Lezione 8 (6/11/2014)

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. *La media di tre numeri reali può essere maggiore del massimo dei tre numeri?*

Siano a, b, c tre numeri reali, senza perdita di generalità possiamo assumere che sia a il massimo dei tre numeri, allora si ha che

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{a+a+a}{3} = a,$$

quindi al massimo la media potrà essere uguale al massimo dei tre numeri (nel caso in cui a=b=c).

Esercizio 2. *La mediana di quattro numeri reali può essere maggiore del massimo dei quattro numeri?*

Siano $x_1, \ldots, x_4$ quattro numeri reali ordinati in ordine crescente, sia $m = \frac{x_2+x_3}{2}$ la loro mediana, e sia $x_4 = \max_i x_i$. Allora

$$m = \frac{x_2+x_3}{2} \leq \frac{x_4+x_4}{2} = x_4,$$

quindi al massimo la mediana sarà uguale al maggiore dei quattro numeri.

Esercizio 3. *Può esistere un insieme di dati con media* 0*, moda* 1 *e mediana* -1*?*

Si può mostrare che non c'è un argomento che ostacola l'esistenza di un tale insieme, con qualche tentativo si può esibire un insieme come

$$A = \{-5, -4, -3, -2, 0, 1, 1, 12\}$$

che soddisfa le richieste.

Esercizio 4. *Trova un esempio di* 10 *dati numerici distinti con media uguale alla mediana. Trova un esempio di* 10 *dati numerici distinti con media maggiore della mediana.Trova un esempio di* 10 *dati numerici distinti con media minore della mediana.*

Tre insiemi che soddisfano le proprietà richieste sono

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ che ha media uguale alla mediana $(11/2)$.
- $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1000\}$ che ha media $209/2$ e mediana $11/2$.

- $C = \{-14, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ che ha media 4 e mediana $11/2$.

Esercizio 5. *In una stazione meteorologica viene rilevata ogni giorno la temperatura massima. La media delle temperature massime dei primi 6 giorni della settimana è stata di $20°$ C. Se il settimo giorno la temperatura massima è stata di $18°$ C, qual è la media delle temperature massime nell'intera settimana?*

Dalla media si ha che $\frac{x_1+\ldots+x_6}{6} = 20$ quindi per calcolare la media della settimana basta osservare che

$$\frac{x_1 + \ldots + x_7}{7} = \frac{20 \cdot 6 + x_7}{7} = \frac{138}{7} \approx 19.714.$$

Esercizio 6. *Un esperimento ti ha fornito 3 dati x_1, x_2, x_3, tutti compresi fra 12 e 13. La loro deviazione standard può essere uguale a 7? Fai un esempio.*

La deviazione standard si indica con σ ed è la radice quadrata della varianza σ^2, ovvero se m è la media di n campioni x_i per $i = 1, \ldots, n$,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n}}.$$

Considerando il quadrato di σ per evitare la radice, si ha che per il nostro esempio,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{n}\left((x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + (x_3 - m)^2\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(x_1^2 - 2mx_1 + m^2 + x_2^2 - 2mx_2 + m^2 + x_3^2 - 2mx_3 + m^2\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2m(x_1 + x_2 + x_3) + 3m^2\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2m \cdot 3m + 3m^2\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3m^2\right) \\
&\leq \frac{1}{3}(3 \cdot 13^2 - 3 \cdot 12^2) = 13^2 - 12^2 = 25 \implies \sigma = 5.
\end{aligned}$$

Dall'ultima maggiorazione si vede che non si poteva ottenere un valore maggiore, quindi non si potrà avere deviazione standard pari a 7.

Esercizio 7. *Trova 10 dati numerici distinti con media 10 e calcolane la deviazione standard. Trova altri 10 dati numerici distinti con media 10 ma con deviazione standard doppia rispetto ai dati della prima parte.*

Per la prima richiesta si ha che $A = \{4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ hanno media 10, varianza $\sigma_A^2 = 13.333$ e deviazione standard $\sigma_A = 3.651$. Per la seconda richiesta si ha che deve valere per l'insieme di campioni B che

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 10)^2 = 4\sigma_A^2$$

per cui si vede come basti moltiplicare gli elementi di A per due e sottrargli 10, ovvero $B = \{-2, 2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Gli elementi di B hanno ancora media 10, varianza 53.333 e deviazione standard 7.302.

Esercizio 8. *Usando i dati della tabella contenenti la distribuzione per età della popolazione italiana al 1 gennaio 2005, calcola l'età media di un maschio italiano, di una femmina italiana e di un cittadino italiano. (Suggerimento: supponi per semplicità che tutti gli individui di una fascia d'età abbiano un'età pari al valore centrale dell'intervallo. Per esempio, puoi supporre tutti gli individui fra 0 e 9 anni abbiano 5 anni).*

Età	*Maschi*	*Femmine*	*Totale*	*Età*	*Maschi*	*Femmine*	*Totale*
00 – 09	*2785099*	*2634666*	*5419765*	*50 – 59*	*3662489*	*3805269*	*7467758*
10 – 19	*2941791*	*2783415*	*5725206*	*60 – 69*	*3090806*	*3435301*	*6526107*
20 – 29	*3637073*	*3508575*	*7145648*	*70 – 79*	*2240346*	*2994965*	*5235311*
30 – 39	*4781311*	*4681824*	*9463135*	*80 – 89*	*832683*	*1574000*	*2406683*
40 – 49	*4279292*	*4301949*	*8581241*	*90 – 99*	*125914*	*365607*	*491521*

L'età media dei maschi è dato dalla sommatoria dell'età per il numero delle persone, diviso il totale dei maschi, lo stesso vale per le femmine: risulta rispettivamente 40.949 e 44.068. Mediando tra maschi e femmine, l'italiano medio ha 42.554 anni.

Esercizio 9. *Dire se i seguenti tre punti giacciono sulla stessa retta:* $\boldsymbol{A} = (1, 2)$, $\boldsymbol{B} = (-3, 1)$ *e* $\boldsymbol{C} = (4, -1)$.

Il coefficiente angolare della retta che passa per $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ è $m_{BC} = \frac{-1-1}{4+3} = -\frac{2}{7}$, mentre quello tra $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ è $m_{AB} = \frac{1-2}{-3-1} = \frac{1}{4}$. Poiché i due numeri sono diversi, i tre punti non appartengono alla stessa retta.

Esercizio 10. *Sia r la retta passante per i punti* $\boldsymbol{A} = (2, 1)$ *e* $\boldsymbol{B} = (-1, -1)$. *Determinare x tale che il punto* $\boldsymbol{C}$ *di coordinate $(x, 3)$ giaccia sulla retta r.*

Il coefficiente angolare della retta per $\boldsymbol{AB}$ è $m = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}$, il valore di q tale che la retta r sia $y = mx + q$ si trova sostituendo il valore, ad esempio, di $\boldsymbol{B}$ nella retta stessa. Risulta $q = -1 - \frac{2}{3}(-1) = -\frac{1}{3}$, dunque la retta r si scrive $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, a questo punto è sufficiente far passare la retta per $(x, 3)$, in particolare $\frac{10}{3} - \frac{2}{3}x = 0 \implies x = 5$.

Esercizio 11. *In una legge lineare, che descrive una crescita $c(t)$ in funzione del tempo t, il tasso di variazione è 0.15. Inoltre è noto che, se $t = 1$, $c(1) = 0.7$. Scrivere esplicitamente la legge e dire quanto vale $c(4)$ e a quale istante di tempo si ha $c(t) = 2$.*

Scrivendo $c(t) = mt + q$ si sa che $m = 0.15$, inoltre conoscendo $c(1)$ si ricava che $q = c(1) - 0.15 = 0.55$. A questo punto $c(4) = 0.15 \cdot 4 + 0.55 = 1.15$ mentre da $c(t) = 2$ si ricava che $t = 9.66$.

Esercizio 12. *Una quantità Q varia nel tempo t con legge lineare $Q = Q(t)$. Sapendo che $Q = 85.5$ quando $t = 13$ e che $Q = 79.3$ quando $t = 18$, calcolare il tasso di variazione della funzione. Se $t = 25$ quanto vale Q? Fino a quale istante di tempo risulta $Q > 50$?*

Scriviamo $Q(t) = mt + q$ e usando i due punti noti troviamo m, q, $m = \frac{79.3-85.5}{18-13} = -\frac{6.2}{5} \approx -1.24$, $q = 85.5 + 1.24 \cdot 13 = 101.62$. Ora $Q(25) = -1.24 \cdot 25 + 101.62 = 70.62$ e $Q(t) > 50$ se $-1.24t + 101.62 > 50 \implies t < 41.629$.

Esercizio 13. *In prima approssimazione la pressione atmosferica y diminuisce, all'aumentare della della quota x, secondo una legge di tipo*

$$y = Ae^{-kx}$$

Supponete di misurare la quota x in metri s.l.m. (sul livello del mare) e di misurare la pressione atmosferica in mm Hg. Sapendo che a quota $x_0 = 0$ si ha $y(x_0) = 760$ e che la pressione atmosferica risulta dimezzata ad una quota di circa 5500 m s.l.m., determinare il valore numerico delle due costanti A e k e a quanti metri di quota s.l.m. la pressione è $\frac{1}{3}$ della pressione a $x_0 = 0$. Consideriamo un punto a quota $x_1 = 250$ m s.l.m. e un punto a quota $x_2 = 500$ m s.l.m., calcolare la variazione di pressione tra x_1 e x_2. Calcolare infine il tasso medio di variazione della pressione tra x_1 e x_2.

Usando le prime due informazioni si ha che $760 = Ae^{-k \cdot 0}$ e $\frac{760}{2} = Ae^{-k \cdot 5500}$, quindi dalla prima equazione si ricava $A = 760$ e con questa informazione nella seconda si ha $\frac{1}{2} = e^{-k \cdot 5500}$ da cui $\ln \frac{1}{2} = -k \cdot 5500$, dunque $k = \frac{\ln 2}{5500}$. La pressione sarà un terzo di quella al livello del mare per x tale che $\frac{760}{3} = Ae^{-k \cdot x}$, ovvero risolvendola, per $x = \frac{\ln 3}{k} = \frac{5500 \cdot \ln 3}{\ln 2} \approx 8717.294$. La variazione di pressione tra i punti x_1 e x_2 è data da $Ae^{-kx_1} - Ae^{-kx_2} = 760(e^{-\frac{1}{22}\ln 2} - e^{-\frac{1}{11}\ln 2} \approx 22.840$. Il tasso medio di variazione si ottiene dividendo la variazione di pressione con la variazione di altitudine ovvero 0.091.

Esercizio 14. *La popolazione di batteri in una data coltura cresce secondo la legge*

$$N(t) = N_0 e^{kt}, \qquad k > 0,$$

Se all'inizio il numero di batteri è 2000 e dopo 3 anni è raddoppiato, calcolare il numero di batteri dopo un anno e dopo quanti anni il numero di batteri è 48.000.

Si ha che all'inizio $N(0) = N_0 = 2000$ e dopo tre anni $N(3) = N_0 e^{3k} = 4000$ dunque $k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0.231$. Il numero di batteri dopo un anno sarà $N(1) = 2000e^k \approx 2519.842$ mentre si avrà che $N(t) = 48000$ per $\frac{1}{3}\ln 2t = \ln 24 \implies t = \frac{3 \ln 24}{\ln 2} \approx 13.754$.

Esercizio 15. *Il radio decresce secondo la legge*

$$R(t) = R_0 e^{-kt}, \qquad k > 0.$$

Se il periodo di dimezzamento è di 1620 anni, quale percentuale del radio presente all'inizio sarà ancora presente dopo 100 anni?

Si ha che $R(0) = R_0$ e $\frac{R0 - R_0 e^{-k \cdot 1620}}{R_0} = \frac{1}{2}$ da cui $e^{-k \cdot 1620} = \frac{1}{2}$ e quindi $k = \frac{\ln 2}{1620} \approx 0.000427$. Dunque dopo cento anni si ha $R(100) = R_0 e^{-k \cdot 100} = R_0 \cdot 0.958$, ovvero è diminuito del 4.188%.

Esercizio 16. *Una colonia di muffe in laboratorio raddoppia in peso ogni 9 ore. Se il peso iniziale era 1g, quale sarà il peso in grammi dopo 1 giorno?*

Si ha che $M(t) = M_0 e^{kt}$ con $M(0) = M_0 = 1$ grammo, $M(9) = M_0 e^{9k} = 2$ da cui $k = \frac{\ln 2}{9}$. Allora $M(24) = e^{\ln 2 \cdot 24/9} = 2^{8/3}$.

Esercizio 17. *Gli isotopi radioattivi X_{97} decadono secondo una legge esponenziale con tempo di dimezzamento 20 anni. Dopo quanti anni la quantità di isotopi si sarà ridotta al 10% della quantità iniziale?*

La legge è $X(t) = X_0 e^{-kt}$ con $X(0) = X_0$. Si ha che $X(20) = X_0 e^{-20k} = \frac{1}{2} X_0$ da cui $k = \frac{\ln 2}{20}$. Allora $\frac{X_0 - X_0 e^{-kt}}{X_0} = \frac{90}{100} \implies \frac{1}{10} = e^{-kt} \implies t = -\frac{20 \ln 1/10}{\ln 2} \approx 66.438$.

Esercizio 18. *Sappiamo che il Carbonio 14 ha un tempo di dimezzamento pari a circa 5730 anni, mentre gli altri isotopi del carbonio sono stabili. Sappiamo inoltre che la percentuale di Carbonio 14 sul carbonio totale in atmosfera e negli organismi viventi è circa 10^{-12}. Supponiamo di trovare un fossile in cui la percentuale di Carbonio 14 sul carbonio totale è circa $1.2 \cdot 10^{-13}$. Qual è l'età del fossile? [Questo è il metodo di datazione del Carbonio 14; l'ipotesi è che, dopo la morte, un organismo non scambia carbonio con l'atmosfera, per cui quello 14 decade, mentre il resto rimane stabile.]*

Sappiamo che $C(0) = 10^{-12}$ mentre la legge di decadimento è $C(t) = C_0 e^{-kt}$, inoltre poiché il periodo di dimezzamento è 5730 anni, si ha anche che $C(5730) = 10^{-12} e^{-5730k} = \frac{1}{2} 10^{-12}$ da cui $k = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1.209 \cdot 10^{-4}$, allora $C(t) = 10^{-12} e^{-kt} = 1.2 \cdot 10^{-13} \implies t \approx 17527.46$ anni.

Esercizio 19. *Calcolate le retta di regressione per ciascuno dei seguenti set di dati.*

- $\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,5)\}$;
- $\{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$;
- $\{(0,10),(1,8),(5,2),(7,5)\}$.

Chiamata $\mathbb{E}(X)$ la media del campionamento X e indicata con $V(X)$ la sua varianza, i coefficienti della retta di regressione sono dati da

$$m = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{V(X)}, \qquad q = \mathbb{E}(Y) - m\mathbb{E}(X).$$

Nel primo caso si ha che $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{11}{4}$, $\mathbb{E}(XY) = \frac{23}{4}$ e $V(X) = \frac{5}{4}$, quindi $m = \frac{13}{10}$ e $q = \frac{4}{5}$. Il grafico di punti e retta è riportato in Figura 11.1 a sinistra.
Nel secondo caso si ha che $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{7}{2}$, $\mathbb{E}(XY) = 9$ e $V(X) = \frac{5}{4}$, quindi $m = 3$ e $q = -1$. Il grafico di punti e retta è riportato in Figura 11.1 al centro.
Nel terzo caso si ha che $\mathbb{E}(X) = \frac{13}{4}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{25}{4}$, $\mathbb{E}(XY) = \frac{53}{4}$ e $V(X) = \frac{131}{6}$, quindi $m = -\frac{113}{131}$ e $q = \frac{1186}{131}$. Il grafico di punti e retta è riportato in Figura 11.1 a destra.

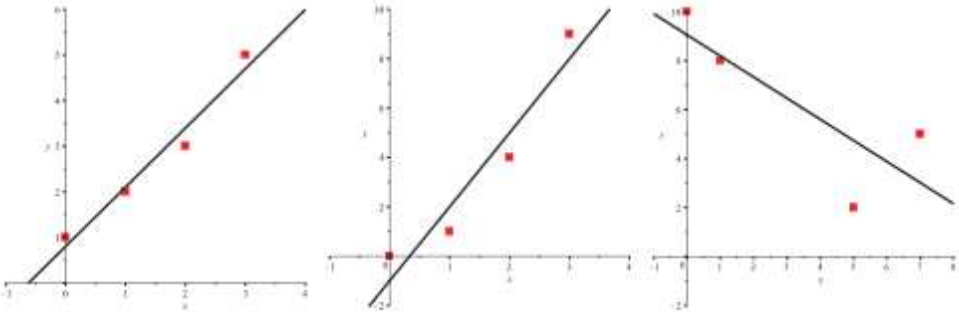

Figure 11.1: I grafici dei tre set di dati e delle rette di regressione.

Esercizio 20. *Nella seguente tabella sono riportati i dati della popolazione americana nel periodo* $1790 - 1860$ *(il numero di individui è riportato in scala logaritmica).*

anno	*1790*	*1800*	*1810*	*1820*	*1830*	*1840*	*1850*	*1860*
popolazione	*1,37*	*1,67*	*1,98*	*2,27*	*2,55*	*2,84*	*3,14*	*3,45*

Calcolate la retta di regressione ed esprimete la crescita della popolazione in forma esponenziale.

Nei due grafici seguenti sono riportati i campioni e la retta di regressione in forma lineare (a sinistra) ed esponenziale (a destra).

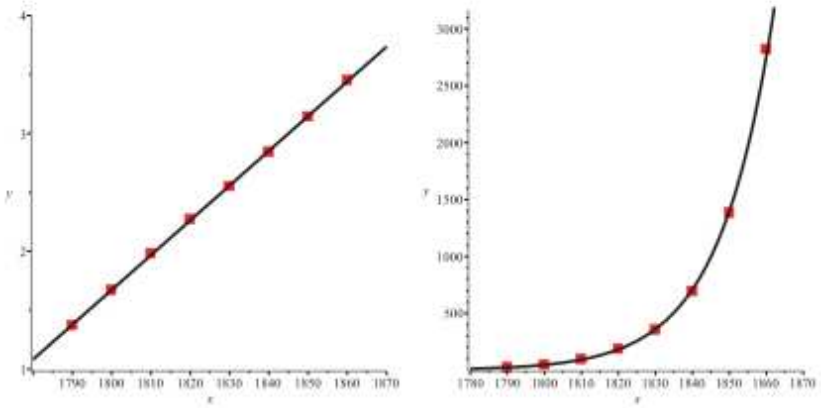

Figure 11.2: I grafici del set di dati e della retta di regressione.