4

LEZIONE 4

Esercizio 4.1. *Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e verticali delle funzioni:*

$$f(x) = \frac{x}{2x-3} \qquad g(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \qquad h(x) = \log(x-1) \qquad k(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Per $f(x)$ si ha asintoto verticale dove si annulla il denominatore, quindi per $x = 3/2$, si ha che per $x \to 3/2^+$ il limite è $+\infty$, mentre per $x \to 3/2^-$ il limite è $-\infty$. L'asintoto orizzontale si ha calcolando

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Per la funzione $g(x)$ gli asintoti verticali si trovano dove il denominatore si annulla, ovvero per $x = \pm 1$, l'asintoto orizzontale è dato da

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1.$$

L'asintoto verticale di $h(x)$ si ha quando l'argomento del logaritmo tende a zero, quindi per $x = 1$. Non c'è asintoto orizzontale in quanto il limite all'infinito del logaritmo è infinito.
Per la funzione $k(x)$ l'asintoto verticale si ha per $x = -1$, mentre all'infinito il limite diverge.

Esercizio 4.2. *Determinare il limite per $x \to 0^+$ di $f(x) = \dfrac{x-2\sqrt{x}}{3x+\sqrt{x}}$.*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-2\sqrt{x}}{3x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-2\sqrt{x}}{3x+\sqrt{x}} \cdot \frac{3x-\sqrt{x}}{3x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2-7x\sqrt{x}+2x}{9x^2-x},$$

si può ora semplificare in

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(3x-7\sqrt{x}+2)}{x(9x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x-7\sqrt{x}+2}{9x-1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Esercizio 4.3. *Calcolare i seguenti limiti.*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{-4}{0^+} = -\infty.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{-4}{0^-} = \infty.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +2^-} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{4}{0^-} = -\infty.$

(d) $\lim_{x\to+2^+} \dfrac{2x}{x^2-4} = \dfrac{4}{0^+} = \infty.$

Le rette $x = \pm 2$ rappresentano i due asintoti verticali della funzione.

Esercizio 4.4. *Date un esempio di funzione continua $y = f(x)$ definita su tutto l'asse reale che soddisfi le condizioni seguenti:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 5.$$

Non si può sperare di farcela con una funzione razionale, infatti la continuità obbliga a scegliere un denominatore che non si annulla mai, quindi una potenza pari. Affinché ci sia un asintoto orizzontale bisogna che il grado del numeratore sia lo stesso del denominatore, e quindi i limiti a più e meno infinito coincideranno. Una possibilità è ad esempio scegliere due funzioni razionali che si incollino con continuità in un punto e definire la funzione $f(x)$ a tratti. Un buon candidato è la funzione $\frac{2x^2}{x^2+1}$, da tagliare in due rami opportunamente traslati per $x = 0$. Dunque una funzione che soddisfa le richieste è

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} + 3 & \text{per} \quad x \geq 0 \\ \\ \dfrac{-2x^2}{x^2+1} + 3 & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

Se invece vogliamo usare una funzione elementare, basta modulare opportunamente la funzione arcotangente, che ammette due asintoti orizzontali distinti. Ad esempio $\frac{4}{\pi}\arctan x + 3$. Le due funzioni sono rappresentate in Figura 4.1.

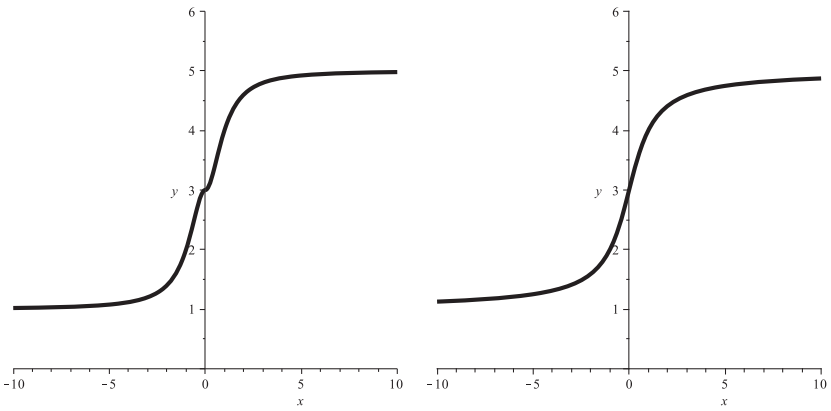

Figure 4.1: A sinistra la funzione razionale definita a tratti, a destra l'arcotangente opportunamente modificata.

Esercizio 4.5. *Trovare le eventuali discontinuità delle funzioni seguenti.*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{per} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad x < 0 \\ 1 & \text{per} \quad x = 0 \\ x & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$$

Nel primo caso si ha che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ quindi la funzione non è continua in zero, e si parla di discontinuità di salto o di prima specie.
Nel secondo caso ha che $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ quindi la funzione non è continua in zero, perché è definita a $1 = g(0)$, ma in questo caso si parla di discontinuità rimuovibile o di terza specie.

Esercizio 4.6. *Considerata la funzione* $f(x) = \sqrt{x^2 + 3\ln^2(1+x) + 8}$ *identificare il dominio naturale e calcolare i limiti* $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ *e* $\lim_{x\to -1^+} f(x)$. *Determinare eventuali discontinuità della funzione.*

La radice esiste sempre perché è somma di termini positivi, mentre il logaritmo esiste solo per $x > -1$, allora il dominio è $\{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$. Il limite all'infinito vale infinito perché la radice è una funzione crescente e l'argomento è crescente monotono non appena il logaritmo diventa maggiore di 1 (Figura 4.2). Il limite in zero non presenta difficoltà e vale $f(0) = \sqrt{8}$, per $x \to -1^+$ il limite vale più infinito in quanto il contributo del logaritmo (al quadrato) è predominante sugli altri termini. Le due funzioni sono rappresentate in Figura 4.1. Non ci sono discontinuità perché nel dominio f si ottiene da somme e composizioni di funzioni continue.

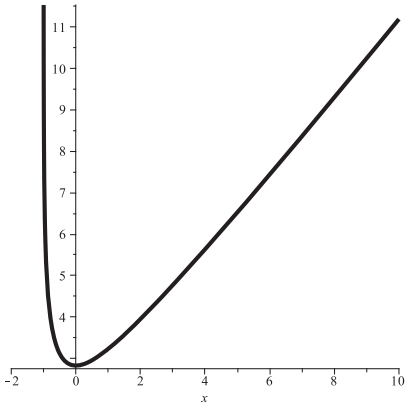

Figure 4.2: Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 3\ln^2(1+x) + 8}$.