Lezione 7 (30/10/2014)

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. *Calcolare le primitive delle seguenti funzioni.*

- $\int 2x + 6 \, \mathrm{d}x = x^2 + 6x + c.$
- $\int x^3 - \frac{2}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| + c.$
- $\int \cos x - \sin x \, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + c.$
- $\int e^x + \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = e^x - \frac{1}{x} + c.$
- $\int x^{1/2} + x^{-1/3} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{2/3} + c.$

Esercizio 2. *Ricordando gli sviluppi di Taylor verificare che valgono le seguenti uguaglianze, dove c è una costante arbitraria.*

- $\int e^x \, \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x + \int x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2!}\int x^2 \, \mathrm{d}x + \ldots + c.$ Si può integrare la serie per l'esponenziale termine a termine, cosa che dà
$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + (k-1) = e^x + c.$$
A questo punto, sarà $c = k - 1$ la costante arbitraria (infatti k è a sua volta arbitraria).
- $\int \sin x \, \mathrm{d}x = \int x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{3!}\int x^3 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{5!}\int x^5 \, \mathrm{d}x + \ldots + c.$ Si può integrare la serie per il seno termine a termine, cosa che dà
$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!4}x^4 + \frac{1}{5!6}x^6 + \ldots + k = (k+1) - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots = -\cos x + c.$$
A questo punto, sarà $c = k + 1$ la costante arbitraria (infatti k è a sua volta arbitraria).
- $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2!}\int x^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{4!}\int x^4 \, \mathrm{d}x + \ldots + c.$ Si può integrare la serie per il coseno termine a termine, cosa che dà
$$x - \frac{1}{2!3}x^3 + \frac{1}{4!5}x^5 - \frac{1}{6!7}x^7 + \ldots + k = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + k = \sin x + c.$$
A questo punto, sarà $c = k$ la costante arbitraria (infatti k è a sua volta arbitraria).

Esercizio 3. *Calcolare i seguenti integrali. Si suggerisce di usare il metodo di sostituzione.*

- $\int e^{2x-1}\,\mathrm{d}x$. Si procede individuando il gruppo di variabili da sostituire, in questo caso, poiché è agevole calcolare l'integrale della funzione esponenziale e^y conviene effettuare il cambio $y = 2x - 1$. Ora bisogna cambiare anche il differenziale, e derivando membro a membro l'equazione precedente si ha $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$, e risolvendo per $\mathrm{d}x$ si ottiene $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$. L'integrale di partenza si risolve quindi come
$$\int e^{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y + c = \frac{1}{2}e^{2x-1} + c,$$
dove con c si intende la costante di integrazione additiva.

- $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Il cambio di variabile da operare è $y = 1 - x^2$, in questo modo possiamo riconoscere, prima della radice, l'espressione che ci cambia il differenziale, ovvero $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$ da cui $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$. Allora si ha che
$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int y^{1/2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}y^{3/2} + c = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + c.$$

- $\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x$. Il cambio di variabile da operare è $y = 3x+1$, in questo modo il differenziale è $\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x$ da cui $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y$. Allora si ha che
$$\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\ln|y| + c = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + c.$$

- $\int \sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$. Il cambio di variabile da operare non è $y = \cos^2 x$, in questo modo il differenziale è $\mathrm{d}y = 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$, ma non si riesce a sostituire questa quantità. Meglio sostituire $y = \cos x$ da cui $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$ e questa volta riconosciamo questa quantità. Allora si ha che
$$\int \sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\int y^2\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{3}y^3 + c = -\frac{1}{3}\cos^3 x + c.$$

Esercizio 4. *Calcolare i seguenti integrali. Si suggerisce di usare il metodo di integrazione per parti.*

- $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$. Riconosciamo le seguenti parti della formula di integrazione per parti, $F = x$, $g = \sin x$ da cui si possono ricavare $f = 1$ e $G = -\cos x$. L'integrale allora si risolve in
$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \int 1 \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x + c.$$

- $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$. Riconosciamo le seguenti parti della formula di integrazione per parti, $f = e^x$, $G = \sin x$ da cui si possono ricavare $F = e^x$ e $g = \cos x$. L'integrale allora si risolve in
$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Possiamo ripetere il procedimento una seconda volta scegliendo $f = e^x$ e $G = \cos x$, quindi $F = e^x$ e $g = -\sin x$, e l'integrale precedente diventa
$$e^x \sin x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x \right] = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$
Ricordando ora che questa espressione risultava nell'integrale di partenza, si ricava
$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x,$$
allora basta isolare l'integrale di partenza al primo membro, ovvero
$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$$

- $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$. Riconosciamo le seguenti parti della formula di integrazione per parti, $f = x$, $G = \ln x$ da cui si possono ricavare $F = \frac{1}{2}x^2$ e $g = 1/x$. L'integrale allora si risolve in
$$\int x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c.$$

- $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$. Riconosciamo le seguenti parti della formula di integrazione per parti, $F = x^2$, $g = \sin x$ da cui si possono ricavare $f = 2x$ e $G = -\cos x$. L'integrale allora si semplifica in
$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, \mathrm{d}x,$$
ripetendo l'integrazione per parti con $F = x$, $g = \cos x$ da cui $f = 1$ e $G = \sin x$ si risolve:
$$-x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \, \mathrm{d}x,$$
quest'ultimo è un integrale elementare, quindi in conclusione,
$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

Esercizio 5. *Calcolare le primitive delle seguenti funzioni razionali.*

- $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Un modo generale per risolvere questo tipo di integrali è ridurre le frazioni a proprie e poi espandere in fratti semplici. In questo caso si riesce a scomporre in fratti semplici l'espressione richiesta senza particolari problemi. Si ha

$$\frac{x^3+2x^2}{1+x^2} = \frac{x^3}{1+x^2} + 2\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2\cdot x}{1+x^2} + 2\frac{x^2+1-1}{1+x^2}.$$

prendendo ora l'integrale di quest'ultima quantità, si osserva come nel primo addendo sia naturale la sostituzione $y = x^2$ con differenziale $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$, nel secondo addendo si riconosce la derivata dell'arcotangente. Mettendo tutto insieme si ha

$$\int \frac{x^3+2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2\cdot x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 2\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{y}{1+y}\,\mathrm{d}y + 2x - 2\arctan x.$$

Semplificando ulteriormente, il primo addendo si semplifica e si ottiene,

$$\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y+2x-2\arctan x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\ln|1+y|+2x-2\arctan x,$$

Sostituendo y per riottenere un'espressione in x si ha

$$\int\frac{x^3+2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+2x-2\arctan x+c.$$

Facciamo la derivata di questa uguaglianza e ritroviamo l'integrando di partenza:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+2x-2\arctan x+c\right)=x-\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}+2-\frac{2}{1+x^2}$$

e riordinando i termini si ha

$$\frac{x(1+x^2)-x+2(1+x^2)-2}{1+x^2}=\frac{x^3+2x^2}{1+x^2}$$

come volevamo.

- $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$. In questo caso proviamo a scomporre l'integrando in fratti semplici, si inizia cercando di fattorizzare il denominatore in fattori lineari o potenze di fattori irriducibili. Il polinomio al denominatore si scompone in $(x-1)(x-2)$, cerchiamo quindi due numeri reali A e B tali che

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Ci sono vari modi per trovare A e B, il più classico consiste nel fare il minimo comune multiplo dei due addendi al secondo membro ed uguagliare il risultato al primo membro ottenendo un sistema lineare di due equazioni nelle incognite A e B. Ciò significa risolvere

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$$

e le due equazioni diventano $A+B=0$ e $-2A-B=1$. Sicuramente questo è un sistema molto semplice da risolvere, e la soluzione è $A=-1$ e $B=1$, tuttavia ci sono modi più semplici per arrivare allo stesso risultato facendo meno fatica. Ad esempio uno è osservare che A si può ricavare moltiplicando le uguaglianze precedenti per $x-1$ e sostituendo $x=1$ al risultato, ovvero

$$(x-1)\cdot\frac{1}{(x-1)(x-2)}\bigg|_{x=1}=(x-1)\cdot\frac{A}{x-1}+(x-1)\cdot\frac{B}{x-2}\bigg|_{x=1}$$

cioè,

$$-1=\frac{1}{(x-2)}\bigg|_{x=1}=A+0\implies A=-1.$$

Ripetendo lo stesso argomento con l'altro fattore del denominatore, $x-2$, e sostituendo $x=2$ si ricava il coefficiente $B=1$. Dunque abbiamo scomposto in fratti semplici il nostro integrale, che ora possiamo risolvere facilmente.

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + c.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$. Se provassimo a risolvere questo esercizio come il precedente ci accorgeremmo subito che il denominatore si scompone $(x+1)^2$. La scomposizione in fratti semplici, nel caso di potenze di fattori lineari, diventa

  $$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1+x)^2},$$

  e si scoprirebbe che $A=0$ e $B=1$, ovvero non ci sarebbe di grande aiuto perché la nostra espressione è già scomposta. Ma questa volta è più semplice risolvere l'integrale con il metodo di sostituzione, in pratica ponendo $y=1+x$ il differenziale non cambia ($\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$) e si ha

  $$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y} + c = -\frac{1}{1+x} + c.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$. Questa volta la situazione è ancora differente rispetto ai casi precedenti, in quanto il denominatore di questa frazione è un polinomio irriducibile sui reali, ovvero ha radici complesse. In questo caso è sufficiente riutilizzare un trucchetto visto in precedenza, cioè osservare che $x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$. In questo modo viene naturale la sostituzione $y=x+1$ da cui $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$ e

  $$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \arctan y + c = \arctan(1+x) + c.$$

Esercizio 6 *Data una funzione $y = f(x) = 2x^2$ nell'intervallo $[1, 4]$, calcolare i valori*

$$y_1 = f(1), \qquad y_2 = f(2), \qquad y_3 = f(3)$$

e le aree dei rettangoli

$$R_1 = 1 \cdot f(1), \qquad R_2 = 1 \cdot f(2), \qquad R_3 = 1 \cdot f(3).$$

Utilizzare il metodo dei rettangoli $\sum_{i=1}^{3} R_i$ per approssimare $A = \int_1^4 f(x)\,dx$. Calcolare infine A e spiegare perché l'approssimazione ottenuta è inferiore ad A.

I tre valori richiesti inizialmente sono dati dalla valutazione della funzione f nei tre punti, ovvero $y_1 = f(1) = 2$, $y_2 = f(2) = 8$, $y_3 = f(3) = 18$. Usando la sommatoria suggerita, si ha che $\sum_{i=1}^{3} R_i = 2 + 8 + 18 = 28$. Se invece si calcola esplicitamente l'integrale, si ottiene

$$A = \int_0^4 2x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(64 - 1) = 42 > 28.$$

L'approssimazione fatta con i rettangoli è per difetto perché la funzione è crescente e stiamo considerando il rettangolo che sta sempre sotto il grafico della funzione.

Esercizio 7 *Utilizzando la proprietà additiva delle aree, trasformare le seguenti somme di integrali di una funzione data $f(x)$, nell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ esteso ad un unico intervallo.*

- $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_8^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{13} f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_5^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{10} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Esercizio 8 *Data la funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2 - 2t^4}\,dt$, trovare il primo dei valori $x > 0$ per cui si ha che $f''(x) = 0$.*

Basta applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$f'(x) = e^{x^2-2x^4}, \implies f''(x) = (2x - 8x^3)e^{x^2-2x^4}.$$

L'ultima espressione è zero quando la quantità tra parentesi è zero, ovvero quando $x = 0, \pm\frac{1}{2}$. Tra questi, scegliamo il valore $x = \frac{1}{2} > 0$.

Vediamo più in generale il teorema di derivata di un integrale su un generico intervallo mobile. Consideriamo una funzione di due variabili indipendenti $f(x,t)$, supponiamo che gli estremi di integrazioni non siano fissi (ovvero due numeri reali), ma siano mobili, ovvero dipendano, ad esempio dalla variabile x, dunque vediamo come si fa la derivata di un integrale del tipo $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Usando l'identità di Leibniz si ha che

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,\mathrm{d}t + f(x,b(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b(x) - f(x,a(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a(x).$$

Una breve dimostrazione del teorema si ricava facendo il limite del rapporto incrementale di $F(x)$, assumendo che la $F(x)$ sia derivabile con derivata continua in x. Il rapporto incrementale è dato da

$$\begin{aligned}
&\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{a(x+h)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{a(x+h)}^{a(x)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t + \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t + \int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_{a(x)}^{a(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ora, poiché $\mathrm{d}/\,\mathrm{d}x f(x,t)$ è continua, il primo addendo ha come limite $\int_{a(x)}^{b(x)} \mathrm{d}/\,\mathrm{d}x f(x,t)\,\mathrm{d}t$, vediamo che cosa diventano gli altri due addendi, consideriamo il secondo, ma analoghe considerazioni valgono per il terzo. Per il teorema della media, esiste un punto ξ compreso tra $b(x)$ e $b(x+h)$ tale che

$$\frac{1}{h}\int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,\mathrm{d}t = \frac{b(x+h) - b(x)}{h} f(x+h,\xi),$$

prendendo il limite per $h \to 0$ si ha che $\xi \to b(x)$ e quindi il secondo addendo si scrive

$$f(x, b(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} b(x).$$

Con lo stesso argomento si mostra che il terzo addendo diventa $f(x, a(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a(x)$.
Ad esempio consideriamo $\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$, la derivata rispetto a x di questo integrale è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_x^{x^2} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \int_x^{x^2} 0\, \mathrm{d}t + e^{-x^4} 2x - e^{-x^2} = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}.$$

Il caso dell'esercizio proposto è più semplice in quanto il calcolo si riduce a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x e^{t^2-2t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 0\,\mathrm{d}t + e^{x^2-2x^4} - 0 = e^{x^2-2x^4}.$$

Esercizio 9 *Verificare la validità della stima*

$$0 \leq \int_1^4 \ln x\,dx \leq 3\ln 4.$$

L'integrando nell'intervallo considerato è positivo, lo si può approssimare con un rettangolo per difetto (con il rettangolo degenere di base 3 e altezza 0) e per eccesso con il rettangolo che ha per altezza il valore massimo della funzione nell'intervallo, ovvero $\ln 4$.

Esercizio 10 *Stimare per difetto e per eccesso il valore dell'integrale* $\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx$.

Anche in questo caso l'integrando è crescente, quindi si può procedere come visto negli esercizi precedenti, il valore minimo che assume è 4 per $x = 0$, dunque un rettangolo per difetto dà area $4 \cdot 3 = 12$, un rettangolo che approssima per eccesso è dato dal valore massimo che assume (in $x = 3$) cioè 5. Dunque vale la stima

$$12 \leq \int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x = \frac{15}{2} + 8\ln 2 \approx 13.05 \leq 15$$

Esercizio 11 *La numerosità di una popolazione ha un tasso istantaneo di crescita* $N'(t)$*, che cosa rappresenta il numero* $\int_6^{12} N'(t)\,dt$*?*

Rappresenta la crescita effettiva della popolazione tra il tempo 6 e il tempo 12.

Esercizio 12 *Disegnare i grafici delle seguenti funzioni negli intervalli proposti e calcolare l'integrale corrispondente tenendo presente l'interpretazione dell'integrale definito come area con segno.*

I grafici delle varie funzioni $f_1, \ldots, f_5$ sono riportati in Figura 9.1. Per $f_1(x) = 4$ con $x \in [-3, 3]$ l'area è quella di un rettangolo di base 6 e altezza 4, dunque $A_1 = 24$. Si ha che $\int_{-3}^3 4\,\mathrm{d}x = 6 \cdot 4 = 24$. Per $f_2(x) = 2 + 3x$ con $x \in [2, 4]$ l'area è data da quella del trapezio di base minore 8, maggiore 14 e di altezza 2, ovvero $A_2 = (8 + 14)2/2 = 22$. Si ha anche che $\int_2^4 2 + 3x\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 2 + 3/2 \cdot x^2|_2^4 = 4 + 24 - 6 = 22$. Per $f_3(x) = 3 - 2x$ con $x \in [-2, 1]$ l'area è data da un triangolo rettangolo di cateti 3 e 7, quindi $A_3 = 21/2$, l'integrale dà $\int_{-2}^1 3 - 3x\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 3 - 3/2x^2|_{-2}^1 = 21/2$. Per $f_4(x) = x - 1$ con $x \in [0, 4]$ l'area è data da quella negativa del triangolo di cateti 1 e -1 più quella positiva del triangolo di cateti 3 e 3. Dunque $A_4 = -1/2 + 9/2 = 4$, similmente $\int_0^4 x - 1\,\mathrm{d}x = 1/2x^2 - x|_0^4 = 8 - 4 = 4$. Per $f_5(x) = |x - 1|$ con $x \in [0, 4]$ l'area è data dalla somma delle due aree positive dei due triangoli considerati per f_4, dunque è $A_5 = 1/2 + 9/2 = 5$, con l'integrale bisogna spezzare in due casi:

$$\int_0^4 |x-1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -x + 1\,\mathrm{d}x + \int_1^4 x - 1\,\mathrm{d}x = -1/2 + 1 + 8 - 1/2 - 3 = 5.$$

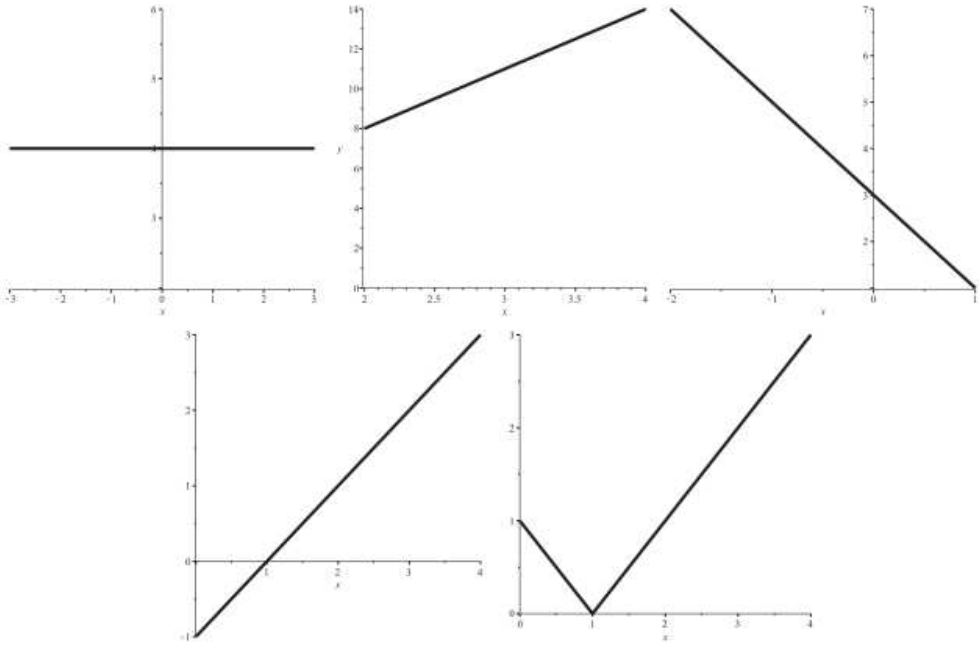


Figure 9.1: I grafici delle 5 funzioni.

Esercizio 13 *Calcolare le primitive delle seguenti funzioni.*

- $\int 2x + 6 \, \mathrm{d}x = x^2 + 6x + c.$
- $\int x^3 - \frac{2}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - 2\ln|x| + c.$
- $\int \cos x - \sin x \, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + c.$
- $\int e^x + \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = e^x - \frac{1}{x} + c.$

Esercizio 14 *Calcolare i seguenti integrali definiti.*

- $\int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x\big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0.$
- $\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x\big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$

- $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 0 - 0 = 0.$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0.$

Esercizio 15 *Trovare almeno un valore di $b > -\frac{\pi}{2}$ per cui risulta $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{b} \cos x \, dx = 0$.*

Svolgendo l'integrale si ha

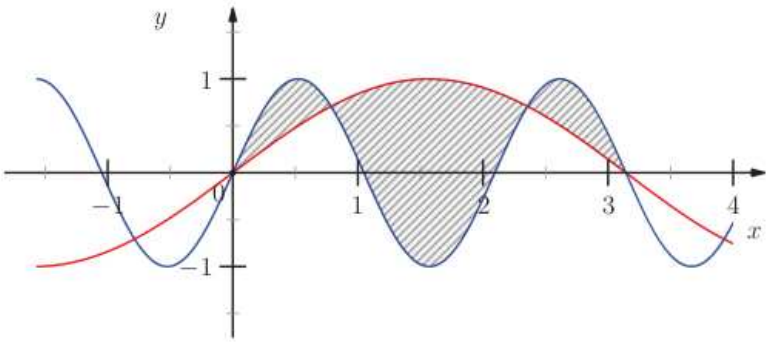
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{b} \cos x \, \mathrm{d}x = 1 + \sin b \implies b = \frac{3}{2}\pi.$$

Esercizio 16 *Calcolare per sostituzione i seguenti integrali definiti.*

- $\displaystyle\int_0^3 e^{2x-3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} e^y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y\Big|_{-3}^{3} = \frac{1}{2}(e^3 - e^{-3}).$
- $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{3x+1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^{13} \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\ln y\Big|_1^{13} = \frac{1}{3}\ln 13.$
- $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{y} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$
- $\displaystyle\int_{-3}^1 (x+1)^5 \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} y^5 \, \mathrm{d}y = \frac{1}{6}y^6\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{6}(2^6 - 2^{-6}).$
- $\displaystyle\int_0^1 \sin \pi x \;\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin y \;\, \mathrm{d}y = -\frac{1}{\pi}\cos y\,\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}.$

Esercizio 17 *Calcolare l'area del piano racchiusa tra le seguenti coppie di funzioni.*

L'area compresa tra le funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin 3x$ nell'intervallo $[0, \pi]$ è riportata in Figura 9.2. Bisogna calcolare le intersezioni delle due funzioni, che si hanno per $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3}{4}\pi$,



Ora basta calcolare l'integrale della differenza $f-g$ dove $f>g$ e la differenza $g-f$ dove $f<g$. Dunque si ha che l'area A è data da

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x - \sin x \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x - \sin 3x \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin 3x - \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{3}\cos 3x + \cos x \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} \approx 2.438.
\end{aligned}$$

La seconda area da calcolare è quella compresa tra $f(x)=x$ e $g(x)=x^3$ nell'intervallo $[0,1]$, è rappresentata in Figura 9.3. Questa volta l'area è data semplicemente dall'integrale della

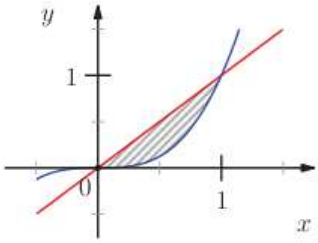


Figure 9.3: I grafici di $f(x)=x$ e $g(x)=x^3$ nell'intervallo $[0,1]$.

differenza $f-g$, ovvero

$$A = \int_0^1 x - x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Il terzo esercizio prevede il calcolo dell'area tra le due iperboli $y=\pm\frac{1}{x}$ nell'intervallo $[1,3]$. Traslando opportunamente il grafico e ragionando sulla simmetria dell'area richiesta (Figura 9.4) si ha che

$$A = \int_1^3 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x \Big|_1^3 = 2\ln 3 \approx 2.197.$$

L'ultimo caso prevede l'intersezione tra le due parabole di equazione $-x^2+9$ e x^2, nell'intervallo $[0,3/\sqrt{2}]$. Questo calcolo non presenta particolari difficoltà perché il punto $x=3/\sqrt{2}$ coincide con l'intersezione delle due curve. L'area è dunque quella di Figura 9.5 e vale

$$A = \int_0^{3/\sqrt{2}} -x^2+9-x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{3/\sqrt{2}} -2x^2+9\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}x^3+9x\Big|_0^{3/\sqrt{2}} = 9\sqrt{2} \approx 12.728.$$

Esercizio 18 *Calcolare l'area della regione limitata del piano racchiusa fra la parabola di equazione $y=-x^2+2x+2$ e la retta di equazione $x+y+2=0$.*

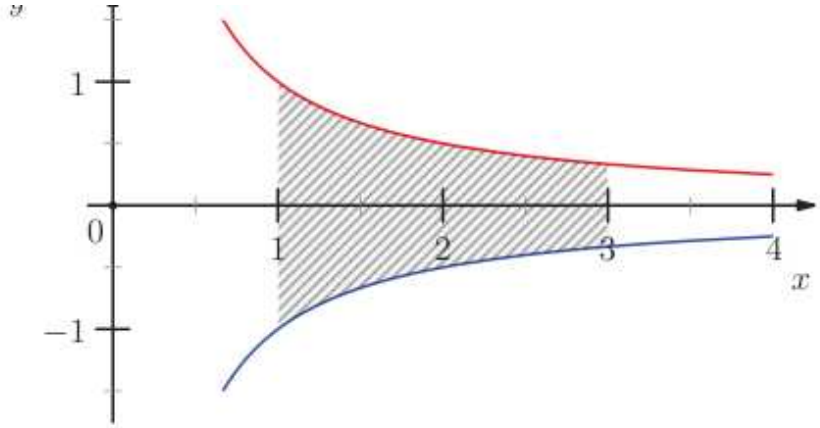


Figure 9.4: I grafici di $f(x) = 1/x$ e $g(x) = -1/x$ nell'intervallo $[1, 3]$.

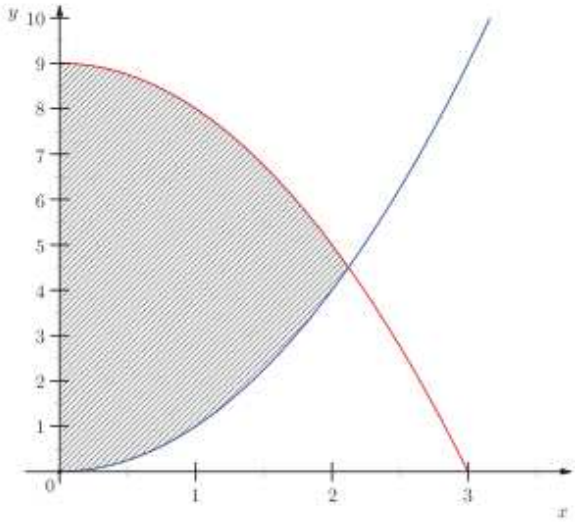


Figure 9.5: I grafici delle due parabole nell'intervallo richiesto.

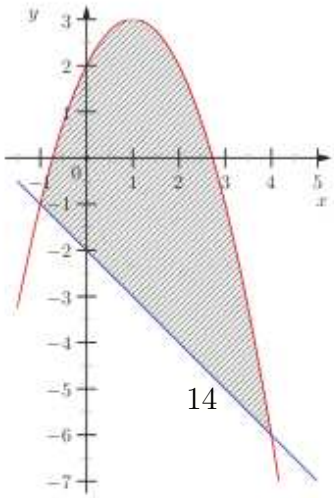


Figure 9.6: Grafico della parabola e della retta

I punti di intersezione si trovano uguagliando le due equazioni e sono per $x = -1, 4$. L'area è dunque

$$A = \int_{-1}^{4} -x^2 + 2x + 2 + x + 2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x\Big|_{-1}^{4} = \frac{125}{6}.$$

Esercizio 19 *Calcolare il seguente integrale con $\lambda > 0$:*

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt.$$

Questo integrale si calcola facilmente con il metodo di sostituzione,

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim_{M\to\infty} -e^{-\lambda t}\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty} -e^{-\lambda M} + e^{-\lambda\cdot 0} = 1.$$

Esercizio 20 *Calcolare* $\int_1^3 2|2x-3|\,dx$.

Bisogna distinguere i casi in cui $2x - 3 \geq 0$ e $2x - 3 < 0$, il punto discriminante è per $x = 3/2$, allora è sufficiente spezzare l'integrale nei due intervalli e considerare la funzione giusta per ciascun intervallo.

$$\int_1^3 2|2x-3|\,\mathrm{d}x = \int_1^{3/2} 2(-2x+3)\,\mathrm{d}x + \int_{3/2}^{3} 2(2x-3)\,\mathrm{d}x = -2x^2 + 6x\Big|_1^{3/2} + 2x^2 - 6x\Big|_{3/2}^{3},$$

valutando la funzione agli estremi degli intervalli si ha

$$-2((3/2)^2 - 1^2) + 6(3/2 - 1) + 2(9 - (3/2)^2) - 6(3 - 3/2) = 5.$$

Esercizio 21 *Una sostanza è distribuita sull'intervallo $[0, 10]$ della retta. La concentrazione della sostanza è data dalla funzione*

$$C(x) = (2x+3)^5.$$

Determinare il punto in cui la concentrazione è massima e la massa totale M della sostanza.

Per trovare il massimo di $C(x)$ si pone a zero la derivata,

$$C'(x) = 5 \cdot 2(2x+3)^4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \notin [0, 10].$$

Allora il massimo si troverà all'estremo destro dell'intervallo perché la $C(x)$ è crescente. La massa M è data da

$$M = \int_0^{10} C(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} (2x+3)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(2x+3)^6\Big|_0^{10} = \frac{148035889}{12} - \frac{243}{4} = \frac{37008790}{3}.$$

Esercizio 22 *Un corpo si muove su un tratto rettilineo con velocità $v(t) = 4t - 8$ nell'intervallo $[0, 5]$. Determinare la variazione di velocità, lo spazio percorso e la velocità media.*

La variazione di velocità è $\Delta v = v(5) - v(0) = 12 + 8 = 20$, lo spazio percorso è dato da $\Delta s = \int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^5 4t - 8\,\mathrm{d}t = 2t^2 - 8t + s_0\Big|_0^5 = 50 - 40 + s_0 - (0 + 0 + s_0) = 50 - 40 = 10$. La velocità media è data da $\Delta s/\Delta t = 10/5 = 2$.

Esercizio 23 *Calcola la media integrale delle seguenti funzioni.*

- $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$ su $[0, 8]$.

$$\frac{1}{8}\int_0^8 \frac{1}{4}x - 2\,\mathrm{d}x = -1.$$

- $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$ su $[-2, 2]$.

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^2 2x^3 + 3x - 1\,\mathrm{d}x = -1.$$

- $f(x) = ax^2 + 2x$ su $[0, a]$ con $a > 0$.

$$\frac{1}{a}\int_0^a ax^2 + 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3 + a.$$

Esercizio 24 *Con buona approssimazione, si può assumere che la densità dell'aria vari con la quota sul livello del mare con la legge $\rho(h) = 1.2e^{-0.12h}$, dove h è misurato in chilometri e $\rho(h)$ in chilogrammi al metro cubo. Supponendo che questa legge sia valida anche in alta quota (dove la densità è in realtà molto variabile), determinare la massa complessiva della colonna d'aria che ha un metro quadro di area di base. Inoltre determinare per quale valore di h la massa della colonna d'aria è il 99% del totale.*

La massa complessiva della colonna d'aria è data da

$$\begin{aligned}
\lim_{h^\star\to\infty}\int_0^{h^\star} 10^3\rho(h)\,\mathrm{d}h &= \lim_{h^\star\to\infty}\int_0^{h^\star} 10^3\cdot 1.2e^{-0.12h}\,\mathrm{d}h \\
&= \lim_{h^\star\to\infty} -\frac{10^3\cdot 1.2}{0.12}e^{-0.12h}\Big|_0^{h^\star} \\
&= \lim_{h^\star\to\infty} -\frac{10^3\cdot 1.2}{0.12}(e^{-0.12h^\star} - 1)
\end{aligned}$$

Risolvendo il limite si ha che la massa d'aria è di $\frac{10^3\cdot 1.2}{0.12} = 10^4$ chilogrammi. In effetti un'atmosfera si raggiunge in acqua alla profondità di 10 metri, e considerando la densità dell'acqua pari a un chilogrammo per litro, si ha che per la superficie di un metro quadrato, la massa d'acqua corrisponde a 10 tonnellate. Per trovare l'altezza corrispondente al 99% della massa d'aria è sufficiente risolvere

$$\frac{10^3\cdot 1.2}{0.12}\cdot\frac{99}{100} = -\frac{10^3\cdot 1.2}{0.12}(e^{-0.12h^\star} - 1)$$

da cui, con qualche semplificazione, si ha

$$\frac{99}{100} - 1 = -e^{-0.12h^\star} \implies \frac{1}{100} = e^{-0.12h^\star}$$

e prenendo il logaritmo,

$$\ln 1/100 = -0.12h^\star \implies h^\star = \frac{\ln 1 - \ln 100}{-0.12} = \frac{\ln 100}{0.12} \approx 38.376\,km.$$

Esercizio 25 *Sia $f(t)$ una funzione derivabile periodica, di periodo T, è vero che $f'(t)$ è anche periodica di periodo T? Che cosa si può dire di $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$?*

Per vedere se la derivata di una funzione periodica è periodica a sua volta dobbiamo mostrare che $f'(t+T) = f'(t)$. Facciamo la derivata della funzione composta $f(t+T)$ e otteniamo $f'(t+T) = f'(t) \cdot 1$, dunque la derivata è periodica. Facciamo lo stesso ragionamento per $F(t+T)$,

$$F(t+T) = \int_0^{t+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

e si vede che, a meno che il secondo addendo non sia nullo, la proprietà non è verificata.
Questi fatti si possono verificare in pratica, ad esempio scegliendo $f(t) = \sin x$ si ha che la derivata è periodica, mentre $F(t) = 1 - \cos t$ e $F(t+2\pi) = 1 - \cos t$; invece se prendiamo $f(t) = 1$ e la consideriamo periodica di periodo T, si ha che $F(t) = t$ ma $F(t+T) = t + T$.

Esercizio 26 *Calcolare i tre integrali proposti.*

- $\displaystyle\int_0^1 \sin \pi x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin y\,\mathrm{d}y = -\cos y\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$
- $\displaystyle\int_0^{10} xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{50} e^{-y}\,\mathrm{d}y = -e^{-y}\Big|_0^{50} = 1 - e^{-50}.$
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$