Lezione 6 (16/10/2014)

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 10x^5 - x$ è crescente? Perché?

Soluzione Se f fosse crescente avrebbe derivata prima (strettamente) positiva. Verifichiamo che non è così perché $f'(x) = 50x^4 - 1$ che si annulla per $x = \sqrt[4]{1/50}$. Due di queste radici quarte sono reali, dunque ci sono due punti stazionari. Per vedere che si tratta di un massimo e di un minimo, guardiamo il segno della derivata seconda in quei due punti. La derivata seconda è $f''(x) = 200x^3$ e prende il segno della radice in cui è calcolata. Quindi si ha che la f è decrescente nell'intervallo $[-\sqrt[4]{1/50}, \sqrt[4]{1/50}]$.

Esercizio 2. Determina se le funzioni $f(x) = x^3 + 2x$ e $g(x) = 2x^3 + x$ sono crescenti o meno giustificando la risposta.

Soluzione Verificare la crescenza corrisponde a studiare il segno della derivata prima di una funzione. Nel caso di f e g le derivate prime sono $f'(x) = 3x^2+2$ e $g'(x) = 6x^2 + 1$, si vede che sono espressioni sempre positive, perché sono la somma di un quadrato e di un numero positivo quindi le due funzioni sono crescenti.

Esercizio 3. Studia crescenza, descrescenza e gli eventuali massimi e minimi locali delle seguenti funzioni.

$$x^4, \quad x^7, \quad -6x^2 + 2x^3, \quad 3x^2 + 6x, \quad 2x^4 - 2x^2 + 1.$$

Soluzione Per x^4 si ha che la funzione decresce in $(-\infty, 0)$, cresce in $(0, \infty)$ ed ha un punto di minimo in $x = 0$.
Per x^7 si ha che la funzione è sempre crescente (non strettamente in $x = 0$ che è un flesso) in quanto la derivata prima è $7x^6$
. Per $-6x^2 + 2x^3$ si ha che la derivata prima è $6x^2 - 12x$, ovvero ci sono due punti stazionari in $x = 0$ e $x = 2$. Sono rispettivamente punti di massimo e di minimo, e si ha che in $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$ la funzione è crescente (decrescente in $(0, 2)$).

Per $3x^2+6x$ si ha che è decrescente per $x < -1$ con un minimo in $x = -1$. Per $2x^4 - 2x^2 + 1$ si può osservare che la derivata prima è $8x^3 - 4x$, si annulla in $x = 0, \pm\sqrt{2}/2$. Per vedere se sono massimi o minimi basta verificare il segno della derivata seconda, che assicura che $x = 0$ è un massimo, mentre $x = \pm\sqrt{2}/2$ sono minimi (assoluti). In conclusione si ha che la funzione è decrescente per $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$, è crescente per $(-\sqrt{2}/2, 0)$, decrescente per $(0, \sqrt{2}/2)$ e di nuovo crescente per $(\sqrt{2}/2, +\infty)$.

Esercizio 4. Quante soluzioni hanno le equazioni $p(x) = x^3 + x^2 + 27$ ed $q(x) = x^3 - 2x^2 + 27$?

Soluzione Per contare il numero di soluzioni si sfrutta il fatto che le funzioni sono continue, ed in base a come sono collocati massimi e minimi, attraversano o meno l'asse delle ascisse. Per $p(x)$ si ha che $p'(x) = 3x^2 + 2x$ e la derivata si annulla per $x = 0, -2/3$. La derivata seconda è $p''(x) = 6x + 2$ e dice che $p(0) = 2 > 0$ è un minimo, $p(-2/3) = -2 < 0$ è un massimo. Per verificare la posizione dei punti stazionari è sufficiente valutare p in quei punti, rispettivamente si ha che $p(0) = 4/27 > 0$ e $p(-2/3) = 8/27 > 0$. Di conseguenza questi due punti stazionari sono ininfluenti per il conto delle radici reali, rimane quindi che p ha solamente una radice reale.

Per l'equazione $q(x)$ vale lo stesso ragionamento: si ha che $q'(x) = 0$ per $x = 0, 4/3$, che sono rispettivamente punti di massimo e minimo. Inoltre $q(0) = 4/27 > 0$ e $q(4/3) = -28/27 < 0$. Questo ci garantisce l'esistenza di tre radici reali.

Esercizio 5. Sapendo che f è continua in $(0, 1)$ e vale $f(0) > f(1) > 0$, che cosa posso concludere sul numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ con $x \in [0, 1]$?

SoluzioneNon si può concludere niente di definitivo. L'unica cosa che si può dire è che se esistono radici di $f(x) = 0$, allora devono essere un numero pari su $[0, 1]$.

Esercizio 6. Sapendo che f è continua in $(0, 1)$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 1)$ con $f(0) > f(1) > 0$, che cosa posso concludere sul numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ con $x \in [0, 1]$?

SoluzioneSi può dire che f non ha radici in quell'intervallo, infatti se ne

avesse, per continuità, ci dovrebbe essere un punto in cui la funzione risale per tornare a $f(1) > 0$, ovvero ci sarebbe un punto in cui la derivata prima si annulla, ma questo è assurdo per ipotesi.

Esercizio 7. Quante soluzioni ha l'equazione $x - 3ln(x) = 0$?

Soluzione Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}^+$. Sul dominio studiamo massimi e minimi della funzione e i limiti agli estremi. La derivata prima è $1 - 3/x$ e posta uguale a zero dà come punto stazionario $x = 3$. La derivata seconda è $3/x^2$, quindi positiva, ci dice che $x = 3$ è un punto di minimo. Valutando la funzione in $x = 3$ si vede la posizione di questo minimo, e si trova un valore negativo $(3 - 3\ln(3))$. Rimangono da verificare i limiti agli estremi del dominio, ovvero per $x \to 0^+$ e $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} x - 3\ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} x - 3\ln(x) = \lim_{x\to\infty} x(1 - 3\ln(x)/x) = +\infty.$$

Dunque la funzione attraversa l'asse delle ascisse in due punti.

Nota 1. Sviluppo di Taylor

L'uso della derivata seconda permette una migliore approssimazione della funzione nell'intorno di un punto. Infatti abbiamo1

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + 1/2!f''(x_0)(x - x_0)^2 + E2(x, x_0)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots \ ;$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \ ;$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \ ;$$

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 + \cdots \ ;$$

Calcolo di limiti

Con le approssimazioni basate sull'espansione di Taylor ci si può aiutare a calcolare certi limiti del tipo ($x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}.$$

Infatti abbiamo gli esempi

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{E}_4(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{\mathcal{E}_4(x,0)}{x}\right) = 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+\mathcal{E}_2(x,0))^2}{\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{E}_3(x,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \mathcal{E}_2^2(x,0) + 2x\mathcal{E}_2(x,0)}{\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{E}_3(x,0)} = \\ = \lim_{x\to 0} 2\frac{1 + \frac{\mathcal{E}_2^2(x,0)}{x^2} + 2\frac{\mathcal{E}_2(x,0)}{x}}{1 + 2\frac{\mathcal{E}_3(x,0)}{x^2}} = 2$$

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + \mathcal{E}_2(x,0)}{\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{E}_3(x,0)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\frac{1 + \frac{\mathcal{E}_2(x,0)}{x}}{\frac{1}{2} + \frac{\mathcal{E}_3(x,0)}{x^2}} = +\infty$$

La regola di de l'Hôpital

Per altre forme indeterminate uno strumento utile è la regola di de l'Hôpital da usare seguendo la seguente ricetta:

- voglio calcolare il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ che corrisponde alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ (nota che $x_0 \in \mathbb{R}$, oppure $x_0 = \pm\infty$);
- provo a calcolare $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$;
- se il limite di cui al punto precedente esiste ($L \in \mathbb{R}$ oppure $L = \pm\infty$) allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Con questa regola si possono ad esempio determinare i limiti

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ (con n intero positivo) , $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ (con $\alpha > 0$) ,

ma non quelli del tipo

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Esercizio 8. Calcolare i seguenti limiti utilizzando la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x}{x^2 + x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 1}{2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+2}}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+2}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+2}}{2} = \infty$$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti utilizzando la regola di de l'Hôpital e lo sviluppo di Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x + x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1}{\cos x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x + x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1 + x + 1/2!x^2) + x}{x - 1/3!x^3 + 1/5x^5} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{e^x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x + x^2 \cos x}{e^x(1 - \cos x + \sin x)} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{e^x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x - 1/3!x^3)}{(1 + x + 1/2!x^2)(1 - 1 + 1/2!x^2)} = 0$$

Esercizio 10. Trovare l'equazione della retta passante per il punto (3,4) tale che il triangolo costruito nel primo quadrante con vertici l'origine degli assi e le intersezioni della retta con i semiassi positivi abbia area minima.

Soluzione La retta passante per il punto (3,4) sarà

$$y - 4 = m(x - 3)$$

e quindi

$$y = mx - 3m + 4$$

quindi possiamo trovarci le intersezioni con gli assi delle x (A) e delle y (B) e abbiamo

$$A = (0, -3m + 4)$$

$$B = (\frac{3m + 4}{m}, 0)$$

Quindi l'area è

$$A = \frac{3m + 4}{m} \times \frac{-3m + 4}{2} = \frac{-9m^2 + 16}{2m}$$

Dobbiamo trovare l'area minima e quindi facciamo la derivata

$$A' = \frac{-18m(2m) - (-9m^2 + 16)2}{4m^2} = \frac{-18m^2 + 36}{4m^2}$$

Vediamo che questa si annulla in $\pm\sqrt{2}$ e, andando a studiare il segno della derivata prima o facendo la derivata seconda, come in classe, possiamo vedere che il minimo è $-\sqrt{2}$. Quindi la nostra retta che minimizza l'area è

$$y = -\sqrt{2}x - 3\sqrt{2} + 4$$

Notiamo che abbiamo che $m \neq 0$ che rispetta l'idea intuitiva che, per minimizzare l'area del triangolo o anche solo per avere un triangolo, la nostra retta non può essere parallela all'asse delle x

Esercizio 11.

ESERCIZIO 8.38 Il padrone di un mobilificio sa che produrre 100 sedie al giorno costa 3000 euro, mentre produrne 300 costa 4600 euro.

(a) Esprimere il costo in funzione del numero di sedie, supponenendo lineare la relazione.

(b) Qual'è l'intercetta sull'asse y e cosa rappresenta?

Sulla base di ricerche di mercato, si ipotizza che, se p è il prezzo, il numero delle sedie vendute al giorno sarà dato dalla funzione $f(p) = 30\frac{128-p}{p}$ se $0 < p \leq 128$, sarà uguale a 0 se $p > 128$.

(a) Trovare a quale prezzo si riusciranno a vendere x sedie al giorno.

(b) Supponendo che si scelga il prezzo a cui si riesce a vendere l'intera produzione, trovare qual è il numero di sedie che conviene produrre per massimizzare il guadagno.

Soluzione Se ci immaginiamo di mettere il numero di sedie sull'asse delle x e il costo su quello delle y, quello che dobbiamo fare è trovare la retta passante per i punti A=(100,3000) e B=(300,4600). Quindi avremo

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

$$y - 3000 = \frac{1600}{200}(x - 100)$$

quindi

$$c = 8x + 2200$$

quindi abbiamo espresso il costo in funzione del numero di sedie prodotto. L'intersezione con l'asse delle y sarà (0,2200) ed è il costo base di produzione delle sedie.
Dato che $f(p) = x$ che è il numero di sedie vendute al giorno al variare del

prezzo p, dobbiamo trovare il prezzo in base al numero di sedie e quindi avremo

$$xp = 30(128 - p) \Rightarrow (x + 30)p = 3840 \Rightarrow p = \frac{3840}{x + 30}$$

per $0 < x \leq 3810$ e se $x = 0$ sappiamo che il prezzo sarà maggiore di 128. Abbiamo trovato il prezzo di una sedia, avendo venduto x sedie. Quindi ora noi abbiamo l'epressione del prezzo in funzione del numero di sedie e del costo in funzione del numero di sedie. Il guadagno è la differenza tra prezzo di una sedia moltiplicato per il numero di sedie e costo di tutte le sedie e quindi avremo

$$g = px - c = \frac{3840x}{x + 30} - 8x - 2200 = \frac{3840x - 8x^2 - 240x - 2200x - 66000}{x + 30} =$$

$$= \frac{-8x^2 + 1400x - 66000}{x + 30}$$

A questo punto dobbiamo massimizzare il guadagno e dobbiamo quindi fare la derivata prima di questa funzione e andare a studiare il segno

$$g' = \frac{(-16x + 1400)(x + 30) + 8x^2 - 1400x + 66000}{(x + 30)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 - 60x + 13500}{(x + 30)^2}$$

che è uguale a zero in -150 e 90. Quindi, andando a studiare il segno, possiamo vedere che, essendo una parabola con concavità verso il basso avremo che in -150 troveremo un minimo e in 90 avremo un massimo. Quindi il numero di sedie per massimizzare il guadagno è 90.