5

LEZIONE 5

Esercizio 5.1. *Calcolare il limite per $x \to \pm\infty$ delle seguenti funzioni.*

- $\lim_{x\to\pm\infty} 2x^3 - 3x^2 = \lim_{x\to\pm\infty} x^3(2 - 3/x) = \pm\infty.$
- $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 \sin x^2 - x^4 = \lim_{x\to\pm\infty} x^4(\sin x^2/x^2 - 1) = -\infty.$
- $\lim_{x\to\pm\infty} e^x - x = \lim_{x\to\pm\infty} e^x(1 - x/e^x) = \infty.$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \sin\frac{1}{x}\cos x^2 = 0$, infatti all'infinito $\sin\frac{1}{x}$ tende a zero, mentre $\cos x^2$ è limitato.
- $\lim_{x\to\pm\infty} x^2e^x - xe^{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{x^2}(xe^{-x^2+x} - 1) = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{x^2}\left(x\left(\frac{e}{e^x}\right)^x - 1\right) = \mp\infty.$
- $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2+x} - e^{3x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2(1-1/x)} - e^{3x} = \begin{cases} -\infty & \text{per} \quad x \to \infty \\ 0 & \text{per} \quad x \to -\infty \end{cases}.$

Esercizio 5.2. *Calcolare i seguenti limiti.*

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^4 + 3x^3 + 2}{15x^3 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4(5 + 3/x + 2/x^4)}{x^3(15 + 1/x^3)} = \pm\infty.$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 + 2x}{15x^3 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3(1 + 2/(3x^2))}{15x^3(1 + 1/(15x^3))} = \frac{1}{5}.$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{14x^3 + 2}{2x^3 + x^2 + 15x + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{14x^3(1 + 2/14x^3)}{2x^3(1 + 1/2x + 15/2x^2 + 1/2x^3)} = 7.$
- $\lim_{x\to 1} \frac{5x^4 + 3x^3 + 2}{x^2 - 1}$. Si deve dividere in due casi, facendo il limite a destra e sinistra di 1, quello a sinistra dà $-\infty$ mentre quello a destra dà $+\infty$, di conseguenza il limite in 1 non esiste.

Esercizio 5.3. *Calcolare i seguenti limiti.*

- $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 1}{x^3 + 1} = 0.$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin x + 5}{5x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 5}{5x^3 + 1} = 0.$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{15e^{3x}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(1+1/e^x)}{e^{3x}(15+1/e^{3x})} = \lim_{x\to\infty} e^{-2x}\frac{(1+1/e^x)}{(15+1/e^{3x})} = 0.$

Esercizio 5.4. *Considerata la funzione $f(x) = x^2+2x+2$ determinare (quando esistono) massimo e minimo della funzione negli intervalli*

$$[0,1), \qquad [-3,2), \qquad [-1,0), \qquad (0,+\infty), \qquad (-2,+\infty).$$

Determinare quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 2$ negli stessi intervalli.

La funzione rappresenta una parabola, che ha concavità verso l'alto e vertice (minimo) in $x = -1$. Questa volta dobbiamo usare il teorema di Weierstrass per decidere se la funzione ha massimo e minimo, si confrontano i punti critici naturali della funzione (dove si annulla la derivata prima) con i valori assunti sul bordo del dominio al quale è stata ristretta.
Allora in $[0,1)$ la funzione ha minimo in $x = 0$ ma non ammette massimo, solamente estremo superiore; in $[-3,2)$ ha minimo in $x = -1$ ma non ha massimo; in $[-1,0)$ ha minimo in $x = -1$ ma non ha massimo; in $(0,\infty)$ non ha né minimo né massimo; in $(-2,\infty)$ ha minimo in $x = -1$ ma non massimo.
Nel caso di $f(x) = 2$ si ha l'equazione $x^2 + 2x + 2 = 2 \implies x^2 + 2x = 0$, che ha radici $x = 0$, $x = -2$. Si tratta quindi di vedere quando questi elementi appartengono agli insiemi proposti, rispettivamente le soluzioni sono, 1,2,0,0,1.

Esercizio 5.5. *Determinare se l'equazione $x^2+3e^x+\sin x+\ln x = 0$ possiede almeno una soluzione nell'intervallo $(0,+\infty)$. Perché?*

Un metodo intuitivo per stabilire se una funzione continua abbia una soluzione in un determinato intervallo chiuso $[a,b]$ consiste nell'applicare il teorema dei valori intermedi. Questo teorema si enuncia come: *Una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a,b]$ assume in tale intervallo tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.* Esso è utile quando $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto, perché assicura che esiste un punto intermedio tra a e b in cui la funzione passa per lo zero. La funzione di questo esercizio è continua nell'intervallo $(0,+\infty)$, dunque stabilire se abbia uno zero significa trovare un intervallo come appena descritto. Osservando la funzione si nota come i primi addendi siano sempre positivi, la funzione $\sin x$ oscilla tra ± 1, mentre il logaritmo per $x \in (0,1)$ è sempre negativo. Un calcolo anche approssimato ci dice che $f(1/100) \approx -1.56$ e $f(1/2) \approx 4.98$.

Esercizio 5.6. *Usando eventualmente una calcolatrice, determinare una soluzione dell'equazione $\sin^2 x + \ln x = 0$ con almeno la precisione di 0.01.*

Chiamiamo $f(x) = \sin^2 x + \ln x$. Prima di cercare una soluzione (anche approssimata) bisogna mostrare che una soluzione esista. Questo lo si fa esibendo un intervallo che in cui la funzione valutata agli estremi abbia valori opposti, e si sfrutta il teorema dei valori intermedi come nell'esercizio precedente. Ora, un altro ragionamento piuttosto naturale consiste nello

restringere gradualmente questo intervallo in modo da approssimare la soluzione dell'equazione. Vediamo di formalizzare questo ragionamento, che prende il nome di metodo di bisezione. Chiamiamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$, ora costruiamo i punti intermedi come

$$x_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2} \qquad \text{e} \qquad f(x_{i+1}) \qquad \text{per } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Ripetiamo la costruzione scegliendo a_{i+1} e b_{i+1} in modo che $f(a_{i+1})$ e $f(b_{i+1})$ continuino ad avere segno opposto. Ciò si formalizza come:

- se $f(a_i)f(x_{i+1}) < 0$ allora $a_{i+1} = a_i$ e $b_{i+1} = x_{i+1}$;
- se $f(a_i)f(x_{i+1}) > 0$ allora $a_{i+1} = x_{i+1}$ e $b_{i+1} = b_i$;
- se $f(x_{i+1}) = 0$ allora la soluzione dell'equazione è proprio x_{i+1}.

Poiché in pratica la terza condizione non è mai verificata, ci troviamo alle prese con una successione di intervalli, ciascuno che contiene la soluzione e ampio metà del precedente. Allora come criterio di arresto si può imporre la condizione $|b_i - a_i| \leq \varepsilon$ dove $\varepsilon > 0$ è la tolleranza sull'esattezza della soluzione. Dopo un numero i di iterazioni si ha che

$$|b_i - a_i| = \frac{|b - a|}{2^i},$$

ci dovremo fermare al passo n quando si verifica che n è il minimo intero tale che

$$n > \log_2 \frac{|b - a|}{\varepsilon}.$$

Nel nostro esercizio si ha $\varepsilon = 1/100$, un primo intervallo di partenza lo si può trovare a tentativi, ad esempio per $a = a_0 = \frac{1}{2}$ e $b = b_0 = 1$ si ha $f(a) \approx -0.4632983335$ e $f(b) \approx 0.7080734183$. Possiamo ora stimare il numero di passi per ottenere una soluzione che soddisfi la tolleranza richiesta, infatti da

$$n > \log_2 \frac{|b - a|}{\varepsilon} \implies n > \log_2 \frac{(1 - 1/2)}{0.01} = \log_2 \frac{0.5}{0.01} \approx 5.64 \implies n = 6.$$

La tabella seguente mostra le iterazioni necessarie ad ottenere la soluzione approssimata.

iter.	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$\lvert x^\star - x_{i+1}\rvert$
0	0.5	1.	0.75	0.1769493266	0.0739635073
1	0.5	0.75	0.625	−0.1276648104	0.0510364927
2	0.625	0.75	0.6875	0.0280326966	0.0114635073
3	0.625	0.6875	0.65625	−0.0489303485	0.0197864927
4	0.65625	0.6875	0.6718750000	−0.0102332882	0.0041614927
5	0.671875	0.6875	0.67968750	0.0089529595	0.0036510073

Una buona approssimazione di $x^\star$ è 0.6760364927 e si vede che la tolleranza richiesta era già stata ottenuta alla quinta iterazione, inoltre si nota come solamente le prime due cifre decimali

del procedimento sono valide. Nella pratica, per risolvere numericamente le equazioni, si usano altri metodi più sofisticati, come il metodo di Newton-Raphson. Esso prevede l'iterazione da un certo punto di partenza assegnato x_0 del tipo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Ad esempio con quest'ultimo, partendo da $x_0 = 1/2$, già dopo 4 iterazioni si ottiene la soluzione approssimata $x^\star$ che ha accuratezza di 10^{-8}.

Esercizio 5.7. *Considerate le funzioni $f(x) = 3^{-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{2}\,3^{-2x^2}$, esiste un asintoto orizzontale comune? Quale delle due funzioni vi converge più rapidamente?*

Entrambe le funzioni hanno limite pari a zero per $x \to \pm\infty$, dunque la retta $y = 0$ è un asintoto comune. Se fosse $f \geq g$ allora si avrebbe $f/g \geq 1$, vediamo tale limite per $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3^{-x^2}}{\sqrt{2}\,3^{-2x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} 3^{x^2} = \infty$$

Dunque la g converge a zero più rapidamente.

Esercizio 5.8. *Per ogni coppia delle seguenti funzioni, dire quale delle due converge più rapidamente per $x \to \infty$, ovvero se divergono allo stesso ordine.*

- $f(x) = x$, $g(x) = 2x$. Divergono dello stesso ordine, ma più velocemente la g.
- $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. La g diverge di un'ordine più di f.
- $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_2 2x$. Divergono dello stesso ordine, ma più velocemente la g.
- $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{2x}$. Diverge più velocemente la g.

Esercizio 5.9. *Le funzioni*

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \sqrt{x+3}, \qquad f_3(x) = x^2 - x, \qquad f_4(x) = 2^{2x}, \qquad f_5(x) = x^2 + 2x^4$$

sono tutte divergenti all'infinito, classificarle in base alla velocità con cui divergono, dalla meno veloce alla più veloce.

Facendo un rapido confronto si ha che all'infinito

$$\sqrt{x+3} < x < x^2 - x < x^2 + 2x^4 < 2^{2x}.$$

Esercizio 5.10. *Per $x \to \infty$ determinare l'ordine di convergenza a 0 delle seguenti funzioni.*

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}, \qquad g(x) = e^{-x} - \frac{1}{x}, \qquad h(x) = e^{-2x} - e^{-x^2}.$$

Per $f(x)$ si ha la semplificazione $f(x) = \frac{x-1}{x^3}$ che quindi tende a zero con ordine 2. Per $g(x)$ si mette in evidenza e^{-x} in modo che $e^{-x}(1-e^x/x)$, dunque si vede come la funzione esponenziale sia dominante nella convergenza. Infine per quanto riguarda $h(x)$ si raccoglie $e^{-x^2}(e^{x^2-2x}-1)$ e anche questa volta si vede come sia la funzione esponenziale di ordine maggiore a regolare la convergenza.

Esercizio 5.11. *Due popolazioni diverse si sviluppano nel tempo secondo le due seguenti leggi di crescita,*

$$N_1(t) = \frac{10+1000t}{t+1} \qquad N_2(t) = \frac{10+1000t^2}{t^2+1}$$

che rappresentano il numero di individui delle due popolazioni al tempo t. Mostrate che a lungo termine le due popolazioni raggiungono la stessa abbondanza (stesso numero di individui) e trovate la specie che si stabilizza più rapidamente. Quale delle due specie è inizialmente più rapida nella crescita? Perché?

Si mostra facilmente che i limiti delle due funzioni per $t \to \infty$ sono

$$\lim_{t\to\infty} \frac{10+1000t}{t+1} = 1000 \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{10+1000t^2}{t^2+1} = 1000.$$

Ora, per vedere quale delle due specie arriva prima a stabilizzarsi bisogna calcolare

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_1(t)-L}{N_2(t)-L} = \lim_{t\to\infty} \frac{10+1000t-1000(t+1)}{t+1} \frac{t^2+1}{10+1000t^2-1000(t^2+1)}$$

che semplificato dà

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-990}{t+1}\frac{t^2+1}{-990} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+1}{t+1} = +\infty.$$

Sarà quindi la seconda specie a stabilizzarsi per prima. Viceversa, si può osservare con un ragionamento analogo, che al tempo iniziale $t = 0$ è la prima popolazione a svilupparsi di più. Dunque esisterà un tempo in cui le due popolazioni avranno lo stesso numero di individui, lo si trova uguagliano le due funzioni. Tale istante, si trova facilmente che sia $t = 1$. Approfondendo lo studio delle due funzioni, si trova che la derivata prima delle due funzioni è $N_1'(t) = 990/(t+1)^2$ e $N_2'(t) = 1980t/(t^2+1)^2$. Da ciò si evince che la prima funzione sarà crescente monotona, mentre la seconda parte per $t = 0$ in un punto stazionario. Di più si può ricavare dallo studio della derivata seconda: $N_1''(t) = -990(2t+2)/(t+1)^4$ e $N_2''(t) = 1980(-3t^4-2t^2+1)/(t^2+1)^4$. La prima specie presenta un flesso, ma per $t < 0$, mentre la seconda ha un flesso per $t = \sqrt{3}/3$, la concavità è inizialmente verso l'alto, poi verso il basso.