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x = x(4x^2 + 6x + 2) = 0 \iff x = 0,\ x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{8} = \frac{-6 \pm 2}{8},$$

ovvero $x = -1, -\frac{1}{2}, 0$. Dobbiamo ora valutare la funzione in questi punto critici, che saranno rispettivamente minimo, massimo e minimo.

$$\begin{array}{rcl} g(-1) & = & 1-2+1+q \quad = \quad q \\ g(-1/2) & = & \frac{1}{16} - 2\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + q \quad = \quad \frac{1}{16} + q \\ g(0) & = & q \end{array}$$

Allora se $q > 0$ non ci saranno radici reali in quanto il minimo di $g(x)$ vale $q > 0$ e non ci sono attraversamenti dell'asse x, Figura 3.3 a sinistra. Nel caso di $q = 0$, i due minimi si trovano sull'asse x, dunque ci saranno due radici reali con molteplicità doppia, infatti, come si calcola a mano facilmente, $g(x) = x^2(x+1)^2$, ovvero ci sono quattro radici reali, Figura 3.3 al centro. Nel caso di $q < 0$ bisogna distinguere se $q < -1/16$. Per $-\frac{1}{16} < q < 0$ ci sono quattro radici reali, Figura 3.3 a destra. Rimane il caso di $q = -1/16$ e il caso $q < -1/16$. Nel primo caso, il

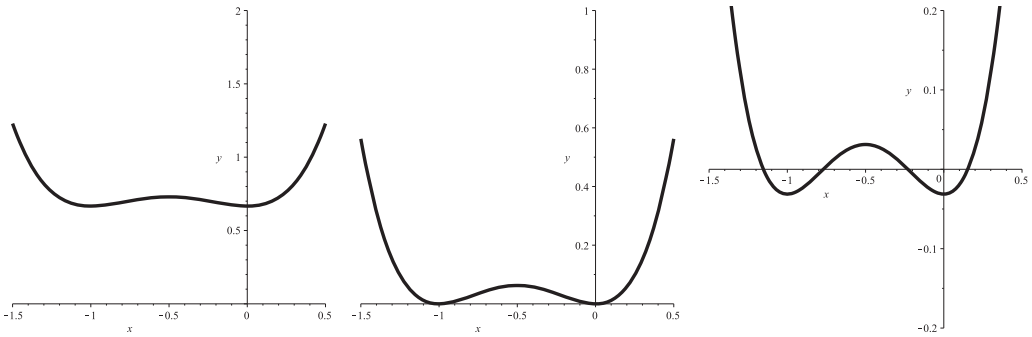

Figure 3.3: Casi di radici reali e complesse per una quartica, da sinistra $q > 0$, $q = 0$ e $-\frac{1}{16} < q < 0$.

massimo di $g(x)$ si trova esattamente sull'asse delle x dando luogo ad uno zero con molteplicità doppia (Figura 3.4), nel secondo caso, il massimo si trova strettamente sotto all'asse delle x e quindi ci sono solamente due radici reali e due complesse coniugate (Figura 3.4).

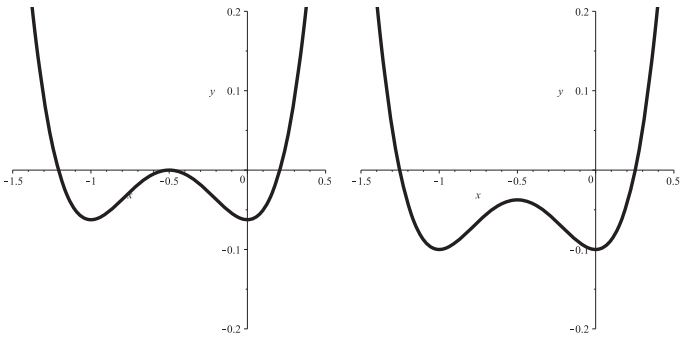

Figure 3.4: Casi di radici reali e complesse per una quartica, da sinistra $q = -\frac{1}{16}$, e $q < -\frac{1}{16}$.