Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 11. 20 Ottobre 2014

1 ora *(Integrazione, primitive di una funzione.)*

Lezione 12. 22 Ottobre 2014

2 ore *(Calcolo delle primitive, il problema dell'area.)*

Lezione 13. 23 Ottobre 2014

2 ore *(Integrale definito e indefinito, Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.)*

L'integrazione

Il termine *integrazione* è un termine generico che si riferisce al processo che porta alla determinazione di una funzione a partire dalla conoscenza della sua derivata o, più in generale, di una relazione che coinvolge le sue derivate (*equazione differenziale*).
Consideriamo qualche esempio.

- Supponiamo di conoscere la velocità $v(t)$, in funzione del tempo t, di un oggetto che si sposta su una retta, e di volerne conoscere lo spostamento $s(t)$ al tempo t. Sappiamo naturalmente che $s'(t) = v(t)$ in ogni t. Dobbiamo risalire ad $s(t)$ a partire da $v(t)$.

- Consideriamo la crescita di una popolazione (ad esempio di batteri) in un ambiente che permette di vivere e svilupparsi in condizioni stazionarie. Detto $N(t)$ il numero di individui al tempo t, la seguente equazione descrive il bilancio tra nuovi nati e morti che avvengono nell'unità di tempo
$$N'(t) = \beta N(t) - \mu N(t), \tag{1}$$
dove β il numero di nuovi nati pro-capita nell'unità di tempo e μ è la mortalità, ossia la frazione di individui che muore nell'unità di tempo. Abbiamo così un'*equazione differenziale* sulla funzione incognita $N(t)$.

- Una modifica del modello precedente che tiene conto dell'effetto (negativo) che la presenza della popolazione esercita sull'habitat, e quindi sulle condizioni di vita, porta all'equazione (equazione *logistica*)
$$N'(t) = \epsilon \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t) \ . \tag{2}$$

A partire dalla risoluzione del più semplice dei problemi di questo tipo, cioè dalla ricerca di una funzione conoscendo la sua derivata, si apre tutto un settore dell'analisi, di grande importanza sia teorica che applicativa.

Primitive di una funzione

Come si è già detto, il più semplice dei problemi introdotti è costituito dalla ricerca di una funzione conoscendo la sua derivata. Ciòporta a introdurre il concetto di *primitiva* di una funzione:

> *Data la funzione $f(x)$ definita su un intervallo I, si dice che F è una primitiva di f se*
>
> $$F'(x) = f(x)$$
>
> *per ogni $x \in I$.*

Dunque ad esempio

- ogni funzione costante è una primitiva della funzione $f(x) \equiv 0$;

- la funzione $F(x) = x^2$ è una primitiva della funzione $f(x) = 2x$;
- ma anche la funzione $F(x) = x^2 + 1$ e la funzione $F(x) = x^2 + 5$ lo sono.

D'altra parte, ricordando che:

> *una funzione ha derivata nulla in un intervallo I, se e solo se è costante in I,*

abbiamo che

> *se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive della stessa funzione $f(x)$ nell'intervallo I, allora differiscono di una costante.*

Infatti, visto che $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$, per la funzione $W(x) = F(x) - Gx)$ si ha

$$W'(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ in } I$$

e dunque $W(x)$ è costante in I.
Ci poniamo dunque il problema:

> *Assegnata la funzione $f(x) : I \to \mathbb{R}$, trovare almeno una funzione $F(x) : I \to \mathbb{R}$ tale che*
>
> $$F'(x) = f(x) \quad per \quad x \in I$$

ogni altra primitiva si otterrà *aggiungendo una costante arbitraria* a quella trovata.

La famiglia ad un parametro delle primitive di una funzione $f(x)$ si dice *integrale indefinito di $f(x)$* e si indica con

$$\int f(x)dx.$$

La ricerca delle primitive

Il primo passo nella risoluzione del problema, impostato nella lezione precedente, consiste nel *cercare di esprimere una primitiva della funzione data in termini delle funzioni elementari che abbiamo a disposizione.* Per questo possiamo appoggiarci alla *tabella delle derivate* con la quale possiamo costruire una *tabella degli integrali indefiniti* . Abbiamo dunque

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} = \ln|x| + c$
- $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + c$

dove con c si indica una costante arbitraria.
La tabella sopra riportata, potrebbe essere ampliata sulla base di una *tabella delle derivate* più o meno estesa, a seconda della esperienza personale ... comunque, alcune formule di derivazione forniscono strumenti sistematici che in molti casi permettono l'individuazione dell'integrale indefinito.

Metodi di integrazione

Possiamo anzitutto usare la *formula della somma* derivante dall'analoga formula per le derivate

- $$\int (af(x) + bg(x))\, dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

con cui possiamo combinare tutte le primitive in tabella, e possiamo quindi calcolare le primitive di qualunque polinomio, oltre che di alcune combinazioni lineari di funzioni particolari come e^x....
Abbiamo i seguenti esempi

* $\displaystyle\int (\sin x + 3\cos x)\, dx = -\cos x + 3\sin x + c$

* $\displaystyle\int \left(x^2 + 2\sin x\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - 2\cos x + c$

* $\displaystyle\int (5e^x + 2x)\, dx = 5e^x + x^2 + c$

Poi possiamo usare la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) g'(x)$$

per ottenere la seguente regola di *integrazione per sostituzione*

- $$\int f'\left(g(x)\right) g'(x) dx = f\left(g(x)\right) + c$$

Abbiamo i seguenti esempi

* $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{3}\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$ (abbiamo usato la sostituzione $t = g(x) = 2x+1$)

* $\displaystyle\int \cos\left(x^2+x+1\right)(2x+1)\, dx = \sin\left(x^2+x+1\right) + c$ (sostituzione $t = g(x) = x^2+x+1$)

Questa regola si può ricordare in questo modo. Se $t = g(x)$, allora $\dfrac{dt}{dx} = g'(x)$, dove $\dfrac{dt}{dx}$ è uno dei possibili simboli per la derivata. Se ora trattiamo dt e dx come se avessero un significato da soli e moltiplichiamo per dx troviamo $dt = g'(x)dx$. Si trova la regola corretta di integrazione per sostituzione se, quando poniamo $t = g(x)$ ci ricordiamo di dovere anche sostituire dt con $g'(x)dx$. Un vantaggio del simbolo dx che è presente nella notazione di integrale ma è apparentemente privo di significato è che ci permette di effettuare correttamente l'integrazione per sostituzione.
La notazione di integrale è stata introdotta da Leibniz per il quale i simboli dx e dt erano detti differenziali, ed avevano un significato concreto. Nella teoria moderna il simbolo dx ed il nome differenziale si sono conservati, anche per i vantaggi che procurano in questo ed altri calcoli, ma (a questo livello di trattazione) sono solo dei simboli.

Infine, un'altra regola per il calcolo delle primitive si trova invertendo la regola di derivazione del prodotto che fornisce la *regola di integrazione per parti* . Infatti, da

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

si ottiene

- $$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx.$$

Questa regola è sempre vera, ma è utile solo se l'integrale a destra e più facile dell'integrale a sinistra. Abbiamo gli esempi

* $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -(x+1)e^{-x} + c,$

* $\displaystyle\int e^x x^2 dx = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c.$

Nel secondo caso, come puòspesso succedere, occorre integrare per parti più volte.

Notiamo che, in generale, per applicare l'integrazione per parti, dobbiamo decidere in modo opportuno chi è $f'(x)$ e chi è $g(x)$. Infatti, nel primo esempio la scelta $f'(x) = x$, $g(x) = e^{-x}$ conduce a un integrale più complicato di quello di partenza (controllare!). Ponendo invece $f'(x) = e^{-x}$, $g(x) = x$, si ha di conseguenza $f(x) = -e^{-x}$, $g'(x) = 1$ e si arriva facilmente al risultato.
L'esperienza insegna che con le questioni di segno ci si puòimbrogliare facilmente ... è consigliabile controllare il risultato facendo la derivata di ciòche si ottiene.

I metodi indicati fin qui (ed altri metodi che riempiono volumi di tabelle per il calcolo degli integrali ...) puntano a trovare le primitive di una funzione espressa in termini di *funzioni elementari*

con una funzione che sia ancora una combinazione di funzioni elementari, ma ... qualunque tentativo fallirebbe se volessimo esprimere in questo modo l'integrale indefinito di molte funzioni ... anche molto semplici, come ad esempio

$$\int e^{x^2}\ dx.$$

Infatti, il problema della ricerca delle primitive di una funzione, non si esaurisce nell'elaborazione di metodi come quelli visti sopra ... Soprattutto bisognerebbe chiedersi se per ogni possibile funzione esistono le primitive. Sappiamo che una funzione, per essere derivabile, deve essere continua ma ... come deve essere una funzione per possedere le primitive? Per esempio ... esistono le primitive di una funzione come la seguente?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & per \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & per \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \tag{3}$$

Tutti questi problemi sono legati alla cosiddetta *Teoria della Misura* che per i nostri scopi ruota intorno al problema dell'area delle figure piane.

Il problema dell'area

Prima ancora di chiederci quale sia l'*area* (la *misura*) di una figura piana (di un *insieme di punti del piano*) incontriamo il problema di accordarci su cosa sia quest'area e di chiarire se la figura stessa permetta di essere misurata (sia *misurabile*) ... In effetti queste questioni restano in genere

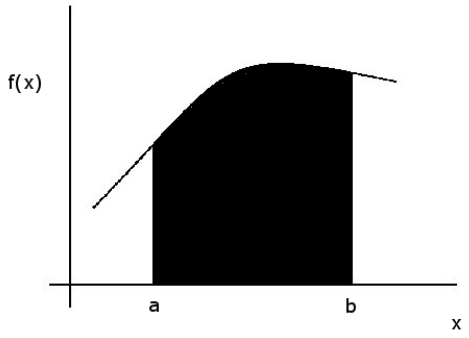

Figura 1: Il sottografico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relativo all'intervallo $[a, b]$.

nell'ombra perché siamo abituati a trattare con figure che non lasciano dubbi sulla loro *misurabilità.* Semmai, in questi casi familiari, è il calcolo effettivo che costituisce un problema e in genere si cerca

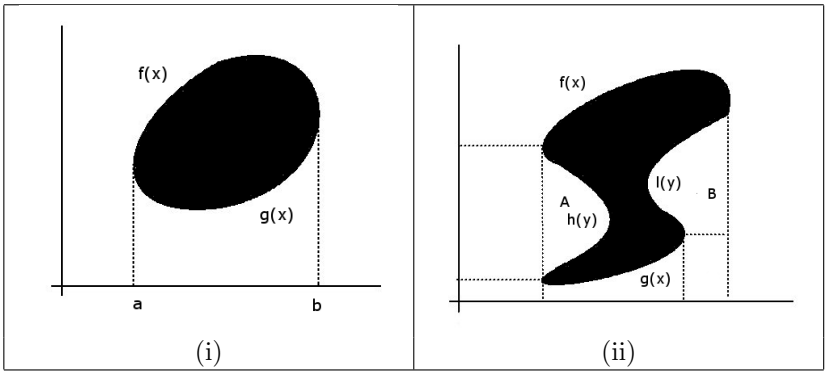

Figura 2: Scomposizione del calcolo dell'area di una figura in termini di sottografici di funzioni: (i) l'area della figura si ottiene cone differenza tra il sottografico di $f(x)$ e quello di $g(x)$; (ii) una scomposizione più complessa per la quale è necessario considerare anche le aree delle regioni A e B legate al sottografico di due funzioni del tipo $x = h(y)$ e $x = l(y)$.

di riportare il tutto alla scomposizione della figura in questione in un certo numero di figure di cui

sappiamo calcolare l'area. A volte dobbiamo eseguire un'operazione di limite, come nel caso famoso del cerchio e del *metodo di esaustione* che consiste nell'approssimare sempre di più l'area stessa con quella di poligoni inscritti (o circoscritti). Ed è proprio da questa idea che partiamo per affrontare il problema, focalizzando l'attenzione sulle figure piane che nascono come *sottografico* di una funzione reale non-negativa, come quella mostrata in Figura 1. In questo modo colleghiamo la forma del *bordo* della figura ad una funzione reale di variabile reale e, in prospettiva, scomporremo la figura di cui vogliamo considerare l'area, in un insieme finito di sottografici (vedi Figura 2).

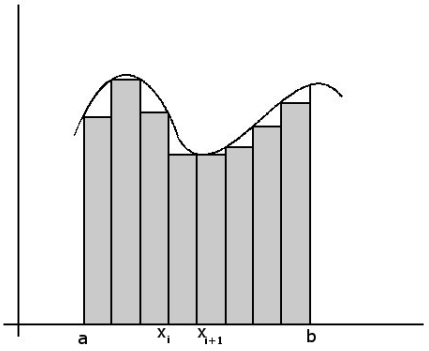

Figura 3: Il sottografico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relativo all'intervallo $[a, b]$.

Dunque, consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e il suo sottografico relativo all'intervallo $[a, b]$. Ispirandoci al metodo di esaustione procediamo come segue

- dividiamo $[a, b]$ in n parti uguali di ampiezza $h = \dfrac{b-a}{n}$;
- identifichiamo i punti $x_i = a + hi$ e gli intervallini $[x_i, x_{i+1}]$ con $i = 0, \cdots, n-1$;
- costruiamo i rettangoli (vedi Figura 3) di base $[x_i, x_{i+1}]$ e altezza f^i_{min} uguale al valore minimo[1] della funzione nell'intervallo stesso;
- partendo dalla ovvia (*ovvia* ?) formula dell'area del rettangolo calcoliamo l'area della figura costituita dall'unione degli n rettangoli

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} h \cdot f^i_{min}$$

  che, se il procedimento andrà a buon fine, approssima per difetto l'area del sottografico;
- ripetiamo l'operazione assegnando ai rettangoli l'altezza f^i_{max} uguale al valore massimo della funzione, e calcoliamo

$$\Sigma_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} h \cdot f^i_{max}$$

  che approssima l'eventuale area per eccesso;
- concludiamo dicendo che

  se esistono e sono uguali i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n, \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \Sigma_n$$

  allora il sottografico di f compreso tra a e b è misurabile e ha area pari a

$$A = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \Sigma_n$$

[1] Qui dobbiamo render conto di un'imprecisione, perché non possiamo essere sicuri che la funzione abbia il minimo (e al punto successivo il massimo) nell'intervallino ... dovremmo invece fare intervenire l'*estremo inferiore* e l'*estremo superiore* di cui non abbiamo parlato ma che esistono sempre e che sostituiscono minimo e massimo quando questi non esistono.

Sottolineiamo il fatto che per parlare di area (*misurabilità*) è necessario che *esistano uguali* i limiti in questione. L'esempio della funzione (3) mostra che ciònon si verifica sempre. Infatti, in tal caso, abbiamo

$$\sigma_n = 0, \qquad \Sigma_n = (b-a),$$

i due limiti esistono ma non sono uguali, e quindi il sottografico della funzione non è misurabile. In ogni caso

se la funzione $f(x)$ è continua in $[a,b]$ il suo sottografico è misurabile.

A questo punto, si definisce l'*integrale definito* di una funzione continua nel modo seguente

$$\int_a^b f(x)dx = \quad \textit{area del sottografico della } f(x), \textit{ compreso tra } a \textit{ e } b$$

dove gli estremi di integrazione a e b soddisfano $a \leq b$.

Aggiungiamo poi che esistono altri modi equivalenti per ottenere l'area (quando esiste) tra cui quello di ottenerla come limite per $h \to 0$, delle *somme integrali*

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

dove i punti x_i sono scelti arbitrariamente ed in modo che l'ampiezza massima degli intervallini $[x_i, x_{i+1}]$ sia minore di h e il punto ξ_i è scelto arbitrariamente in $[x_i, x_{i+1}]$.

Integrale definito e integrale indefinito

Il fatto che per le primitive di una funzione si usi lo stesso termine (*integrale*) che si usa in relazione all'area del sottografico non è ovviamente casuale. Per chiarire il legame, cerchiamo di capire come dovrebbe essere fatta una primitiva di una funzione. A questo scopo consideriamo una funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e chiamiamo $F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la sua primitiva che nel punto x_0 soddisfa la condizione $F(x_0) = 0$ (questa condizione seleziona di fatto una particolare primitiva tra le tante, e la scegliamo per fissare le idee, ma potremmo prendere un'altra primitiva). Costruiamo

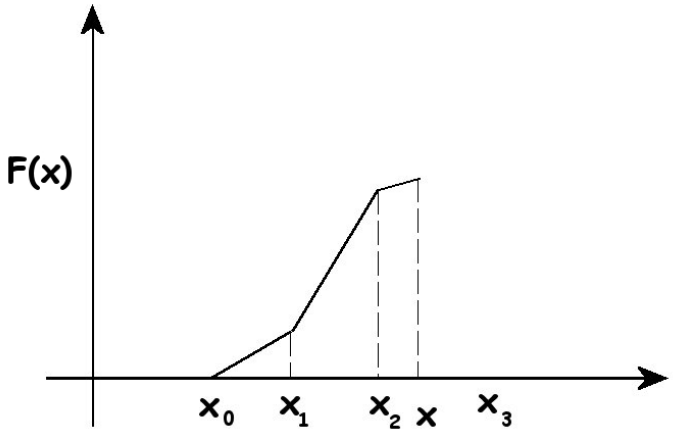

Figura 4: Il grafico della funzione $\tilde{F}(x)$.

un'approssimazione di $F(x)$ nel modo seguente

- Poiché $F'(x_0) = f(x_0)$, se x è sufficientemente vicino ad x_0 possiamo approssimare $F(x)$

$$F(x) \approx f(x_0)(x - x_0) \quad \text{per} \quad x \in [x_0, x_1]$$

dove x_1 è sufficientemente vicino ad x_0.

- Ripartendo da x_1 possiamo ripetere il discorso ottenendo

$$F(x) \approx f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x - x_1) \text{ per } x \in [x_1, x_2].$$

Notiamo che il primo termine garantisce la continuità della funzione approssimante che così si ottiene.

- Ripetendo più volte il procedimento, intervallino per intervallino, si costruisce la funzione

$$\tilde{F}(x) = \sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f(x_n)(x - x_n) \text{ per } x \in [x_n, x_{n+1}].$$

che approssima la funzione $F(x)$.

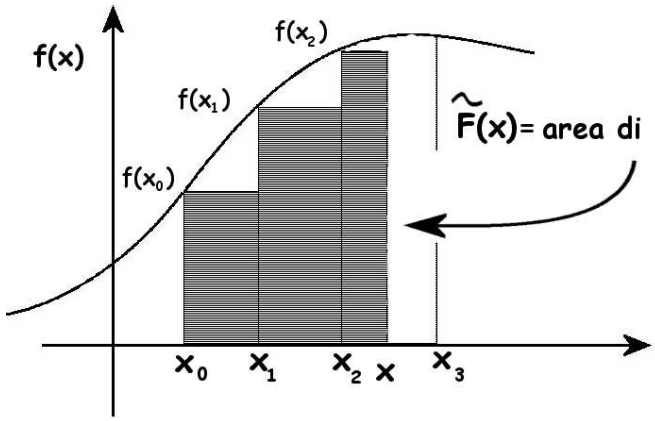

Figura 5: Il significato della funzione $\tilde{F}(x)$.

Cosa rappresenta la $\tilde{F}(x)$? E' in effetti l'area del rettangoloide costruito in relazione al grafico della $f(x)$, come illustrato in Figura 5, al variare di x e il suo grafico è del tipo mostrato in Figura 4. L'approssimazione con cui $\tilde{F}(x)$ rappresenta la $F(x)$ è tanto più buona quanto più gli intervallini $[x_{i+1}, x_i]$ sono piccoli e il valore di $\tilde{F}(x)$ approssima sempre meglio il valore dell'area del sottografico della $f(x)$ compreso tra x_0 e x. Ci convinciamo quindi che la funzione $F(x)$ costruita assegnando

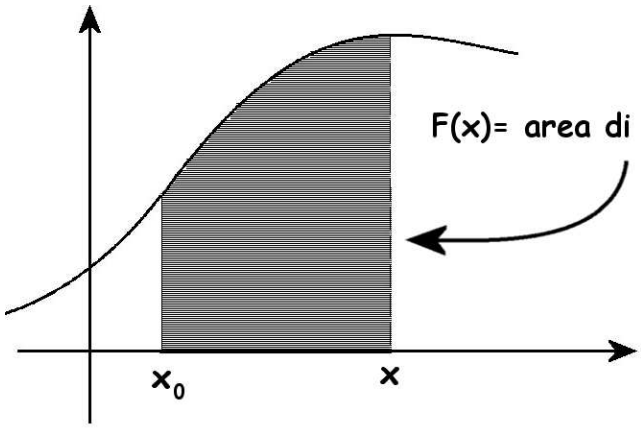

Figura 6: Il valore della funzione $F(x)$ corrisponde all'area del sottografico.

ad ogni x il valore dell'area del sottografico della funzione $f(x)$ (vedi Figura 6) è una primitiva di $f(x)$. Proprio la primitiva di cui $\tilde{F}(x)$ è un'approssimazione. Dunque

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds.$$

Ogni altra primitiva si otterrà aggiungendo una costante.

Ancora a proposito dell'area

Nella lezione precedente abbiamo introdotto il simbolo dell'integrale definito

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

per indicare l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, sottintendendo in tutta la discussione che la funzione è non-negativa. Nel caso generale il procedimento che abbiamo adottato, è ancora

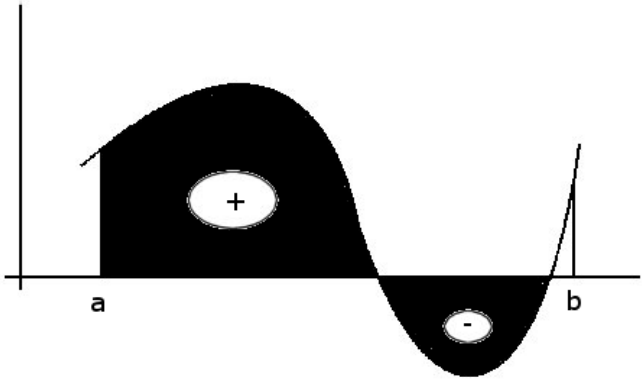

Figura 7: Il caso dell'area con segno.

valido ma il risultato è un'*area con segno* legata al fatto che negli intervalli in cui la funzione è negativa il contributo all'area totale è appunto negativo (vedi Figura 7). Dunque l'integrale definito puòanche essere negativo e quando si ragiona di aree delle figure piane bisogna fare attenzione che le parti al di sotto dell'asse delle x sono contate in negativo. Comunque, con questa raccomandazione, l'integrale definito è ancora collegato alle primitive di $f(x)$, nel senso che ancora

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\ ds, \quad x > x_0$$

è la primitiva di $f(x)$ che si annulla in $x = x_0$. Un ultimo passo consiste nell'estendere la definizione di integrale definito al caso in cui $a > b$ adottando la convenzione

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Con questa estensione, per qualunque funzione continua $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I è un intervallo) una primitiva è ancora data da

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\ ds, \quad x \in I.$$

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Abbiamo così visto che il concetto di primitiva (cioè di integrale indefinito) e quello di area del sottografico (cioè di integrale definito) sono a priori indipendenti ma strettamente collegati. Il seguente famoso teorema fissa in modo preciso questo legame

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
Sia $f(x)$ una funzione continua. Esistono allora sia l'integrale definito che l'integrale indefinito e, se $F(x)$ è una qualunque primitiva della $f(x)$, risulta

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Notiamo che per quanto detto sopra non è necessario che sia $a < b$. La discussione sviluppata fin qui costituisce una dimostrazione euristica di questo teorema.

L'attenzione si sposta sull'integrale definito le cui proprietà possono essere in parte ottenute da quelle dell'integrale indefinito. Infatti abbiamo

* $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
* $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
* $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = f(g(b)) - f(g(a))$
* $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Ma abbiamo anche proprietà specifiche come

* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
* Se risulta $f(x) \leq g(x)$ per $x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Notiamo che questa ultima proprietà si enuncia con $a < b$, altrimenti la diseguaglianza dovrebbe essere invertita. Inoltre, dall'ultima proprietà discende la diseguaglianza

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

dove m e M sono rispettivamente il minimo e il massimo di $f(x)$ in $[a,b]$, che insieme al teorema del valore intermedio, implica che esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ESERCIZI

ESERCIZIO 13.1 Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = 2x + 6$
2. $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{x}$
3. $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$
4. $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x) = x^{1/2} + x^{-1/3}$

ESERCIZIO 13.2 Ricordando gli sviluppi di Taylor della Lezione 7 verificare che

1. $\int e^x \, dx = \int dx + \int x \, dx + \frac{1}{2!}\int x^2 \, dx + \frac{1}{3!}\int x^3 \, dx + \cdots = e^x + c$
2. $\int \sin x \, dx = \int x \, dx - \frac{1}{3!}\int x^3 \, dx + \frac{1}{5!}\int x^5 \, dx + \cdots = -\cos x + c$
3. $\int \cos x = \int dx - \frac{1}{2!}\int x^2 \, dx + \frac{1}{4!}\int x^4 \, dx + \cdots = \sin x + c$

dove c è una costante arbitraria.

ESERCIZIO 13.3 Calcolare per sostituzione

1. $\int e^{2x-1} \, dx$
2. $\int x\sqrt{1-x^2} \, dx$
3. $\int \frac{1}{3x+1} \, dx$
4. $\int \sin x \cos^2 x \, dx$

ESERCIZIO 13.4 Calcolare per parti

1. $\int x \sin x \, dx$
2. $\int e^x \sin x \, dx$
3. $\int x \ln x \, dx$
4. $\int x^2 \sin x \, dx$

ESERCIZIO 13.5 Calcolare le primitive delle seguenti funzioni razionali

1. $\int \frac{x^3 + 2x^2}{1+x^2} \, dx$
2. $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \, dx$
3. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

ESERCIZIO 13.6 Data una funzione $y = f(x) = 2x^2$ nell'intervallo $[1, 4]$, calcolare i valori

$$y_1 = f(1), \quad y_2 = f(2), \quad y_3 = f(3)$$

e le aree dei rettangoli

$$R_1 = 1 \cdot f(1), \quad R_2 = 1 \cdot f(2), \quad R_3 = 1 \cdot f(3).$$

Utilizzare $\sum_{i=1}^{3} R_i$ per approssimare $A = \int_1^4 f(x)dx$.
Calcolare infine A e spiegare perché l'approssimazione ottenuta è inferiore ad A.

ESERCIZIO 13.7 Utilizzando la proprietà di additività delle aree, trasformare le seguenti somme di integrali di una funzione data $f(x)$, nell'integrale $\int_a^b f(x)dx$, esteso a un unico intervallo:

(a) $\int_0^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx + \int_8^{13} f(x)dx$,

(b) $\int_1^8 f(x)dx - \int_5^8 f(x)dx$,

(c) $\int_0^{10} f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$.

ESERCIZIO 13.8 Data la funzione $f(x) = \int_0^x e^{t^2-2t^4}dt$, trovare il primo dei valori $x > 0$ per cui si ha $f''(x) = 0$.

ESERCIZIO 13.9 Verificare la validità della stima

$$0 \leq \int_1^4 \ln(x)\,dx \leq 3\ln(4)$$

ESERCIZIO 13.10 Stimare per difetto e per eccesso il valore dell'integrale $\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx$.

ESERCIZIO 13.11 La numerosità di una popolazione ha un tasso istantaneo di crescita $N'(t)$. Cosa rappresenta il numero $\int_6^{12} N'(t)\,dt$?

ESERCIZIO 13.12 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

$f_1(x) = 4$	nell'intervallo	$[-3, 3]$
$f_2(x) = 2 + 3x$	nell'intervallo	$[2, 4]$
$f_3(x) = 3 - 2x$	nell'intervallo	$[-2, 1]$
$f_4(x) = x - 1$	nell'intervallo	$[0, 4]$
$f_5(x) = \lvert x - 1\rvert$	nell'intervallo	$[0, 4]$

Calcolare l'integrale nel corrispondente intervallo, tenendo presente l'interpretazione dell'integrale definito come area con segno. Successivamente, verificare che il risultato ottenuto è corretto, procedendo con il calcolo delle primitive.

ESERCIZIO 13.13 Calcolare le primitive delle seguenti funzioni:

(a) $f_1(x) = 2x + 6$

(b) $f_2(x) = x^3 - \dfrac{2}{x}$

(c) $f_3(x) = \cos(x) - \sin(x)$

(d) $f_4(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2}$

ESERCIZIO 13.14 Calcolare l'integrale delle seguenti funzioni nel corrispondente intervallo

$f_1(x) = \cos(x)$	nell'intervallo	$[0, 2\pi]$
$f_2(x) = \sin(x)$	nell'intervallo	$[0, \pi]$
$f_3(x) = \cos(x)$	nell'intervallo	$[\pi, 2\pi]$
$f_4(x) = \sin(x)$	nell'intervallo	$[-\pi, \pi]$

ESERCIZIO 13.15 Trovare almeno un valore di $b > -\dfrac{\pi}{2}$ per cui risulta $\int_{-\frac{\pi}{2}}^b \cos(x)\,dx = 0$

ESERCIZIO 13.16 Calcolare per sostituzione i seguenti integrali:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^3 e^{2x-3}\,dx \\ I_2 &= \int_1^4 \frac{1}{3x+1}\,dx \\ I_3 &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ I_4 &= \int_{-3}^1 (x+1)^5\,dx \\ I_5 &= \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx \end{aligned}$$

ESERCIZIO 13.17 Calcolare l'area del piano racchiusa tra le seguenti coppie di funzioni

$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \sin(3x)$	nell'intervallo	$[0, \pi]$
$f(x) = x$	$g(x) = x^3$	nell'intervallo	$[0, 1]$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$g(x) = -\dfrac{1}{x}$	nell'intervallo	$[1, 3]$
$f(x) = -x^2 + 9$	$g(x) = x^2$	nell'intervallo	$\left[0, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right]$

ESERCIZIO 13.18 Calcolare l'area della regione limitata del piano racchiusa fra la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 2$ e la retta di equazione $x + y + 2 = 0$.

ESERCIZIO 13.19 Calcolare il seguente integrale con $\lambda > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$\left(\textit{Hint: calcolare} \quad \int_0^M \lambda e^{-\lambda t}\,dt \quad \textit{e poi calcolare il limite per} \quad M \to \infty.\right)$

ESERCIZIO 13.20 Calcolare

$$\int_1^3 2\,|2x-3|\;\,dx$$

ESERCIZIO 13.21 Una sostanza è distribuita sull'intervallo $[0, 10]$ della retta. La concentrazione della sostanza è data dalla funzione

$$C(x) = (2x+3)^5$$

(a) Determina il punto del segmento in cui la concentrazione è massima.

(b) Determina la massa totale M della sostanza.

ESERCIZIO 13.22 Un corpo si muove su un tratto rettilineo con velocità $v(t) = 4t - 8$ misurato in metri al secondo.

(a) Deteminare la variazione di posizione nell'intervallo di tempo $[0, 5]$;

(b) Determinare lo spazio totale percorso dal corpo;

(c) Determinare la velocità media del corpo.

ESERCIZIO 13.23 Calcola la media integrale delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x - 2$ sull'intervallo $[0, 8]$;

(b) $f(t) = 2t^3 + 3t - 1$ sull'intervallo $[-2, 2]$;

(c) $g(t) = at^2 + 2t$ sull'intervallo $[0, a]$, dove $a > 0$ è una costante.

ESERCIZIO 13.24 Con buona approssimazione, si puòassumere che la densità dell'aria vari con la quota sul livello del mare con la legge $\rho(h) = 1.2e^{-0.12h}$, dove h è misurato in chilometri e $\rho(h)$ in chilogrammi al metro cubo.
Supponendo che questa legge sia valida anche in alta quota (dove la densità è in realtà molto variabile), determinare la massa complessiva della colonna d'aria che ha un metro quadro di area di base. Inoltre determinare per quale valore di h la massa della colonna d'aria è il 99% del totale.

ESERCIZIO 13.25 Sia $f(t)$ una funzione (derivabile) periodica di periodo T. E' vero che $f'(t)$ è anch'essa periodica si periodo T? e $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$?

ESERCIZIO 13.26 Utilizzando i metodi di integrazione per sostituzione o per parti, calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx, \quad \int_0^{10} xe^{-x^2/2}\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx$$

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html