6

LEZIONE 6

Esercizio 6.1. *Trascurando l'attrito dell'aria, la distanza d percorsa da un corpo lasciato cadere al tempo $t = 0$ è legata al tempo t di caduta dalla formula $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$ dove $g \approx 9.812$ m/s^2 è l'accelerazione di gravità. Calcolare la velocità media tra due istanti t_0 e t_1 e la velocità istantanea di caduta in $t_0 = 2$s, trovata come limite del rapporto incrementale.*

La velocità media si ottiene dal rapporto dello spazio sul tempo,

$$\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d(t_1) - d(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\frac{1}{2}g(t_1^2 - t_0^2)}{t_1 - t_0}.$$

La velocità istantanea (in t_0) si ottiene dal rapporto precedente quando $t_1 \to t_0$. Ciò corrisponde a fare la derivata della funzione $d(t)$.

Esercizio 6.2. *Lo spostamento (espresso in metri) di una particella che si muove su una linea retta è assegnato dall'equazione del moto $s = 4t^2 + 6t + 2$. Trovare la velocità della particella agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$.*

Si tratta di valutare la funzione $s'(t) = 8t + 6$ negli istanti richiesti, rispettivamente si ottiene $6, 14, 22, 30$.

Esercizio 6.3. *Usando la definizione come limite del rapporto incrementale, calcola la derivata delle funzioni seguenti.*

- $f(x) = x - 12$. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - 12 - x + 12}{h} = 1$.
- $f(x) = 2x + 3$. $\lim_{h\to 0} \frac{2(x+h) + 3 - 2x - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} = 2$.
- $f(x) = x^2 - 1$. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 1 - x^2 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$.
- $f(x) = (x-1)^2$. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h-1)^2 - (x-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x-1)^2 + 2(x-1)h + h^2 - (x-1)^2}{h} = 2(x-1)$.

Esercizio 6.4. *Utilizzando la definizione di derivata, calcolare il valore approssimato della derivata nei rispettivi punti x_0 per le seguenti funzioni, prendendo i seguenti incrementi per h: $h_1 = 0.1$, $h_2 = -0.01$ e $h_3 = 0.001$.*

- $f(x) = x^2 + 2, x_0 = 0$. $\Delta = \dfrac{(x+h)^2 + 2 - x^2 - 2}{h} = \dfrac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$. Calcolando in x_0 si ottiene $\Delta = h$. A questo punto si possono sostituire a h i tre valori proposti.

- $f(x) = -x^2 + 2, x_0 = -1$. $\Delta = -2x - h$. Calcolando in x_0 si ottiene $\Delta = 2 - h$. A questo punto si possono sostituire a h i tre valori proposti.

- $f(x) = x^3 + 2, x_0 = 1$. $\Delta = \dfrac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$. Calcolando in x_0 si ottiene $\Delta = 3 + 9h + h^2$. A questo punto si possono sostituire a h i tre valori proposti.

- $f(x) = -(x-2)^3, x_0 = 0$. $\Delta = \dfrac{-(x-2)^3 - 3(x-2)^2h - 3(x-2)h^2 - h^3 + (x-3)^3}{h} = -3(x-2)^2 - 3(x-2)h - h^2$. Calcolando in x_0 si ottiene $\Delta = -12 + 6h - h^2$. A questo punto si possono sostituire a h i tre valori proposti.

- $f(x) = 2x - 1, x_0 = -1$. $\Delta = \dfrac{2(x+h) - 1 - 2x + 1}{h} = 2$. Che è indipendente da h.

- $f(x) = 1/x, x_0 = -1$. $\Delta = \dfrac{1/(x+h) - 1/x}{h} = \dfrac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = -\dfrac{h}{xh(x+h)} = -\dfrac{1}{x(x+h)}$. Calcolando in x_0 si ottiene $\Delta = \frac{1}{h-1}$. A questo punto si possono sostituire a h i tre valori proposti.

- $f(x) = \dfrac{3+x}{x}, x_0 = 1$. Si può riscrivere f come $3/x + 1$ e utilizzare l'espressione trovata al punto precedente. $\Delta = -\dfrac{3}{x(x+h)}$. Calcolando in x_0 si ottiene $\Delta = -\frac{3}{h+1}$. A questo punto si possono sostituire a h i tre valori proposti.

Esercizio 6.5. *Mostra che la derivata di una funzione (derivabile) pari è dispari. Cosa puoi dire della derivata di una funzione dispari?*

Sfruttando la formula della derivata della funzione composta si ha che per una f pari,

$$f(x) = f(-x) \quad \Longrightarrow \; f'(x) = -1 \cdot f'(-x).$$

Similmente si provo che se $f(-x) = -f(x)$ allora $-f'(-x) = -f'(x)$ cioè la derivata di una funzione dispari è pari.

Esercizio 6.6. *In quale punto è minima la pendenza del grafico di $x^3 + 3$ nell'intervallo $[-1, 2]$?*

La pendenza della funzione è data da $m(x) = 3x^2$, il minimo di questa funzione si trova ponendo a zero $m'(x) = 6x$ ovvero è in $x = 0$. Confrontando ora il valore in zero con i valori assunti dalla funzione agli estremi del dominio si trova il minimo di $m(x)$. Si ha che $m(0) = 0$, $m(-1) = 3$ e $m(2) = 12$. Dunque m è minima in $x = 0$.

Esercizio 6.7. *Date le funzioni $f(x) = 2x^3 - 6x$, $g(x) = -4x^2 + 1$ e $h(x) = 5x - 7$, calcolare la retta tangente ai grafici di f, g, h nel punto di ascissa $x_0 = -1$.*

La derivata di f è $f'(x) = 6x^2 - 6$, ovvero il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $x = -1$ è $f'(-1) = 0$, dunque si avrà una retta orizzontale. L'intercetta sull'asse y si ha per $f(-1) = 4$. In conclusione la tangente al grafico in $x = -1$ è $y = 4$, ciò significa che ci troviamo su un punto stazionario.
Per la $g(x)$ si ha che $g'(x) = -8x$, la generica retta si indica con $y = mx + q$, il coefficiente $m = g'(x_0) = 8$, allora q si trova come $y(x_0) - mx_0 = g(x_0) - mx_0 = -3 - 8(-1) = 5$. Quindi la tangente è $y = 8x + 5$. Un modo alternativo per risolvere il problema in un solo passaggio è usare il fatto che il polinomio di Taylor di ordine 1 è proprio la retta tangente (che approssima la funzione nel punto x_0), e si scrive $P_1(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$. Nel nostro caso si ha che $P_1(x) = -3 + 8(x + 1) = 8x + 5$.
Per h si ha che il polinomio di Taylor diventa $P_1(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) = -12 + 5(x + 1) = 5x - 7$.

Esercizio 6.8. *Determinare la retta tangente al grafico di $f(x) = kx^2 - x$ nel punto di ascissa 1 con $k \in \mathbb{R}$ parametro arbitrario.*

Si procede come nell'esercizio precedente, usando il primo polinomio di Taylor, $f'(x) = 2kx - 1$. La derivata prima valutata in $x_0 = 1$ dà, $f'(1) = 2k - 1$. Allora la tangente è $y = k - 1 + (2k - 1)(x - 1) = k - 1 + 2kx - 2k - x + 1 = (2k - 1)x - k$.

Esercizio 6.9. *Una cellula ha approssimativamente forma sferica, utilizzando la formula del binomio di Newton*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

determinare l'incremento del volume se il raggio varia di Δr, il corrispondente tasso medio di crescita del volume, il tasso di crescita puntuale. Se il raggio aumenta di 0.05, di quanto aumenta approssimativamente il volume? E la superficie?

Prima di tutto enunciamo le due formule che ci servono per completare l'esercizio, quella per la superficie e quella per il volume:

$$S = 4\pi r^2 \qquad\qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Allora la variazione ΔV nel volume è data da $\Delta V = V_+ - V$ dove $V_+ = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r\Delta r^2 + 3r^2\Delta r + \Delta r^3)$. Dunque $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r\Delta r^2 + 3r^2\Delta r + \Delta r^3) = \frac{4}{3}\pi\Delta r(r\Delta r + 3r^2 + \Delta r^2)$. Allora la variazione media di volume è data da $\Delta V/\Delta r = \frac{4}{3}\pi(r\Delta r + 3r^2 + \Delta r^2)$. Invece la variazione puntuale corrisponde alla derivata del volume, $V' = 4\pi r^2$, che corrisponde al limite per $\Delta r \to 0$ nella variazione media.
Ad un aumento di 0.05 del raggio della cellula, il volume corrispondente per un raggio di 1 diventa di $407/2000\pi \approx 0.64$. Lo stesso aumento, si ripercuote sulla superficie in modo che $\Delta S = S_+ - S = 4\pi(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2) = 4\pi(2r\Delta r + \Delta r^2) = 41/100\pi \approx 1.29$.

Esercizio 6.10. *Calcolare i punti in cui la derivata delle seguenti funzioni si annulla.*

- $f(x) = 5x^2 + 4x \implies f'(x) = 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$.
- $f(x) = x^3 + x - 1/x \implies f'(x) = 3x^2 + 1 + 1/x^2 = \frac{3x^4+x^2+1}{x^2} > 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- $f(x) = |3x - 1| \implies f'(x) = 3$ se $x > 1/3$, $f'(x) = -3$ se $x < 1/3$, si nota che la derivata non è definita in $x = 1/3$ perchè è un punto angoloso.
- $f(x) = x^3 - 12x + 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
- $f(x) = 1 + 8x - x^8 \implies f'(x) = 8(1 - x^7) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Esercizio 6.11. *Calcolare la derivata delle seguenti funzioni.*

- $f(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3} \implies f'(x) = \frac{1}{4}(1 + 2x + x^3)^{-3/4}(3x^2 + 2) = \dfrac{3x^2 + 2}{4\sqrt[4]{(1 + 2x + x^3)^3}}$.
- $g(x) = \dfrac{1}{(1 + x^4)^3} \implies f'(x) = -3(1 + x^4)^{-4}4x^3 = \dfrac{-12x^3}{(1 + x^4)^4}$.
- $h(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^4 - 2} \implies f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 1)(x^4 - 2) - (x^3 + x)4x^3}{(x^4 - 2)^2} = \dfrac{-x^6 - 3x^4 - 6x^2 - 2}{(x^4 - 2)^2}$.

Esercizio 6.12. *Date le funzioni f e g il cui grafico è disegnato in Figura 6.1, sia $u(x) = f(g(x))$, calcolare $u'(1)$ e $u'(5)$.*

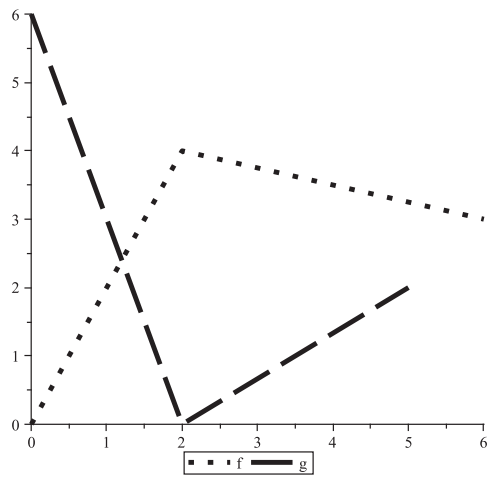

Figure 6.1: Il grafico delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Si ha che $u'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Bisogna dunque trovare un'espressione analitica (almeno parziale) delle due funzioni. Il primo tratta della f si scrive $y = 2x$, il secondo tratto $y = -1/4x + 9/2$; per la g si ha nei due tratti rispettivamente $y = -3x + 6$ e $y = 2/3x - 4/3$. A questo punto $u'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(3)(-3) = 2(-3) = -6$ e similmente $u'(5) = f'(g(5))g'(5) = -1/4 \cdot 2/3 = 1/6$.

Esercizio 6.13. *Le funzioni f, g con le loro derivate prendono i valori presentati in tabella.*

x	1	2	3
$f(x)$	3	5	2
$g(x)$	2	3	7

x	1	2	3
$f'(x)$	7	1	5
$g'(x)$	2	4	1

Si consideri la funzione $u(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, quanto valgono $u(1)$ e $u'(2)$?

Si ha che con la regola della funzione composta, $u(1) = f(g(1)) = f(2) = 5$, mentre $u'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(3)4 = 5 \cdot 4 = 20$.

Esercizio 6.14. *Date le funzioni $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = \frac{2x}{x-2}$, calcolare $h = f \circ g$, $l = g \circ f$, $m = f \circ f$ e $n = g \circ g$ e specificare il loro dominio. Calcolare h', l', m', n' usando la regola della funzione composta. Se possibile calcolare il valore di tali derivate nei punti di ascissa $x = 1, x = 0, x = 2$.*

La composizione delle due funzioni dà rispettivamente:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{4x^2}{(x-2)^2} + \frac{4x}{(x-2)} + 1 = 9\frac{(x-2/3)^2}{(x-2)^2} \\
l(x) &= 2\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-1} = 2\frac{(x+1)^2}{x^2+2x-1} \\
m(x) &= (x^2+2x+1)^2 + 2x^2 + 4x + 3 = (x^2+2x+2)^2 \\
n(x) &= \frac{4x}{(x-2)(2x/(x-2)-2)} = x
\end{aligned}$$

Per quanto riguardo le loro derivate si ha

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left(2\left(\frac{2x}{x-2}\right)+2\right) \cdot \frac{-4}{(x-2)^2} = \frac{-24x+16}{(x-2)^3} \\
l'(x) &= \frac{-4}{(x^2+2x+1-2)^2} \cdot (2x+2) = \frac{-8x-8}{(x^2+2x-1)^2} \\
m'(x) &= [2(x^2+2x+1)+2](2x+2) = 4x^3 + 12x^2 + 16x + 8 \\
n'(x) &= \frac{-4}{(2x/(x-2)-2)^2} = 1
\end{aligned}$$

A questo punto basta valutare le funzioni appena trovate nei punti richiesti.

$$\begin{array}{rclrclrcl}
h'(1) &=& 8 & h'(0) &=& -2 & h'(2) &=& \times \\
l'(1) &=& -4 & l'(0) &=& -8 & l'(2) &=& -\frac{24}{49} \\
m'(1) &=& 40 & m'(0) &=& 8 & m'(2) &=& 120 \\
n'(1) &=& 1 & n'(0) &=& 1 & n'(2) &=& 1
\end{array}$$

Esercizio 6.15. *Assumendo* $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ *e* $g'(5) = 2$, *calcolare i seguenti valori:* $(fg)'(5)$, $(f/g)'(5)$ *e* $(g/f)'(5)$.

Utilizzando la regola della funzione composta, si ha che

$$\begin{aligned}
(fg)'(5) &= (f'g + fg')(5) &= f'(5)g(5) + f(5)g'(5) &= 6 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = -16 \\
(f/g)'(5) &= \frac{f'g - fg'}{g^2}(5) &= \frac{f'(5)g(5) - f(5)g'(5)}{g(5)^2} &= \frac{6 \cdot (-3) - 1 \cdot 2}{9} = -\frac{20}{9} \\
(g/f)'(5) &= \frac{g'f - gf'}{f^2}(5) &= \frac{g'(5)f(5) - g(5)f'(5)}{f(5)^2} &= \frac{2 \cdot 1 - (-3) \cdot 6}{1} = 20
\end{aligned}$$