Lezione 9 (12/11/2014)

Esercizi svolti a lezione

Esercizio 1. *Risolvere il problema ai valori iniziali*

$$y'(x) = 2xy(x) + xe^{x^2}\cos x, \qquad y(0) = 0.$$

Prima di procedere a risolvere l'esercizio ricordiamo brevemente come si risolve un'equazione differenziale lineare del primo ordine del tipo $y' = a(x)y + b(x)$:

$$y(x) = c \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} + e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} \cdot \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma} a(t)\,\mathrm{d}t} b(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

dove in genere si pone $x_0 = 0 = \sigma_0$ e c è una costante che si può determinare dalle condizioni iniziali.
Dunque abbiamo che $\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2$, mentre per $\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma} a(t)\,\mathrm{d}t} b(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ si ha

$$\int_0^x e^{-\sigma^2}\sigma e^{\sigma^2}\cos\sigma\mathrm{d}\sigma = \int_0^x \sigma\cos\sigma\mathrm{d}\sigma = \sigma\sin\sigma\Big|_0^x - \int_0^x \sin\sigma\,\mathrm{d}\sigma = x\sin x + \cos x - 1.$$

A questo punto $y(x) = ce^{x^2} + e^{x^2}(x\sin x + \cos x - 1)$: per calcolare c è sufficiente sostituire $x = 0$ nell'equazione appena trovata e porre il risultato uguale a zero.

$$0 = y(0) = c \implies y(x) = e^{x^2}(x\sin x + \cos x - 1)$$

Controlliamo che questa funzione soddisfa l'equazione differenziale di partenza, se facciamo la derivata abbiamo che

$$y'(x) = 2xe^{x^2}(x\sin x + \cos x - 1) + e^{x^2}(\sin x + x\cos x - \sin x) = 2xy(x) + xe^{x^2}\cos x.$$

Esercizio 2. *Risolvere il problema ai valori iniziali*

$$y'(x) = 2xy(x) + xe^{x^2+x}, \qquad y(0) = 0.$$

Si ha che $\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2$, mentre per $\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma} a(t)\,\mathrm{d}t} b(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ si ha

$$\int_0^x e^{-\sigma^2}\sigma e^{\sigma^2+\sigma}\mathrm{d}\sigma = \int_0^x \sigma e^{\sigma}\mathrm{d}\sigma = \sigma e^{\sigma}\Big|_0^x - \int_0^x e^{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma = xe^x - e^x + 1.$$

A questo punto $y(x) = ce^{x^2} + e^{x^2}(1 + (x-1)e^x)$: per calcolare c è sufficiente sostituire $x = 0$ nell'equazione appena trovata e porre il risultato uguale a zero.

$$0 = y(0) = c \implies y(x) = e^{x^2}(1 + (x-1)e^x)$$

Esercizio 3. *Risolvere il problema ai valori iniziali*

$$y'(x) = \cos x \cdot y(x) + \sin x \cos x, \qquad y(0) = 1.$$

Si ha che $\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x$, mentre per $\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma} a(t)\,\mathrm{d}t} b(\sigma)\mathrm{d}\sigma$ si ha

$$\int_0^x e^{-\sin\sigma} \sin\sigma \cos\sigma\,\mathrm{d}\sigma,$$

operando il cambio di variabile $z = -\sin\sigma$ con differenziale $\mathrm{d}z = -\cos\sigma\,\mathrm{d}\sigma$, l'integrale precedente si semplifica in

$$\int_0^{-\sin x} ze^z\,\mathrm{d}z = ze^z\Big|_0^{-\sin x} - \int_0^{-\sin x} e^z\,\mathrm{d}z = -\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x} + 1$$

A questo punto $y(x) = ce^{\sin x} + e^{\sin x}(1 - \sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x})$: per calcolare c è sufficiente sostituire $x = 0$ nell'equazione appena trovata e porre il risultato uguale a 1.

$$1 = y(0) = c + (1 - 0 - 1) \implies y(x) = 2e^{\sin x} - \sin x - 1$$

Esercizio 14.4. *Una proteina può essere in due configurazioni, dette a ("aperta") e c ("chiu sa"). Assumiamo che in una membrana ci sia un numero così grande di queste proteine da poterne approssimare la frazione nello stato a al tempo t con una variabile continua $A(t)$ (naturalmente la frazione nello stato c sarà $1 - A(t)$). Le proteine potranno passare dallo stato a a quello c e viceversa secondo la legge descritta dall'equazione differenziale*

$$A'(t) = -\gamma A(t) + \lambda(1 - A(t)).$$

Che cosa rappresentano γ e λ? Supponiamo $\gamma = 1$ e $\lambda = 2$, misurando il tempo in secondi. Mostrate che la quantità $u(t) = 2 - 3A(t)$ soddisfa l'equazione $u'(t) = -3u(t)$. Sia $A(0) = \frac{1}{2}$. Trovate la soluzione $u(t)$ dell'equazione precedente, e da quella ottenete $A(t)$. Calcolate $\int_0^{10} A(t)\,dt$ che esprime il flusso lasciato passare attraverso la membrana in 10 secondi.

I coefficienti γ e λ rappresentano la velocità di transizione da uno stato all'altro, γ è il tasso di passaggio dallo stato a a quello c, cioè la frazione di proteina allo stato a che passa a quello c, λ il viceversa.
Si verifica facilmente che l'equazione $u(t) = 2 - 3A(t)$ soddisfa $u'(t) = -3u(t)$, infatti facendo la derivata di $A(t)$ si ha $A'(t) = -\gamma A(t) + \lambda(1 - A(t))$, da cui

$$u'(t) = 3\gamma A(t) - 3\lambda(1 - A(t)) = -6 + 9A(t) = -3A'(t).$$

Risolvendo l'equazione differenziale per $u(t)$ si trova che da $A(0) = \frac{1}{2}$

$$u(0) = 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

L'equazione $u'(t) = -3u(t)$ ha per soluzione $u(t) = ce^{-3t} + e^{-3t}\int_0^t 0\,\mathrm{d}\sigma = ce^{-3t}$, usando il valore iniziale appena trovato si ha che $\frac{1}{2} = u(0) = c$ quindi $u(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}$. Dal fatto che

$u(t) = 2 - 3A(t)$ si risolve che $A(t) = \frac{2-u(t)}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t}$. Verifichiamo brevemente che soddisfa $A'(t) = -\gamma A(t) + \lambda(1 - A(t)) = A(t)(-\gamma - \lambda) + \lambda$,

$$A'(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} \implies \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right) \cdot (-1-2) + 2 = -2 + \frac{1}{2}e^{-3t} + 2 = \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Il calcolo del flusso è ora semplicemente

$$\int_0^{10} A(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{10 \cdot 2}{3} + \frac{1}{18}e^{-3t}\Big|_0^{10} = \frac{20}{3} + \frac{1}{18}(e^{-30} - 1).$$

Esercizio 5. *Risolvere le seguenti equazioni differenziali,*

1. $y' = 4xy, \implies y = ce^{2x^2}$.
2. $y' = \frac{2}{x}y, \implies y = ce^{2\ln x} = cx^2$.
3. $y' = (2x+1)y, \implies y = ce^{x^2+x}$.
4. $y' = e^x y, \implies y = ce^{e^x - 1}$.
5. $y' = 2xy + 1, \implies y = ce^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma$.
6. $y' = \frac{1}{x}y + x, \implies y = cx + x^2 - x$.

Esercizio 6. *Una popolazione cresce secondo un modello malthusiano*

$$N'(t) = \varepsilon(t)N(t), \qquad N(0) = N_0$$

dove il tasso di crescita dipende dal tempo secondo la legge $\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \alpha \sin 2\pi t$. *Trovare la soluzione del modello, trovare* $\lim_{t\to\infty} N(t)$ *per* $\alpha = \pm 1$, *ripetere il calcolo per* $\varepsilon(t) = -\frac{1}{2} + \alpha \sin 2\pi t$.

Procedendo come già visto, l'equazione differenziale si risolve usando l'integrale

$$\int_0^t \frac{1}{2} + \alpha \sin 2\pi s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}t + \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi t} \sin z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}t + \frac{\alpha}{2\pi}(1 - \cos 2\pi t)$$

da cui

$$N(t) = N_0 e^{\frac{1}{2}t + \frac{\alpha}{2\pi}(1 - \cos 2\pi t)}.$$

Ora, il limite per $t \to \infty$ di $N(t)$ è $+\infty$ per $\alpha = \pm 1$, se invece si cambia il segno al primo addendo di $\varepsilon(t)$ il limite fa zero per $\alpha = \pm 1$.