Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 1. 15 Settembre 2014

1 ora *(Richiami, insiemi)*

Per cominciare

Le conoscenze di base cui riferirsi per iniziare il nostro percorso riguardano anzitutto (ovviamente) le abilità e le nozioni che permettono il *calcolo algebrico* e la risoluzione di semplici *equazioni* e *disequazioni*. Anche alcuni concetti e strumenti della *geometria analitica* nel piano sono importanti per potere operare e il linguaggio della *teoria degli insiemi* aiuta a sviluppare i nostri discorsi in modo sufficientemente formale.

In fondo gli strumenti indicati sopra sono parte del bagaglio di conoscenze di ogni studente che abbia frequentato la scuola superiore ed infatti i test di ammissione, pur quando non richiedono conoscenze specifiche particolari, ne presuppongono una certa frequentazione. Inoltre quasi tutti hanno esperienza dei concetti e dei metodi dell'analisi infinitesimale e delle ricette classiche per studiare il grafico di una funzione, anche se dobbiamo registrare una certa disparità di esperienze, dovuta alla diversità delle scuole frequentate.

Un buon punto di partenza per il nostro corso sarà quindi la rivisitazione rapida delle conoscenze che avete acquisito già nella scuola superiore per cercare di consolidarle prima di svilupparle ulteriormente. Gli strumenti e i concetti che riprenderemo o introdurremo ex novo sembreranno appartenere ad un mondo a sé stante (la Matematica è da questo punto di vista una disciplina in sé) ma cercheremo di far vedere che affiancano e permeano lo studio di ogni altra disciplina, come la Biologia che a voi interessa (da un altro punto di vista, la Matematica è il linguaggio della scienza e la porta di accesso ad ogni altra disciplina). L'ambizione di questo corso è di dire qualcosa di significativo anche per coloro che con la Matematica non vorrebbero avere nulla a che fare.

Gli insiemi

La teoria degli insiemi è un capitolo fondamentale della Logica Matematica ed *è una teoria molto bella e affascinante, con un'aura di magia che non ha in comune con nessun altra, per il suo far fiorire tutta la matematica dal nulla ...* (da: G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri.*, editrice Boringhieri). A suo tempo la teoria degli Insiemi *è stata un fuoco, un incendio divampato a lungo tra polemiche e tragedie ...* (da: G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri.*, editrice Boringhieri) ed ha innescato il processo che ha portato alla nascita della Logica Matematica che *nasce dall'incontro definitivo di due filoni fondamentali del pensiero: la Logica dei filosofi e il Calcolo Infinitesimale. Al termine di questo incontro la matematica non è più la stessa.* (da: J. N. Crossley, *What is Mathematical Logic?* , editrice Dover).

Comunque, per i nostri scopi adotteremo il punto di vista secondo cui il concetto di insieme è un *concetto primitivo* e non c'è bisogno di definirlo. D'altra parte, al di fuori della Logica matematica sarebbe illusorio *definire* un insieme, così come introdurre il concetto di numero che anche adottiamo come *primitivo*.

Dunque, ci considereremo d'accordo sul significato di oggetti come i *numeri naturali*, i *numeri razionali* e i *numeri reali*, i cui insiemi indicheremo rispettivamente con $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Saremo anche d'accordo nel rappresentare un insieme nel modo seguente

$$A \equiv \{x \in U \mid \mathcal{P}(x)\}$$

dove con U intendiamo un insieme *universo* e con $\mathcal{P}(x)$ intendiamo una proposizione (significativa per gli elementi di U) che, se vera, permette di decidere per l'appartenenza di x all'insieme.

Esempi sono

$$A \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0)\}$$

$$B \equiv \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1,\ x = -1\}$$

$$C \equiv \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\right\} = \emptyset$$

In particolare, l'insieme C è l'*insieme vuoto* che indichiamo con $\emptyset$. Notiamo che due diverse proposizioni $\mathcal{P}_1(x)$ e $\mathcal{P}_2(x)$ possono determinare lo stesso insieme, come si vede nel caso dell'insieme B.

Siamo anche d'accordo sul significato delle operazioni tra insiemi che si rappresentano simbolicamente come

$$A \cup B \ \ \textit{unione}, \quad A \cap B \ \ \textit{intersezione}, \quad A - B \ \ \textit{differenza}, \quad \tilde{A} = U - A \ \ \textit{complementare}.$$

Inoltre dati due insiemi A e B appartenenti rispettivamente agli universi U e V possiamo considerarne il *prodotto cartesiano* $A \times B$ definito come l'insieme delle *coppie ordinate* di elementi di A e B

$$A \times B \equiv \{(x, y) \mid x \in A \ , \ y \in B\}$$

che, a sua volta, è un sottoinsieme dell'universo $U \times V$ costituito da tutte le coppie possibili.

Il paradosso di Russel (si fa presto a dire 'insieme')

Dividiamo gli tutti gli insiemi in due gruppi: da una parte gli insiemi **normali**, definiti come quelli che non contengono se stessi come elemento, dall'altra gli insiemi **non normali** che invece contengono se stessi come elemento. In questo modo esauriamo tutti gli insiemi possibili dividendoli nelle due categorie.

A questo punto esaminiamo il particolare insieme definito come **l'insieme di tutti e soli gli insiemi normali** per capire se è esso stesso **normale** o meno.

Ovviamente questo insieme non è **normale** perché se lo fosse non dovrebbe contenere se stesso come elemento e invece per la sua definizione contiene tutti gli insiemi normali (e quindi anche se stesso). Ma altrettanto ovviamente non è **non normale** perché se lo fosse conterrebbe se stesso come elemento e quindi, in quanto tale, sarebbe **normale** perché, per come l'abbiamo definito, l'insieme stesso contiene solo insiemi normali.

ESERCIZI

ESERCIZIO 1.1 Il 15% degli individui di una popolazione è stato colpito da un'epidemia. L'8% delle persone colpite è morto. Calcolare la mortalità rispetto all'intera popolazione.

ESERCIZIO 1.2 La popolazione mondiale alla fine del 1974 era costituita da circa 3.8×10^9 individui. Ogni settimana la popolazione mondiale è aumentata di 1.4 milioni di persone. Calcolare l'aumento percentuale annuale alla fine del 1975.

ESERCIZIO 1.3 La Terra è, approssimativamente, una sfera di circonferenza $40,000$ Km. Supponiamo di avvolgere una corda attorno all'equatore. Ora, supponiamo di allungare tale corda (lunga $40,000$ Km) di 10 m e di riavvolgerla attorno alla Terra in modo che la distanza fra la corda e il terreno sia uguale lungo tutta l'equatore. Un topo sarà adesso in grado di passare sotto la corda?

ESERCIZIO 1.4 Il diametro di una molecola di H_2O è circa 2.5×10^{-10} m. In 1 mole = 18 grammi di acqua ci sono 6.02×10^{23} molecole (numero di Avogadro). Quale distanza si raggiungerebbe se si mettessero in fila tutte le molecole di una mole di H_2O? [Osservazione: la distanza fra la Terra e il Sole è circa 1.5×10^8 km.]

ESERCIZIO 1.5 Semplificare:

(a) $6!/4!$

(b) $97!/98!$

ESERCIZIO 1.6 Calcolare:

(a) $5!$

(b) $2 + 1/2! + 1/3! + 1/4!$

ESERCIZIO 1.7 Risolvere le seguenti equazioni rispetto a x:

(a) $x^2 = 2x$

(b) $x^3 = 3x^2$

(c) $a^2x = x^3$, con $a > 0$

ESERCIZIO 1.8 Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $x + 4 > 7$

(b) $8 - y > 1$

(c) $4(\gamma - 5) > 3(5 - \gamma)$

(d) $1 - x^2 \leq (2 - x)(x + 1)$

(e) $2x^2 < 8$

(f) $3 < u^2$

(g) $x(x - 1) > 0$

(h) $(x - 1)(x + 2) > 0$

(i) $x^2 + 4x - 21 > 0$

(j) $2x^2 + x < 3$

(k) $4x^2 + 10x - 6 < 0$

(l) $x^2 + 2x + 4 > 0$

(m) $3x^2 - x - 4 \geq 0$

(n) $2x + 8 > x^2$

(o) $23x^6 + 5x^2 + 18 < 0$

(p) $x^2 - 6x + 9 > 0$

(q) $2x^2 - 3x + 2 > 0$

ESERCIZIO 1.9 Individuare nel piano gli insiemi di punti (x, y) per i quali:

(a) $x < 2$

(b) $x = -1$

(c) $x + 2y < 0$

ESERCIZIO 1.10 Sia A il punto di coordinate $(3, -1)$ e sia B il punto di coordinate $(-1, y)$. Trovare i valori di y per cui la distanza fra A e B sia $\sqrt{20}$.

ESERCIZIO 1.11 Dato il punto A di coordinate $(1, 2)$, determinare le coordinate di un punto B t.c. la distanza fra A e B sia 4.

ESERCIZIO 1.12 Mostrare che:

(a) $\sum_{j=1}^{n} (x_j + \alpha) = \sum_{j=1}^{n} x_j + n\alpha$

(b) $\sum_{j=1}^{n} (x_j + \alpha)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2\alpha \sum_{j=1}^{n} x_j + n\alpha^2$

ESERCIZIO 1.13 Qual è la relazione fra gli insiemi $A := \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 3\}$ e $B := \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$?

ESERCIZIO 1.14 Trovare gli insiemi delle soluzioni di:

(a) $\{t \in \mathbb{R} : t + 7 < 12\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : x = 3(x + 3) - x\}$

(c) $\left\{u \in \mathbb{R} : u^2 < 16\right\}$

(d) $\left\{x \in \mathbb{R} : (x - 3)(x + 2) = x^2\right\}$

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0\right\}$

ESERCIZIO 1.15 Determinare graficamente l'intersezione e l'unione degli insiemi $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 5 > 0\right\}$ e $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y + 2 > 0\right\}$. Determinare inoltre il complementare di $A \cap B$ in $\mathbb{R}^2$.

ESERCIZIO 1.16 Risolvere le seguenti equazioni:

(a) $|x - 5| = 7$

(b) $|3x + 2| = 1$

(c) $|x + 2| - 2|x - 3| = 1$

ESERCIZIO 1.17 Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $|x - 2| > 1$

(b) $|6x + 1| < -1$

(c) $|x + 2| + 2|x - 3| > -2$

(d) $|x + 2| > |x - 1|$

(e) $x^2 - |2x - 1| > 0$

(f) $2x^2 - |4x + 3| > 0$

ESERCIZIO 1.18 Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni

(a) $\begin{cases} x > -2 \\ -x > -1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x \geq 4 \\ 4x \leq 7 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (x + 1)(x - 3) > 0 \\ (x + 4)(x - 6) \leq 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x^2 \leq 6x \\ 4x > 1 \end{cases}$

ESERCIZIO 1.19 Rappresentare graficamente gli insiemi:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - |2x + 1| > 0\}$

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y + |x - 1| \leq 0\}$

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 10\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 8\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2\}$

(e) $E = C \cap D$

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html