7

LEZIONE 7

Esercizio 7.1. *Quale delle seguenti funzioni è decrescente in* $(-3, 0)$ *e ha derivata prima in* -3 *che vale* 0*?*

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x, \qquad x^3 + 2x^2 - 6x, \qquad 3x + \frac{x^2}{2}, \qquad x^3 + 2x + 3.$$

Le derivate sono rispettivamente,

$$x^2 + x - 6, \qquad 3x^2 + 4x - 6, \qquad x + 3, \qquad 3x^2 + 2.$$

Le derivate della prima e della terza funzione si annullano in $x = -3$, per le altre due funzioni non è vero. Usiamo ora l'informazione che la funzione debba essere decrescente, ad esempio, le derivate della prima e della terza in $x = -2$ valgono rispettivamente -4 e $+1$. Dunque la prima funzione è quella decrescente in quell'intervallo. I grafici delle quattro funzioni sono riportati in Figura 7.1

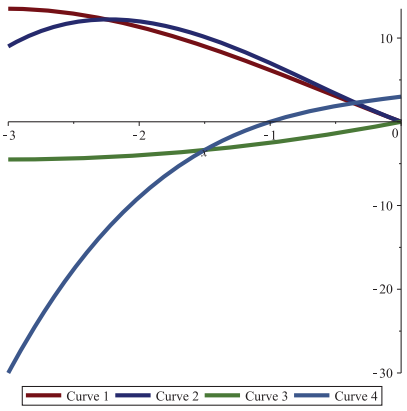

Figure 7.1: Il grafico delle quattro funzioni.

Esercizio 7.2. *Inscrivere il rettangolo di perimetro massimo nella parte di piano delimitata dalla curva* $y = -x^2 + 9x - 8$ *e dall'asse* x*.*

La curva rappresenta una parabola con concavità verso il basso, taglia l'asse delle ascisse in due punti, dati da $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{-2} = \frac{-9 \pm 7}{-2} = 1, 8$. Inoltre ha massimo in $x = 9/2$ in quanto la derivata è $-2x + 9$. Il valore della curva in tale punto è $y(9/2) = 49/4$. Se poniamo un lato del

rettangolo sull'asse x, di estremi x_1 e x_2, possiamo ridurre il problema ad una sola incognita x_1. Infatti il rettangolo dovrà essere simmetrico rispetto all'asse della parabola (Figura 7.2). La sua base è quindi lunga $x_2 - x_1$. In particolare la condizione di simmetria si traduce in

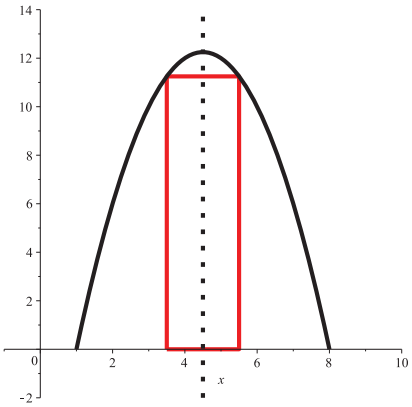

Figure 7.2: Il grafico della parabola e del rettangolo.

$x_2 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - x_1 = 9 - x_1$, di conseguenza possiamo esprimere la base come $x_2 - x_1 = 9 - 2x_1$. L'altezza del rettangolo si esprime facilmente come $y(x_1) = -x_1^2 + 9x_1 - 8$. Ora si può scrivere l'equazione del perimetro da massimizzare,

$$P(x_1) = 2[(9 - 2x_1) + y(x_1)] = 2(9 - 2x_1 - x_1^2 + 9x_1 - 8) = 2(-x_1^2 + 7x_1 + 1).$$

La funzione perimetro è ancora una volta una parabola con concavità verso il basso, dunque ammette massimo, che si trova ponendo a zero la derivata della funzione. Si ha che $P'(x_1) = -4x_1 + 14$ che implica $x_1 = \frac{7}{2}$. Si riescono ora a ricostruire la base e l'altezza del rettangolo, ovvero 2 e $45/4$, quindi il perimetro del rettangolo massimo inscritto nella parabola misura $53/2$.

Esercizio 7.3. *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 10x^5 - x$ è crescente? Perché?*

Se f fosse crescente avrebbe derivata prima (strettamente) positiva. Verifichiamo che non è così, perché $f'(x) = 50x^4 - 1$ che si annulla per $x = \sqrt[4]{1/50}$. Due di queste radici quarte sono reali, dunque ci sono due punti stazionari. Per vedere che si tratta di un massimo e di un minimo, guardiamo il segno della derivata seconda in quei due punti. La derivata seconda è $f''(x) = 200x^3$ e prende il segno della radice in cui è calcolata. Quindi si ha che la f è decrescente nell'intervallo $[-\sqrt[4]{1/50}, \sqrt[4]{1/50}]$.

Esercizio 7.4. *Determina se le funzioni $f(x) = x^3 + 2x$ e $g(x) = 2x^3 + x$ sono crescenti o meno giustificando la risposta.*

Verificare la crescenza corrisponde a studiare il segno della derivata prima di una funzione. Nel caso di f e g le derivate prime sono $f'(x) = 3x^2 + 2$ e $g'(x) = 6x^2 + 1$, si vede che sono espressioni sempre positive, perché sono la somma di un quadrato e di un numero positivo.

Esercizio 7.5. *Studia crescenza, descrescenza e gli eventuali massimi e minimi locali delle seguenti funzioni.*

$$x^4, \qquad x^7, \qquad -6x^2+2x^3, \qquad 3x^2+6x, \qquad 2x^4-2x^2+1.$$

Per x^4 si ha che la funzione decresce in $(-\infty,0)$, cresce in $(0,\infty)$ ed ha un punto di minimo in $x=0$.
Per x^7 si ha che la funzione è sempre crescente (non strettamente in $x=0$ che è un flesso) in quanto la derivata prima è $7x^6$.
Per $-6x^2+2x^3$ si ha che la derivata prima è $6x^2-12x$, ovvero ci sono due punti stazionari in $x=0$ e $x=2$. Sono rispettivamente punti di massimo e di minimo, e si ha che in $(-\infty,0)$ e $(2,\infty)$ la funzione è crescente (decrescente in $(0,2)$.
Per $3x^2+6x$ si ha che è decrescente per $x<-1$ con un minimo in $x=-1$.
Per $2x^4-2x^2+1$ si può osservare che la derivata prima è $8x^3-4x$, si annulla in $x=0,\pm\sqrt{2}/2$. Per vedere se sono massimi o minimi basta verificare il segno della derivata seconda, che assicura che $x=0$ è un massimo, mentre $x=\pm\sqrt{2}/2$ sono minimi (assoluti). In conclusione si ha che la funzione è decrescente per $(-\infty,-\sqrt{2}/2)$, è crescente per $(-\sqrt{2}/2,0)$, decrescente per $(0,\sqrt{2}/2)$ e di nuovo crescente per $(\sqrt{2}/2,\infty)$.

Esercizio 7.6. *Quante soluzioni hanno le equazioni $p(x)=x^3+x^2+\frac{4}{27}$ ed $q(x)=x^3-2x^2+\frac{4}{27}$?*

Per contare il numero di soluzioni si sfrutta il fatto che le funzioni sono continue, ed in base a come sono collocati massimi e minimi, attraversano o meno l'asse delle ascisse. Per $p(x)$ si ha che $p'(x)=3x^2+2x$ e la derivata si annulla per $x=0,-2/3$. La derivata seconda è $p''(x)=6x+2$ e dice che $p''(0)=2>0$ è un minimo, $p''(-2/3)=-2<0$ è un massimo. Per verificare la posizione dei punti stazionari è sufficiente valutare p in quei punti, rispettivamente si ha che $p(0)=4/27>0$ e $p(-2/3)=8/27>0$. Di conseguenza questi due punti stazionari sono ininfluenti per il conto delle radici reali, rimane quindi che p ha solamente una radice reale (e due complesse coniugate). Il grafico di p è riportato in Figura 7.3 a sinistra.
Per l'equazione $q(x)$ vale lo stesso ragionamento: si ha che $q'(x)=0$ per $x=0,4/3$, che sono rispettivamente punti di massimo e minimo. Inoltre $q(0)=4/27>0$ e $q(4/3)=-28/27<0$. Questo ci garantisce l'esistenza di tre radici reali, Figura 7.3, a destra.

Esercizio 7.7. *Sapendo che f è continua in $(0,1)$ e vale $f(0)>f(1)>0$, che cosa posso concludere sul numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=0$ con $x\in[0,1]$?*

Non si può concludere niente di definitivo. L'unica cosa che si può dire è che se esistono radici di $f(x)=0$, allora devono essere un numero pari su $[0,1]$.

Esercizio 7.8. *Sapendo che f è continua in $(0,1)$ e vale $f'(x)<0$ per ogni $x\in(0,1)$ con $f(0)>f(1)>0$, che cosa posso concludere sul numero di soluzioni dell'equazione $f(x)=0$ con $x\in[0,1]$?*

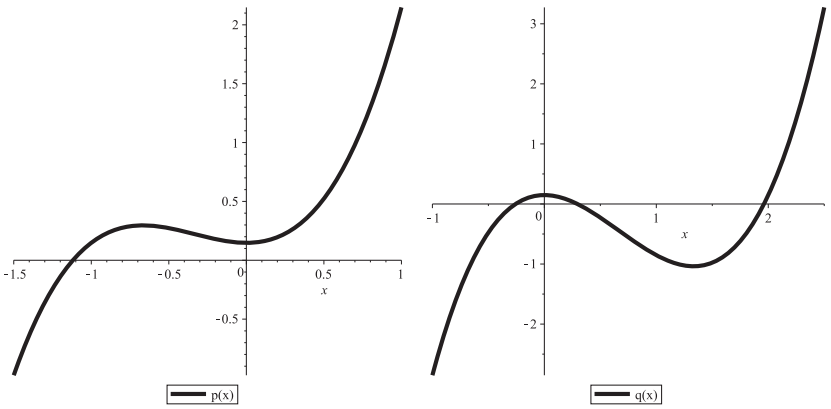

Figure 7.3: Il grafico di $p(x)$ e $q(x)$

Si può dire che f non ha radici in quell'intervallo, infatti se ne avesse, per continuità, ci dovrebbe essere un punto in cui la funzione risale per tornare a $f(1) >$, ovvero ci sarebbe un punto in cui la derivata prima si annulla, ma questo è assurdo per ipotesi.

Esercizio 7.9. *Sapendo che f è continua in $(0,1)$ e vale $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (0,1)$ con $f(0) > 0 > f(1)$, che cosa posso concludere sul numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ con $x \in [0,1]$?*

Il fatto che la derivata seconda sia sempre negativa corrisponde ad avere concavità verso il basso su tutto l'intervallo considerato. Per continuità ed essendo gli estremi di segno opposto, almeno una soluzione esisterà. Un modo per avere più soluzioni rispettando la concavità verso il basso e la continuità è rappresentato in Figura 7.4. Tuttavia, in questo caso, si dovrà per forza avere una cuspide, ed in particolare la derivata prima non sarà definita in quel punto, tanto meno quella seconda, che per ipotesi è strettamente negativa. Abbiamo quindi un assurdo, dunque ci può essere soltanto una soluzione.

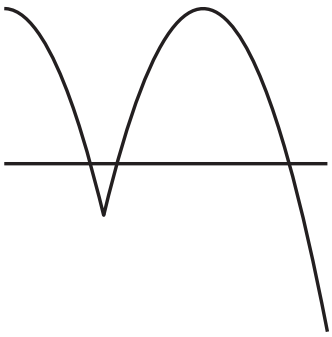

Figure 7.4: Il caso di una cuspide per mantenere concavità verso il basso ma avere più soluzioni.

Esercizio 7.10. *Studiare crescenza e decrescenza delle seguenti funzioni, trovando gli eventuali massimi e minimi locali.*

- $f(x) = x^2 + \frac{125}{x}$. La derivata è $f'(x) = 2x - \frac{125}{x^2} = \frac{2x^3-125}{x^2}$ e si annulla in $x_0 = \sqrt[3]{125/2}$. La derivata seconda vale $f''(x) = 2 + \frac{250}{x^3}$ e $f''(x_0) = 6 > 0$, dunque x_0 è un minimo. La funzione è quindi decrescente per $x < x_0$ e crescente dopo x_0.

- $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$. La derivata è $f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{x-1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$ e non si annulla mai. La funzione è quindi sempre crescente.

- $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. La derivata è $f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-)^2}$ e si annulla in $x_0 = 0, 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$. La derivata seconda vale $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ e $f''(x_0)$ vale rispettivamente $-3\sqrt{3}/2$, 0, $3\sqrt{3}/2$, dunque questi punti sono massimo, flesso e minimo. La funzione è quindi crescente per $x < -3\sqrt{3}/2$ e decrescente fino a $x = 3\sqrt{3}/2$ (si passa per due asintoti) e poi è definitivamente crescente.

- $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$. La derivata è $f'(x) = \frac{-4x^2+4}{(x-1)^4}$ e si annulla in $x_0 = -1$. La derivata seconda vale $f''(x) = \frac{8x^2+8x-16}{(x-1)^5}$ e $f''(x_0) = 1/2 > 0$, dunque x_0 è un minimo. La funzione è quindi decrescente per $x < x_0$ e crescente dopo x_0 ma solo fino all'asintoto, dopo di esso torna ad essere decrescente, come ci dice il segno della derivata prima.

- $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$. La derivata è $f'(x) = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ e non si annulla mai. La funzione è quindi crescente strettamente.

- $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$. La derivata è $f'(x) = \frac{2x-4}{3((x-2)^2)^{2/3}}$ e non si annulla mai ($x = 2$ non fa parte del dominio della derivata). In $x = 2$ la funzione esiste ed ha un punto angoloso. La funzione è quindi decrescente per $x < 2$ e crescente dopo 2.

- $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x} - 2$. La derivata è $f'(x) = \frac{-2-7x}{x^3}$ e si annulla in $x_0 = -2/7$. La derivata seconda vale $f''(x) = \frac{14x+6}{x^4}$ e $f''(x_0) = 2401/8 > 0$, dunque x_0 è un minimo. La funzione è quindi decrescente per $x < x_0$ e crescente dopo x_0 fino all'asintoto in $x = 0$, poi decresce definitivamente.

- $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$. La derivata è $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ e si annulla in $x_0 = -2/3 \pm (1/3)\sqrt{7}$. La derivata seconda vale $f''(x) = 6x + 4$ e $f''(x_0) = \pm 2\sqrt{7}$, dunque si ha un massimo e un minimo. La funzione è quindi crescente per $x < -2/3 - (1/3)\sqrt{7}$ e crescente dopo $-2/3 + (1/3)\sqrt{7}$, è invece decrescente tra i due punti stazionari.

Esercizio 7.11. *Quante soluzioni ha l'equazione $x - 3\ln(x) = 0$?*

Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}^+$. Sul dominio studiamo massimi e minimi della funzione e i limiti agli estremi. La derivata prima è $1 - 3/x$ e posta uguale a zero dà come punto stazionario $x = 3$. La derivata seconda è $3/x^2$, quindi positiva, ci dice che $x = 3$ è un punto di minimo. Valutando la funzione in $x = 3$ si vede la posizione di questo minimo, e si trova un valore negativo ($3 - 3\ln(3)$). Rimangono da verificare i limiti agli estremi del dominio, ovvero per $x \to 0^+$ e $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} x - 3\ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} x - 3\ln(x) = \lim_{x\to\infty} x(1 - 3\ln(x)/x) = +\infty.$$

Dunque la funzione attraversa l'asse delle ascisse in due punti.

Esercizio 7.12. *Quante soluzioni ha l'equazione* $\ln(x^2 - 3x + 2) - \frac{1}{2}x + 2 = 0$*?*

Vediamo dove esiste il logaritmo, bisogna studiare quando l'argomento è positivo. Risolvendo l'equazione di secondo grado associata, si ha che $x^2 - 3x + 2 = 0$ se e solo se $x = 1, 2$, allora il dominio della funzione è $D = \mathbb{R} - \{1 \leq x \leq 2\}$. Sul dominio studiamo massimi e minimi della funzione e i limiti agli estremi. La derivata prima è

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} - \frac{1}{2} = \frac{4x-6-x^2+3x-2}{2(x^2-3x+2)} = \frac{-x^2+7x-8}{2(x^2-3x+2)}$$

e posta uguale a zero dà come punto stazionario $x_0 = \frac{7+\sqrt{17}}{2}$. La derivata seconda è

$$\frac{7-2x}{2x^2-6x+4} - \frac{(7x-8-x^2)(4x-6)}{(2x^2-6x+4)^2} = \frac{-2x^2+6x-5)}{(x^2-3x+2)^2}$$

che valutata in x_0 dà un valore negativo, quindi ci dice che x_0 è un punto di massimo. Valutando la funzione in x_0 si vede la posizione di questo minimo, e si trova un valore positivo. Rimangono da verificare i limiti agli estremi del dominio, ovvero per $x \to -\infty$, $x \to 1^-$, $x \to 2^+$ e $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2-3x+2) - \frac{1}{2}x + 2 = +\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \ln(x^2-3x+2) - \frac{1}{2}x + 2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} \ln(x^2-3x+2) - \frac{1}{2}x + 2 = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} \ln(x^2-3x+2) - \frac{1}{2}x + 2 = -\infty$$

Dunque la funzione attraversa l'asse delle ascisse in tre punti (Figura 7.5).

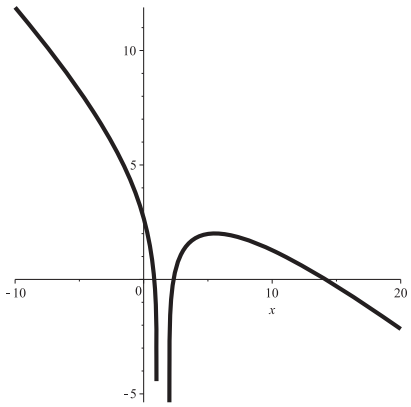

Figure 7.5: Il grafico di $\ln(x^2 - 3x + 2) - \frac{1}{2}x + 2$.