Lezione 3 (2/10/2014)

Esercizi svolti a lezione

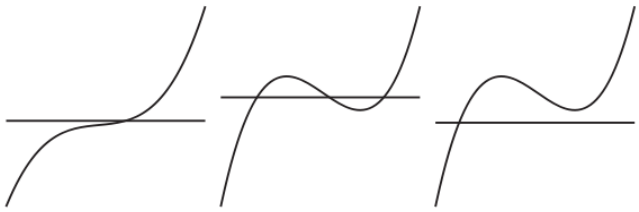
Esercizio 1. Tracciando un grafico approssimativo, discutere qualitativamente l'esistenza di radici reali dei seguenti polinomi, al variare del parametro q:

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2x + q \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + q$$

Soluzione Per quanto riguarda il primo polinomio, si ha in generale che una cubica può avere tre radici reali (anche coincidenti), oppure una radice reale e due complesse. Esse possono essere determinate direttamente mediante l'uso della formula generale per le equazioni di terzo grado e c'è tutta una branca dell'Algebra, la teoria di Galois, che studia le proprietà dei polinomi. Tuttavia, se serve determinare la natura delle radici (che siano sempre 3 ce lo assicura il teorema fondamentale dell'Algebra), non occorre arrivare a risolvere l'equazione. Benché ci siano tecniche algebriche come lo studio del determinante e del risolvente del polinomio (il famoso $\Delta = b^2 - 4ac$ delle equazioni di secondo grado), si può dire qualcosa con tecniche puramente analitiche. Innanzitutto, dato che il grado del polinomio è dispari, avremo che il limite per $x \to -\infty$ sarà meno infinito, mentre sarà più infinito per $x \to +\infty$. Questo basta ad assicurarci che ci sarà sempre almeno una radice reale. Ne rimangono da determinare due che possono essere solo:

- entrambe reali
- entrambe complesse coniugate.

Non può succedere che ce ne siano una per tipo perché le radici complesse sono sempre in numero pari. Graficamente gli andamenti possibili sono:



Dalla figura si nota come la posizione di eventuali massimi e minimi della funzione implichi o meno l'esistenza delle radici. Nel caso del polinomio $f(x)$ i punti critici sono dati dagli zeri della derivata prima, $f(x) = 3x^2 + 2x + 2 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \cdot 6 < 0$. Essendo il discriminante negativo, non ci sono punti stazionari, ovvero la funzione è monotona (crescente), quindi per ogni valore di q ci sarà soltanto una radice reale (e una coppia di radici complesse coniugate). Ponendo a zero la derivata seconda si trova il punto di flesso del polinomio, ovvero dove cambia la concavità del grafico, $f(x) = 6x + 2 \Rightarrow x = -1/3$.

Nel caso del polinomio $g(x)$ si può ripetere il ragionamento fatto per $f(x)$, anche se i casi che si possono presentare sono più numerosi: 4 radici reali, 2 reali e 2 complesse, 4 complesse; le radici reali possono anche essere coincidenti. Iniziamo a cercare i punti stazionari risolvendo gli zeri della derivata prima di $g(x)$. Si ha che

$$g'(x) = 4x^3+6x^2+2x = x(4x^2+6x+2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{8} = \frac{-6 \pm 2}{8},$$

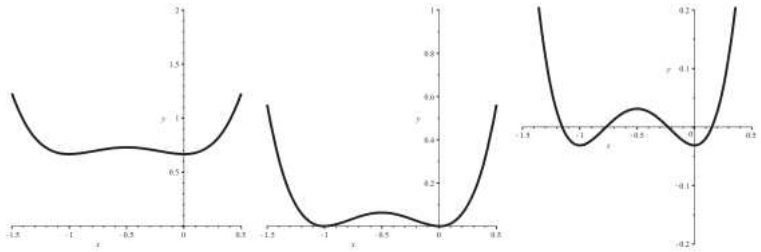
ovvero $x_{1,2,3} = -1, -1/2, 0$. Dobbiamo ora valutare la funzione in questi punto critici, che saranno rispettivamente minimo, massimo e minimo.

$$g(-1) = 1 - 2 + 1 + q = q$$

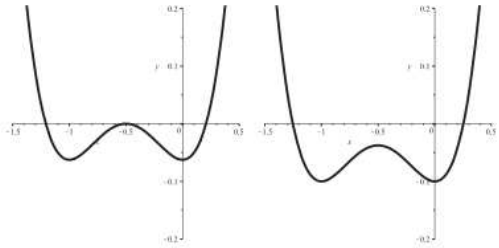
$$g(-1/2) = \tfrac{1}{16} - 2\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} + q$$

$$g(0) = q$$

Allora se $\mathbf{q > 0}$ non ci saranno radici reali in quanto il minimo di $g(x)$ vale $q > 0$ e non ci sono attraversamenti dell'asse x, Figura a sinistra.
Nel caso di $\mathbf{q = 0}$, i due minimi si trovano sull'asse x, dunque ci saranno due radici reali con molteplicità doppia, infatti, come si calcola a mano facilmente, $g(x) = x^2(x+1)^2$, ovvero ci sono quattro radici reali, Figura al centro.
Nel caso di $\mathbf{q < 0}$ bisogna distinguere se $q < -1/16$. Per $-1/16 < q < 0$ ci sono quattro radici reali, Figura a destra.



Rimane il caso $q = -1/16$ e il caso $q < -1/16$. Nel primo caso massimo di $g(x)$ si trova esattamente sull'asse delle x dando luogo ad uno zero con molteplicità doppia, nel secondo caso, il massimo si trova strettamente sotto all'asse delle x e quindi ci sono solamente due radici reali e due complesse coniugate.



Nota 1. Ricordiamo il concetto di **limite** Sia $f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad (x_0 \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R})$$

se, considerato un numero arbitrario $\epsilon > 0$ è possibile trovare un numero $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{quando} \quad |x - x_0| < \delta, \quad x \in D, \quad x \neq x_0$$

Il concetto di limite si lega all'idea di asintoto.

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Ciò si esprime dicendo che in $x = 0$ la funzione possiede un **asintoto verticale**.

D'altra parte abbiamo anche che

$$\lim x \to \pm\infty f(x) = 0$$

e ciò si esprime dicendo che la retta $y = 0$ è un **asintoto orizzontale**.

Proprietà dei limiti

(a) $\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$

(b) $\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x)$

(c) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

(d) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

Ricordiamo anche che

$$\begin{array}{lll} +\infty + \infty = +\infty, & -\infty - \infty = -\infty, & L \pm \infty = \pm\infty \\ \frac{L}{\pm\infty} = 0, & \frac{\pm\infty}{L} = \pm\infty (L > 0) & L \cdot (\pm\infty) = \pm\infty (L > 0) \end{array}$$

mentre sono indeterminati

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{L}{0}$$

Nel caso $\infty - \infty$, supponendo che P_n e Q_m siano due polinomi di grado n e m con coefficienti di grado massimo a_n e b_m positivi, abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ +\infty & n > m \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e verticali delle funzioni:

$$f(x) = \tfrac{x}{2x-3} \quad g(x) = \tfrac{x^2}{x^2-1} \quad h(x) = log(x-1) \quad k(x) = \tfrac{x^2+x+1}{x+1}$$

Soluzione

- Per $f(x)$ si ha asintoto verticale dove si annulla il denominatore, quindi per $x = 3/2$, si ha che per $x \to 3/2^+$ il limite è $+\infty$, mentre per $x \to 3/2^-$ il limite è $-\infty$. L'asintoto orizzontale si ha calcolando

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

- Per la funzione $g(x)$ gli asintoti verticali si trovano dove il denominatore si annulla, ovvero per $x = \pm 1$, l'asintoto orizzontale è dato da

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$$

- L'asintoto verticale di $h(x)$ si ha quando l'argomento del logaritmo tende a zero, quindi per $x = 1$. Non c'è asintoto orizzontale in quanto il limite all'infinito del logaritmo è infinito.

- Per la funzione $k(x)$ l'asintoto verticale si ha per $x = -1$, mentre all'infinito il limite diverge.

Esercizio 3. Determinare il limite per $x \to 0^+$ di $f(x) = \frac{x-2\sqrt{x}}{3x+\sqrt{x}}$.

Soluzione

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x-2\sqrt{x}}{3x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x-2\sqrt{x}}{3x+\sqrt{x}} \frac{3x-\sqrt{x}}{3x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{3x^2-7x\sqrt{x}+2x}{9x^2-x} =$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x(3x-7\sqrt{x}+2)}{x(9x-1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{3x-7\sqrt{x}+2}{9x-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti.

(a) $\lim_{x\to -2^-} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

(b) $\lim_{x\to -2^+} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

(c) $\lim_{x\to +2^-} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

(c) $\lim_{x\to +2^+} \frac{2x}{x^2-4} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

Nota 2. Ricordiamo le discontinuità.

Discontinuità di prima specie (o di salto)

Sia $f : X \to Y$. Un punto $x_0 \in X$ è di discontinuità di prima specie per f quando esistono i limiti sinistro e destro della funzione per x che tende a x_0 e sono entrambi finiti, ma sono diversi. Ovvero quando valgono tutte le seguenti condizioni:

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) =: f(x_0^-) \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) =: f(x_0^+) \in \mathbb{R}$$

$$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$$

La discontinuità viene comunemente definita **"di salto"** perché l'aspetto del grafico è quello di un salto nel punto di discontinuità. Viene inoltre detto "salto" la quantità $f(x_0^+) - f(x_0^-)$.

Esempio

La funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

vale sempre 1 per x positivi e -1 per x negativi, e fa quindi un "salto" in $x = 0$ (in cui vale 0).

Discontinuità di seconda specie (o essenziale)

Sia $f : X \to Y$. Un punto $x_0 \in X$ è di discontinuità di seconda specie per f quando il limite della funzione per x che tende a x_0 da destra e/o da sinistra è infinito o non esiste. In altre parole, quando vale una delle seguenti condizioni:

$$\nexists \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right)$$

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) \vee \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right) \notin \mathbb{R}$$

Nel primo caso, la discontinuità è anche detta essenziale.

Esempio

Un esempio con il limite infinito è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Discontinuità di terza specie (o rimovibile)

Sia $f : X \to Y$. Un punto $x_0 \in X$ è di discontinuità di terza specie per f quando il limite destro della funzione per x che tende a x_0 è uguale a quello sinistro, con entrambi valori finiti, ma il valore di f in x_0 non coincide con questi limiti. In altre parole, quando valgono tutte le seguenti condizioni:

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) =: f(x_0^-) \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) =: f(x_0^+) \in \mathbb{R}$$

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$$

La discontinuità viene anche detta eliminabile in quanto è sufficiente "aggiustare" il valore di $f(x)$ in x_0 nel modo seguente:

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ f(x_0^-) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

per rendere la funzione continua nel punto.

Esempio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \ell & \text{se } x = 0, \quad \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$$

si può estendere ad una funzione continua in 0 ponendo $\ell = f(x_0^-) = f(x_0^+) = 1$. Per qualunque altra scelta di ℓ, la funzione presenterà discontinuità rimovibile in $x = 0$.

Esercizio 5. Trovare le eventuali discontinuità delle seguenti funzioni.

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Soluzione Nel primo caso si ha che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ quindi la funzione non è continua in zero, e si parla di discontinuità di salto o di prima specie. Nel secondo caso ha che $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ quindi la funzione non è continua in zero, perché è definita $1 = g(0)$. In questo caso si parla di discontinuità rimovibile o di terza specie.

Nota 3. Ricordiamo i **limiti notevoli**

Razionale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k}{b_0x^r + b_1x^{r-1} + ... + b_r} = \begin{cases} \text{sgn}[\frac{a_o}{b_0}] \cdot (\pm 1)^{(k-r)} \cdot \infty, & \text{se } k > r \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{se } k = r \\ 0, & \text{se } k < r \end{cases}$$

Potenza

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

Trigonometrici

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

Esponenziali e logaritmi

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \quad \text{se} \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \quad \text{se} \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \quad \text{se} \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = 0 \quad \text{se} \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = 0 \quad \text{se} \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{se} \quad 0 < a < 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0$$

Esercizio 6. Calcolare il limite per $x\to\pm\infty$ delle seguenti funzioni

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} 2x^3-3x^2=\lim_{x\to\pm\infty} x^3(2-3/x)=\pm\infty$

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} x^2\sin x^2-x^4=\lim_{x\to\pm\infty} x^4(\sin x^2/x^2-1)=-\infty$

(c) $\lim_{x\to\pm\infty} e^x-x=\lim_{x\to\pm\infty} e^x(1-x/e^x)=+\infty$

(d) $\lim_{x\to\pm\infty}\sin\frac{1}{x}\cos x^2=0$ all'infinito $\sin\frac{1}{x}$ tende a zero, mentre $\cos x^2$ è limitato

(e) $\lim_{x\to\pm\infty} x^2e^x-xe^{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty} xe^{x^2}(xe^{-x^2(1-1/x)}-1)=\lim_{x\to\pm\infty} xe^{x^2}\left(x\left(\frac{e}{e^x}\right)^x-1\right)=\mp\infty$

(f) $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2+x}-e^{3x}=\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2(1-1/x)}-e^{3x}=\begin{cases}-\infty & x\to+\infty\\ 0 & x\to-\infty\end{cases}$

Esercizio 7. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^4+3x^3+2}{15x^3+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4(5+3/x+2/x^4}{x^3(15+1/x^3)}=\pm\infty$

(b) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+2x}{15x^3+1}=\frac{1}{5}$

(c) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{14x^3+2}{2x^3+x^2+15x+1} = 7$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^4+3x^3+2}{x^2-1}$

Bisogna fare il limite da destra e da sinistra di 1. Da sinistra ho $-\infty$ e da destra ho $+\infty$ e quindi il limite non esiste.

Nota 4. In generale, la risoluzione di forme indeterminate si appoggia a metodi tecniche e risultati teorici (tre regole d'oro).

Regola di confronto

Se $f(x) \leq g(x)$ allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Regola di Pinocchio

Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e

$$\lim f_{x\to x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L,$$

allora anche

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$

Regola di composizione

Se $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ e $\lim_{x\to l} f(x) = L$, allora anche

$$\lim_{x\to x_0} f \circ g(x) = L.$$

Ordine di convergenza

Si dice che una funzione $f(x)$ **converge** (per $x \to x_0$ oppure per $x \to \pm\infty$) al limite L, più velocemente della funzione $g(x)$, anch'essa convergente ad L, se risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-L}{g(x)-L} = 0 \quad \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-L}{g(x)-L} = 0\right)$$

Possiamo anche confrontare funzioni che tendono a ∞ (divergono).
Si dice che tra le due funzioni divergenti $f(x)$ e $g(x)$, la $f(x)$ **diverge** più rapidamente, se risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\right)$$

Si dice che due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ convergono (oppure divergono) allo stesso ordine se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-L}{g(x)-L} = l \neq 0 \quad \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0\right)$$

Continuità

Riprendiamo ora il concetto di continuità. La funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Le proprietà e le regole relative ai limiti portano alle seguenti:

(a) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 allora sono continue in x_0 anche:

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x_0) \neq)0$$

(b) Se $g(x)$ è continua in x_0 e $f(x)$ è continua in $g(x_0)$, allora $f \circ g(x)$ è continua in x_0

Teorema di Weierstrass

Se la funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$ allora esistono massimo e minimo della funzione in $[a, b]$.

Esercizio 8. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x+1}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+1}{x^3+1} = 0$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 \sin x+5}{5x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{5x^3+1} = 0$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{15e^{3x}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(1+1/e^x)}{e^{3x}(15+1/e^{3x})} = 0$

Esercizio 9. Considerata la funzione $f(x) = x^2+2x+2$ determinare (quando esistono) massimo e minimo della funzione negli intervalli

$$[0,1), \quad [-3,2), \quad [-1,0), \quad (0,+\infty), \quad (-2,+\infty)$$

Determinare quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 2$ negli stessi intervalli.

Soluzione La funzione rappresenta una parabola, che ha concavità verso l'alto e vertice (minimo) in $x = -1$. Questa volta dobbiamo usare il teorema di Weierstrass per decidere se la funzione ha massimo e minimo, si confrontano i punti critici naturali della funzione (dove si annulla la derivata prima) con i valori assunti sul bordo del dominio al quale è stata ristretta. Allora in $[0,1)$ la funzione ha minimo in $x = 0$ ma non ammette massimo, solamente estremo superiore; in $[-3,2)$ ha minimo in $x = -1$ ma non ha massimo; in $[-1,0)$ ha minimo in $x = -1$ ma non ha massimo; in $(0,+\infty)$ non ha né minimo né massimo; in $(-2,+\infty)$ ha minimo in $x = -1$ ma non massimo.
Nel caso di $\mathbf{f(x) = 2}$ si ha l'equazione $x^2 + 2x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$, che ha radici $x_1 = 0$ e $x_2 = -2$. Si tratta quindi di vedere quando questi elementi appartengono agli insiemi proposti, rispettivamente le soluzioni sono: $1, 2, 0, 0, 1$.

Esercizio 10. Per ogni coppia delle seguenti funzioni, dire quale delle due converge più rapidamente per $x \to \infty$, ovvero se divergono allo stesso ordine.

(a) $f(x) = x$, $g(x) = 2x$. Divergono dello stesso ordine, ma più velocemente la g.

(b) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. La g diverge di un'ordine più di f.

(c) $f(x) = log_2 x$, $g(x) = log_2 2x$. Divergono dello stesso ordine, ma più velocemente la g.

(d) $f(x) = 3x$, $g(x) = 32x$. Diverge più velocemente la g.

Esercizio 11. Le funzioni

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sqrt{x+3}, \quad f_3(x) = x^2 - x, \quad f_4(x) = 2^{2x}, \quad f_5(x) = x^2 + 2x^4$$

sono tutte divergenti all'infinito, classificarle in base alla velocità con cui divergono, dalla meno veloce alla più veloce.

Soluzione Facendo un rapido confronto si ha che all'infinito

$$\sqrt{x+3} < x < x^2 - x < x^2 + 2x^4 < 2^{2x}.$$

Esercizio 12. Per $x \to \infty$ determinare l'ordine di convergenza a 0 delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{1}{x^3}, \quad g(x) = e^{-x} - \tfrac{1}{x}, \quad h(x) = e^{-2x} - e^{-x^2}.$$

Soluzione Per $f(x)$ si ha la semplificazione $f(x) = \frac{x-1}{x^3}$ che quindi tende a zero con ordine 2. Per $g(x)$ si mette in evidenza e^{-x} in modo che $e^{-x}(1 - e^x/x)$, dunque si vede come la funzione esponenziale sia dominante nella convergenza. Infine per quanto riguarda $h(x)$ si raccoglie $e^{-x}(e^{x^2-2x} - 1)$ e anche questa volta si vede come sia la funzione esponenziale di ordine maggiore a regolare la convergenza.

Esercizio 13. Due popolazioni diverse si sviluppano nel tempo secondo le due seguenti leggi di crescita,

$$N_1(t) = \tfrac{10+1000t}{t+1} \quad N_2(t) = \tfrac{10+1000t^2}{t^2+1}$$

che rappresentano il numero di individui delle due popolazioni al tempo t. Mostrate che a lungo termine le due popolazioni raggiungono la stessa abbondanza (stesso numero di individui) e trovate la specie che si stabilizza più rapidamente. Quale delle due specie è inizialmente più rapida nella crescita? Perché?

Soluzione Si mostra facilmente che i limiti delle due funzioni per $t \to \infty$ sono

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{10+1000t}{t+1} = 1000 \quad \lim_{x\to\infty} \tfrac{10+1000t^2}{t^2+1} = 1000$$

Ora, per vedere quale delle due specie arriva prima a stabilizzarsi bisogna calcolare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N_1(t) - L}{N_2(t) - L} = \lim_{x\to\infty} \frac{10 + 1000t - 1000(t+1)}{t+1} \frac{t^2+1}{10 + 1000t^2 - 1000(t^2+1)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{t^2+1}{t+1} = +\infty$$

Sarà quindi la seconda specie a stabilizzarsi per prima. Viceversa, si può osservare con un ragionamento analogo, che al tempo iniziale $t = 0$ è la prima popolazione a svilupparsi di più . Dunque esisterà un tempo in cui le due popolazioni avranno lo stesso numero di individui e lo si trova uguagliano le due funzioni. Si trova $t = 1$. Approfondendo lo studio delle due funzioni, si trova che la derivata prima delle due funzioni è $N_1'(t) = 990/(t+1)^2$ e $N_2'(t) = 1980t/(t^2+1)^2$. Da ciò si evince che la prima funzione sarà crescente monotona, mentre la seconda parte per $t = 0$ in un punto stazionario.
Di più si può ricavare dallo studio della derivata seconda: $N_1''(t) = -990(2t+2)/(t+1)^4$ e $N_2''(t) = 1980(-3t^4-2t^2+1)/(t^2+1)^4$. La prima specie presenta un flesso, per $t < 0$, mentre la seconda ha un flesso per $t = \sqrt{3}/3$, la concavità è inizialmente verso l'alto, poi verso il basso.