Lezione 4 (8/10/2014)

Esercizi svolti a lezione

Nota 1. Teorema del valore intermedio: Se la funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e si ha:

$$f(a) < k \quad (f(a) > k), \quad f(b) > k \quad (f(b) < k)$$

allora esiste almeno un punto x_0 in cui $f(x_0) = k$.
Questo teorema interviene nella risoluzione di equazioni come $f(x) = k$, dove $f(x)$ è una funzione di variabile reale. Ciò corrisponde a identificare le intersezioni del grafico con la retta orizzontale di quota k. Applicando il teorema basta trovare un punto in cui la funzione assuma un valore superiore a k e uno in cui assuma un valore inferiore, per essere sicuri di avere almeno una soluzione dell'equazione.

Il teorema del valore intermedio è alla base del metodo di bisezione per la determinazione numerica (approssimata) delle radici di un'equazione.
Se infatti vogliamo risolvere l'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[\alpha_0, \beta_0]$, sapendo che $f(\alpha_0) < 0$ e $f(\beta_0) > 0$ possiamo adottare il seguente procedimento:

(1) consideriamo il punto medio dell'intervallo $\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}$ e calcoliamo $f_M = f(\frac{\alpha_0+\beta_0}{2})$

(2) se $f_M < 0$ poniamo $\alpha_1 = \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}$ e $\beta_1 = \beta_0$, se invece $f_M > 0$, poniamo $\alpha_1 = \alpha_0$ e $\beta_1 = \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}$

(3) andando avanti in questo modo si costruiscono gli intervalli $[\alpha_n, \beta_n]$ all'interno dei quali si trova almeno una radice dell'equazione.

(4) L'approssimazione con cui tale radice viene determinata è data dall'ampiezza dell'intervallo $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0-\alpha_0}{2^n}$

Esercizio 1. Determinare se l'equazione $x^2 + 3e^x + \sin x + \ln x = 0$ possiede almeno una soluzione nell'intervallo $(0, +\infty)$. Perché?

Soluzione Un metodo intuitivo per stabilire se una funzione continua abbia una soluzione in un determinato intervallo chiuso $[a, b]$ consiste nell'applicare il teorema del valore intermedio. Questo teorema si enuncia come: Una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ assume in tale intervallo tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Esso è utile quando $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto, perché assicura che esiste un punto intermedio tra a e b in cui la funzione passa per lo zero. La funzione di questo esercizio è continua nell'intervallo, dunque stabilire se abbia uno zero significa trovare un intervallo come appena descritto. Osservando la funzione si nota come i primi addendi siano sempre positivi, la funzione $\sin x$ oscilla tra ± 1, mentre il logaritmo per $x \in (0, 1)$ è sempre negativo. Un calcolo anche approssimato ci dice che

$$f(1/100) \approx -1.56$$

e

$$f(1/2) \approx 4.98.$$

Nota 2. Ricordiamo il concetto di **derivata**.

Consideriamo una funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e definiamo il rapporto incrementale nel punto x_0 come

$$r(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

che come funzione della variabile h ha dominio $D = \mathbb{R} - \{0\}$. Se esiste (finito)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si dice che la funzione è derivabile in x_0 e che $f(x_0)$ è la sua derivata.

Geometricamente la la derivata di una funzione, in un punto x_0 , si identifica col coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione, nel punto x_0 .

Regole per il calcolo delle derivate

(a) la funzione costante $f(x) = c$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, ha derivata nulla in ogni punto: $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(b) se una funzione $f(x)$ ha derivata nulla in tutto un intervallo, allora è costante in tutto l'intervallo;

(c) la seguente tabella operativa permette il calcolo della derivata di una funzione a partire da casi semplici.

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

(notare che in generale l'ultima) ha senso solo nei punti in cui $g(x) \neq 0$).

Derivate fondamentali

Funzioni polinomiali

$$\mathrm{D}(a) = 0\,,\ a \text{ costante}$$

$$\mathrm{D}(x) = 1$$

$$\mathrm{D}(ax) = a\,,\ a \text{ costante}$$

$$\mathrm{D}(x^2) = 2x$$

$$\mathrm{D}(x^3) = 3x^2$$

In generale si ha:

$$\mathrm{D}(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Altre funzioni algebriche

$$\mathrm{D}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{D}(\sqrt[2]{x}) = \frac{1}{2\sqrt[2]{x}}$$

$$\mathrm{D}(\sqrt[n]{x^m}) = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}} \quad \text{se } x > 0$$

$$\mathrm{D}(|x|) = segno(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ \text{non definito} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Funzioni logaritmiche ed esponenziali

$$\mathrm{D}(\log_b x) = \frac{\log_b \mathrm{e}}{x} = \frac{1}{x \ln b}$$

$$\mathrm{D}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathrm{D}(e^x) = \mathrm{e}^x$$

$$\mathrm{D}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\mathrm{D}(x^x) = x^x(1 + \ln x)$$

Funzioni trigonometriche

$$\mathrm{D}(\sin x) = \cos x$$

$$\mathrm{D}(\cos x) = -\sin x$$

$$\mathrm{D}(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{D}(\cot x) = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\mathrm{D}(\sec x) = \tan x \sec x$$

$$\mathrm{D}(\csc x) = -\cot x \csc x$$

$$\mathrm{D}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{D}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{D}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{D}(arccotx) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{D}(arcsecx) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\mathrm{D}(arccscx) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Funzioni iperboliche

$$\mathrm{D}(\sinh x) = \cosh x$$

$$\mathrm{D}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\mathrm{D}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\mathrm{D}(\coth x) = -\mathrm{csch}^2 x$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{sech} x) = -\tanh x \operatorname{sech} x$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{csch} x) = -\coth x \operatorname{csch} x$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{settsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{settanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{settcoth} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{settsech} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{settcsch} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

Derivate di funzioni composte

$$\mathrm{D}(|f(x)|) = segno(f(x)) \cdot f'(x) \ = f'(x) \cdot \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) > 0 \\ -1 & \text{se } f(x) < 0 \\ \text{non derivabile} & \text{se } f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{D}([f(x)]^n) = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$\mathrm{D}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\mathrm{D}(\ln |f(x)|) = segno(f(x)) \cdot \frac{f'(x)}{|f(x)|} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\mathrm{D}(\mathrm{e}^{f(x)}) = \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\mathrm{D}(a^{f(x)}) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$$

$$\mathrm{D}(\sin f(x)) = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$\mathrm{D}(\cos f(x)) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$$

$$\mathrm{D}(\tan f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

$$D(\arcsin f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$D(\arccos f(x)) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$D(\arctan f(x)) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$D(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)} \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$$

$$D(x^{f(x)}) = x^{f(x)} \cdot \left\{ f'(x) \cdot \ln x + \frac{f(x)}{x} \right\}$$

Esercizio 2. Lo spostamento (espresso in metri) di una particella che si muove su una linea retta è assegnato dall'equazione del moto $s = 4t^2+6t+2$. Trovare la velocità della particella agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$.

Soluzione Si tratta di valutare la funzione $s'(t) = 8t+6$ negli istanti richiesti, rispettivamente si ottiene $6, 14, 22, 30$.

Esercizio 3. Usando la definizione come limite del rapporto incrementale, calcola la derivata delle funzioni seguenti.

(a) $f(x) = x - 12$. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-12-x+12}{h} = 1$

(b) $f(x) = 2x + 3$. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x+2h-2x}{h} = 2$

(c) $f(x) = x^2 - 1$. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$

(d) $f(x) = (x-1)^2$. $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x-1)^2+2(x-1)h+h^2-(x-1)^2}{h} = 2(x-1)$

Esercizio 4. Mostra che la derivata di una funzione (derivabile) pari è dispari. Cosa puoi dire della derivata di una funzione dispari?

Soluzione Sfruttando la formula della derivata della funzione composta si ha che per una f pari,

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1 \cdot f'(-x).$$

Similmente si provo che se $f(-x) = -f(x)$ allora $-f'(-x) = -f'(x)$ cioè la derivata di una funzione dispari è pari.

Esercizio 5. In quale punto è minima la pendenza del grafico di $x^3 + 3$ nell'intervallo $[-1, 2]$?

Soluzione La pendenza della funzione è data da $m(x) = 3x^2$, il minimo di questa funzione si trova ponendo a zero $m'(x) = 6x$ ovvero è in $x = 0$. Confrontando ora il valore in zero con i valori assunti dalla funzione agli estremi del dominio si trova il minimo di $m(x)$. Si ha che $m(0) = 0$, $m(-1) = 3$ e $m(2) = 12$. Dunque m è minima in $x = 0$.

Esercizio 6. Date le funzioni $f(x) = 2x^3 - 6x$, $g(x) = -4x^2 + 1$ e $h(x) = 5x - 7$, calcolare la retta tangente ai grafici di f, g, h nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

Soluzione La derivata di f è $f'(x) = 6x^2 - 6$, ovvero il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $x = -1$ è $f'(-1) = 0$, dunque si avrà una retta orizzontale. L'intercetta sull'asse y si ha per $f(-1) = 4$. In conclusione la tangente al grafico in $x = -1$ è $y = 4$, ciò significa che ci troviamo su un punto stazionario.
Per la $g(x)$ si ha che $g'(x) = -8x$, la generica retta si indica con $y = mx + q$, il coefficiente $m = g'(x_0) = 8$, allora q si trova come $y(x_0) - mx_0 = g(x_0) - mx_0 = -3 - 8(-1) = 5$. Quindi la tangente è $y = 8x + 5$.
Per h si ha che $h'(x) = 5$, la generica retta si indica con $y = mx + q$, il coefficiente $m = h'(x_0) = 5$, allora q si trova come $y(x_0) - mx_0 = h(x_0) - mx_0 = -5 - 7 + 5 = -7$. Quindi la tangente è $y = 5x - 7$.