Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 17. 5 Novembre 2014

2 ore *(Equazioni differenziali lineari)*

Equazioni differenziali

Un'equazione differenziale è una equazione in cui l'incognita è una funzione e la condizione (l'equazione) che deve essere soddisfatta coinvolge le derivate della funzione stessa.
L'equazione differenziale più semplice è ovviamente

$$y'(x) = f(x) \tag{1}$$

dove la $y(x)$ è la funzione incognita e la $f(x)$ è una funzione assegnata. Ma questo problema l'abbiamo giàrisolto, perché corrisponde a trovare le primitive della $f(x)$. Dunque, tutte le soluzioni della (1) sono del tipo

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

dove c è una costante arbitraria.
Anche l'equazione

$$y'(x) = y(x) \tag{2}$$

si risolve subito. Di fatto si indovina perché abbiamo notato che la derivata dell'eponenziale e^x è la funzione stessa. Però per ottenere questa soluzione possiamo anche dividere i membri dell'equazione per $y(x)$ ottenendo

$$\frac{1}{y(x)}y'(x) = 1$$

e riconoscere che a primo membro c'è la derivata di una funzione composta

$$\frac{d}{dx}\ln\left(|y(x)|\right) = 1$$

e integrando

$$\ln\left(|y(x)|\right) = x + c$$

dove c è una costante arbitraria. Dunque

$$|y(x)| = ke^x$$

con $k > 0$ e, infine, togliendo il modulo, otteniamo

$$y(x) = ke^x, \quad k \in (-\infty, +\infty),$$

che fornisce una famiglia di soluzioni al variare della costante k. Notiamo che il caso $k = 0$ corrisponde alla soluzione identicamente nulla $y(x) = 0$ che si verifica subito essere una soluzione. è una soluzione di (2).

Per trovare tutte le possibili soluzioni, possiamo anche moltiplicare l'equazione per il *fattore integrante* e^{-x}. Otteniamo

$$e^{-x}y'(x) - e^{-x}y(x) = 0$$

ma al primo membro riconosciamo la derivata del prodotto

$$\left(e^{-x}y(x)\right)' = 0$$

per cui deve essere

$$e^{-x}y(x) = c$$

dove c è una costante arbitraria. E dunque troviamo (moltiplicando per e^x) tutte le soluzioni nella forma

$$y(x) = c\epsilon^x$$

ove c è una costante arbitraria.
Equazioni del tipo (2) intervengono in molte applicazioni. Ad esempio nello studio della crescita malthusiana di una popolazione

$$N'(t) = \epsilon N(t) \tag{3}$$

la cui soluzione

$$N(t) = N_0 \; e^{\epsilon t}$$

tiene anche conto della condizione iniziale $N(0) = N_0$.
Una modifica della (3) prevede la presenza di un termine che rappresenta la migrazione

$$N'(t) = \epsilon N(t) + m \tag{4}$$

dove m è il numero di individui che entra nella popolazione nell'unitàdi tempo (*tasso di migrazione*). La soluzione si ottiene moltiplicando entrambi i membri della (4) per il fattore integrante $e^{-\epsilon t}$ che porta a

$$\left(e^{-\epsilon t} N(t)\right)' = e^{-\epsilon t} N'(t) - \epsilon e^{-\epsilon t} N(t) = e^{-\epsilon t} m$$

e dunque alla soluzione generale

$$N(t) = \left(c + \frac{m}{\epsilon}\right) e^{\epsilon t} - \frac{m}{\epsilon}$$

Si vede così che

- se $\epsilon > 0$ allora $\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$
- se $\epsilon < 0$ allora $\lim_{t \to +\infty} N(t) = -\frac{m}{\epsilon}$

Dunque, in quest'ultimo caso, la popolazione, che altrimenti si estinguerebbe, si attesta su un valore asintotico $N_\infty = -\frac{m}{\epsilon}$ proporzionale al tasso di immigrazione.

Il caso lineare generale

Gli esempi visti nelle lezioni precedenti sono casi particolari dell'equazione lineare generale

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \tag{5}$$

dove i coefficienti $a(x)$ e $b(x)$ sono assegnati e sono funzioni continue in $\mathbb{R}$. Per la soluzione di (5) si può procedere come segue e ottere le soluzioni in forma esplicita

- Si considera anzitutto il *fattore integrante*

  $$e^{-\int_0^x a(s)ds}$$

  e lo si moltiplica per l'equazione. Notiamo che ad esponente figura un integrale definito di $a(x)$ che come funzione di x costituisce una primitiva; l'estremo inferione è $x = 0$ solo per comodità, ma potrebbe essere diverso.

- Si ottiene

  $$e^{-\int_0^x a(s)ds} y'(x) - e^{-\int_0^x a(s)ds} a(x)y(x) = e^{-\int_0^x a(s)ds} b(x) \; ,$$

  e si riconosce che al primo membro compare la derivata del prodotto tra il fattore integrante e la funzione incognita $y(x)$.

- Dunque

  $$\left(e^{-\int_0^x a(s)ds} y(x)\right)' = e^{-\int_0^x a(s)ds} b(x) \; , \tag{6}$$

- da cui

  $$e^{-\int_0^x a(s)ds} y(x) = c + \int_0^x e^{-\int_0^\sigma a(s)ds} b(\sigma) \; d\sigma \; ,$$

  dove, a secondo membro abbiamo una costante arbitraria c e una primitiva del secondo membro della (6).

- Da questa formula si ottiene finalmente

$$y(x) = ce^{\int_0^x a(s)ds} + e^{\int_0^x a(s)ds} \int_0^x e^{-\int_0^\sigma a(s)ds} b(\sigma)\ d\sigma\ ,$$

che può anche scriversi

$$y(x) = ce^{\int_0^x a(s)ds} + \int_0^x e^{\int_\sigma^x a(s)ds} b(\sigma)\ d\sigma\ .$$

- le formule precedenti si possono ricordare ed applicare alle equazioni che si devono risolvere, ma si può anche procedere usando il metodo del fattore integrante di volta in volta , come negli esempi che seguono.

Primo esempio risolto:

$$y'(x) = y(x) + x$$

- moltiplico per il fattore integrante e^{-x}

$$e^{-x}y'(x) = e^{-x}y(x) + e^{-x}x$$

- per cui

$$\left(e^{-x}y(x)\right)' = e^{-x}x$$

- ossia

$$e^{-x}y(x) = c + \int_0^x e^{-s}s\ ds$$

- e poiché, integrando per parti,

$$\int_0^x e^{-s}s\ ds = 1 - (1+x)e^{-x},$$

- abbiamo

$$y(x) = ce^x + e^x - (1+x)$$

Secondo esempio risolto:

$$y'(x) = -2x\ y(x) + 1$$

- moltiplico per il fattore integrante e^{x^2}

$$e^{x^2}y'(x) = -2xe^{x^2}y(x) + e^{x^2}$$

- per cui

$$\left(e^{x^2}y(x)\right)' = e^{x^2}$$

- ossia

$$e^{x^2}y(x) = c + \int_0^x e^{s^2}\ ds$$

- cosicché abbiamo

$$y(x) = ce^{-x^2} + e^{-x^2}\int_0^x e^{s^2}\ ds$$

dove, notiamo, l'integrale a secondo membro non si può esprimere in termini di funzioni elementari.

ESERCIZI

ESERCIZIO 17.1 Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale lineare non omogenea

$$y'(x) = 2x\ y(x) + xe^{x^2} \cos x$$

con la condizione iniziale $y(0) = 0$.

ESERCIZIO 17.2 Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale lineare non omogenea

$$y'(x) = 2x\ y(x) + xe^{(x^2+x)}$$

con la condizione iniziale $y(0) = 0$.

ESERCIZIO 17.3 Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale lineare non omogenea

$$y'(x) = \cos x\ y(x) + \sin x \cos x$$

con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

ESERCIZIO 17.4 Una proteina può essere in due configurazioni, dette a ("aperta") e c ("chiusa"). Assumiamo che in una membrana ci sia un numero così grande di queste proteine da poterne approssimare la frazione nello stato a al tempo t con una variabile continua $A(t)$ (naturalmente la frazione nello stato c sarà $1 - A(t)$). Le proteine potranno passare dallo stato a a quello c e viceversa secondo la legge descritta dall'equazione differenziale

$$A'(t) = -\gamma A(t) + \lambda(1 - A(t)).$$

(a) Cosa rappresentano γ e λ?

(b) Supponiamo $\gamma = 1$ e $\lambda = 2$, misurando il tempo in secondi. Mostrate che la quantità $u(t) = 2 - 3A(t)$ soddisfa l'equazione $u'(t) = -3u(t)$.

(c) Sia $A(0) = 1/2$. Trovate la soluzione $u(t)$ dell'equazione precedente, e da quella ottenete $A(t)$.

(d) Calcolate $\int_0^{10} A(t)$ che esprime il flusso lasciato passare attraverso la membrana in 10 secondi.

ESERCIZIO 17.5 Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali

$$y'(x) = 4x\ y(x)\ , \qquad y'(x) = \frac{2}{x}\ y(x)\ , \qquad y'(x) = (2x+1)\ y(x)\ ,$$
$$y'(x) = e^x\ y(x)\ , \qquad y'(x) = 2x\ y(x) + 1\ , \qquad y'(x) = \frac{1}{x}\ y(x) + x\ ,$$

ESERCIZIO 17.6 Per ciascuna delle equazioni dell'esercizio precedente trovare le soluzioni che soddisfano le condizioni

$$y(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

ESERCIZIO 17.7 Una popolazione cresce secondo un modello malthusiano

$$N'(t) = \epsilon(t)\ N(t), \qquad N(0) = N_0$$

dove il tasso di crescita dipende dal tempo secondo la legge $\epsilon(t) = 0.5 + \alpha \sin(2\pi t)$

1. Trovare la soluzione del modello.
2. Trovare $\lim_{t \to +\infty} N(t)$ nei due casi $\alpha = -1$, $\alpha = 1$.
3. Ripetere quanto sopra nel caso $\epsilon(t) = -0.5 + \alpha \sin(2\pi t)$

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html