Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 2. 17 Settembre 2014

2 ore *(Il concetto di funzione)*

Il concetto di funzione

Dati gli insiemi D (*dominio*) e C (*codominio*), con

$$f : D \to C, \quad \textit{oppure} \quad y = f(x) \quad x \in D \quad y \in C, \quad \textit{oppure} \quad x \to f(x) : D \to C$$

indichiamo una funzione *definita* su D, *a valori* in C. Con ciò intendiamo

una legge che ad ogni elemento di D associa uno ed un solo elemento di C.

Con $f(x)$ indichiamo il valore assunto dalla funzione in corrispondenza dell'elemento x.
Esempi:

1. $f(x) = x^2, \quad D = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = \sqrt{x} - 1, \quad D = \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad C = \mathbb{R};$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad D = \mathbb{R} - \{1\}, \quad C = \mathbb{R};$
4. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{per} \quad x \in (-\infty, 0] \\ x^5 + 1 & \textit{per} \quad x \in (0, +\infty) \end{cases}$.
5. $f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{per} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \textit{per} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$.

Questi esempi utilizzano espressioni *analitiche* per definire la funzione e, nei casi 1,2,3 il dominio risulta in modo naturale dall'insieme di tutti i numeri reali per i quali l'espressione analitica ha senso (*dominio naturale*); comunque possiamo anche adottare un dominio più ristretto. Nel caso 4, poi la funzione è costruita *a tratti* con espressioni diverse. Nel caso 5 la definizione è semplice ma non tradizionale.

Il concetto di funzione porta con sé una serie di definizioni:

- **immagine di un insieme** $A \subset D$

  $$f(A) \equiv \{y \in C \mid \textit{esiste} \quad x \in A \ \ \textit{tale che} \quad y = f(x)\}$$

  Se $A = D$ si parla semplicemente di *immagine della funzione*. Nel caso degli esempi 1,2,3,4 abbiamo rispettivamente

  $$f(D) = [0, +\infty), \quad f(D) = [-1, +\infty), \quad f(D) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}, \quad f(D) = [0, +\infty)$$

- **controimmagine di un insieme** $A \subset C$

  $$f^{-1}(A) \equiv \{x \in D \mid f(x) \in A\}$$

  Se, per fare qualche esempio consideriamo $A = [0, 1]$, nei casi 1,2,3,4 abbiamo rispettivamente

  $$f^{-1}(A) = [-1, 1], \quad f^{-1}(A) = [1, 4], \quad f^{-1}(A) = [2, +\infty), \quad f^{-1}(A) = [-1, 0].$$

  Notiamo che la controimmagine di un insieme non contenuto nell'immagine della funzione è l'insieme vuoto; nel caso dell'esempio 1 abbiamo infatti

  $$f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$$

- **grafico della funzione**
  Data la funzione $f : D \to C$ si considera l'insieme *prodotto cartesiano* del dominio D e del codominio C
  $$D \times C \equiv \{(x, y) \mid x \in D, \quad y \in C\}$$
  e si definisce *grafico di* f il sottoinsieme di $D \times C$ definito come
  $$\mathcal{G}(f) \equiv \{(x, y) \mid x \in D, \quad y = f(x)\}$$
  Nel caso delle funzioni tradizionali definite con espressioni analitiche il grafico è una curva nel piano cartesiano (che è infatti il prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Considerando ad esempio le funzioni $f(x) = x^2$ e $f(x) = \sqrt{x} - 1$ considerate sopra, tra gli esempi, abbiamo i grafici di Figura 1.

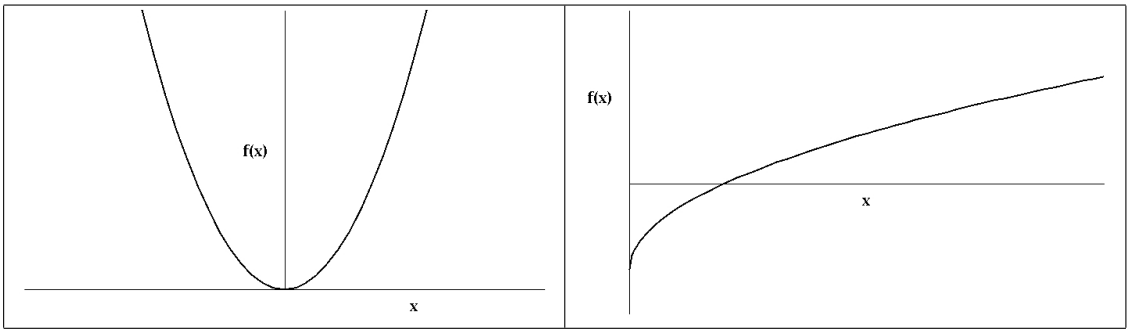


Figura 1: I grafici delle funzioni $f(x) = x^2$ e $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

Iniettività

Una funzione si dice *iniettiva* se ogni elemento dell'immagine $f(D)$ proviene da un solo elemento del dominio D. Altrimenti detto:

$$se \quad f(x_1) = f(x_2) \quad allora\ deve\ essere \quad x_1 = x_2.$$

Una funzione iniettiva è *invertibile*, è cioè possibile costruire la *funzione inversa*

$$f^{-1} : f(D) \to D,$$

assegnando ad ogni elemento di $f(D)$ l'elemento di D da cui proviene tramite la f. Naturalmente risulta

$$se \quad y = f(x) \quad allora \quad f^{-1}(y) = x$$

Come esempio consideriamo anzitutto la funzione $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ($D = \mathbb{R}_+$) che è invertibile perché

$$f(x_1) = f(x_2) \quad vuol\ dire \quad \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \quad ossia \quad x_1 = x_2;$$

perché x_1 e x_2 sono vincolati ad essere non-negativi. Invece, la funzione $f(x) = x^2$ ($D = \mathbb{R}$) non lo è perché

$$f(x_1) = f(x_2) \quad vuol\ dire \quad x_1^2 = x_2^2 \quad che\ non\ implica \quad x_1 = x_2.$$

Attenzione! Se noi *restringessimo* la funzione considerando

$$f(x) = x^2, \quad D = [0, +\infty), \quad C = \mathbb{R}$$

allora avremmo una funzione iniettiva e la sua inversa sarebbe

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad D = [0, +\infty).$$

Se invece considerassimo la restrizione della funzione al dominio $D = (-\infty, 0]$ avremmo

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}, \quad D = [0, +\infty).$$

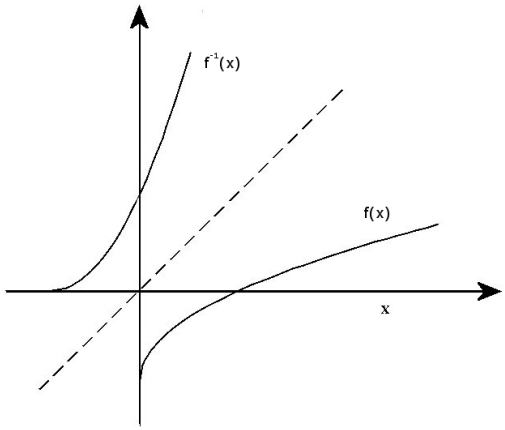


Figura 2: Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x} - 1$ e della sua inversa

Per ciò che riguarda il grafico, una semplice trasformazione grafica lega quello della funzione $f(x)$ a quello della sua inversa. Basta infatti ruotare il grafico di $f(x)$ rispetto alla bisettrice per ottenere quello di $f^{-1}(x)$ (vedi Figura 2).

Composizione di funzioni

In generale

Date le due funzioni $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, se $g(D_g) \subset D_f$ si definisce la composizione di f con g (nell'ordine) ponendo

$$f \circ g(x) = f(g(x)), \quad x \in D_g$$

Notare la condizione sui domini che permette la definizione stessa e che in generale l'ordine è importante per definire la composizione. Infatti l'operazione di composizione non è *commutativa*, come si vede dalle due funzioni

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2 \ ,$$

entrambe definite su $D = \mathbb{R}$, per le quali

$$f \circ g(x) = x^2 + 1, \quad g \circ f(x) = (x+1)^2.$$

Ovviamente non è sempre così perché infatti le fue funzioni (n ed m interi positivi e n dispari in modo che sia $D = \mathbb{R}$)

$$g(x) = x^m, \quad h(x) = x^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

entrambe definite su $D = \mathbb{R}$, *commutano*

$$g \circ h(x) = h \circ f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Naturalmente, in generale risulta

$$f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$$

Funzioni con proprietà particolari

Alcune funzioni hanno proprietà particolari, significative per la forma del grafico. Data infatti la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbiamo che

- la funzione si dice *pari* se $\quad f(x) = f(-x)$;
- la funzione si dice *dispari* se $\quad f(x) = -f(-x)$;

- la funzione si dice *crescente* se $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$;
- la funzione si dice *decrescente* se $f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$;
- la funzione si dice *non-crescente* se $f(x_1) \geq f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$;
- la funzione si dice *non-decrescente* se $f(x_1) \leq f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$;
- la funzione si dice *periodica* di periodo p se $f(x+p) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

Esempi di ciascuno dei casi elencati sono rispettivamente le funzioni

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = -x^3, \quad f(x) = \sin x.$$

il cui grafico si traccia semplicemente.

Notiamo che una funzione crescente (o decrescente) è necessariamente iniettiva.

Trasformazioni del grafico

Modificando la funzione in un modo opportuno, possiamo ottenere significative modifiche del grafico della funzione. Data dunque una funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, possiamo considerare le seguenti modifiche (con $a > 0$)

$$g_1(x) = af(x), \quad g_2(x) = f(ax), \quad g_3(x) = f(x) + a, \quad g_4(x) = f(x+a), \quad g_5(x) = f(x-a)$$

e anche

$$g_6(x) = f(-x), \quad g_7(x) = -f(x), \quad g_8(x) = |f(x)|$$

che si riflettono nei grafici riportati in Figura 3. In particolare, i grafici di $g_1(x)$ e $g_2(x)$ si ottengono dalla $f(x)$ con un cambiamento di scala (rispettivamente verticale e orizzontale), la $g_3(x)$ con una traslazione verticale, mentre $g_4(x)$ e $g_5(x)$ si ottengono con traslazioni orizzontali (rispettivamente verso destra e sinistra), la $g_6(x)$ e la $g_7(x)$ per simmetria rispetto agli assi (rispettivamente delle y e delle x) e infine la $g_8(x)$ si ottiene per ribaltamento dei tratti negativi.

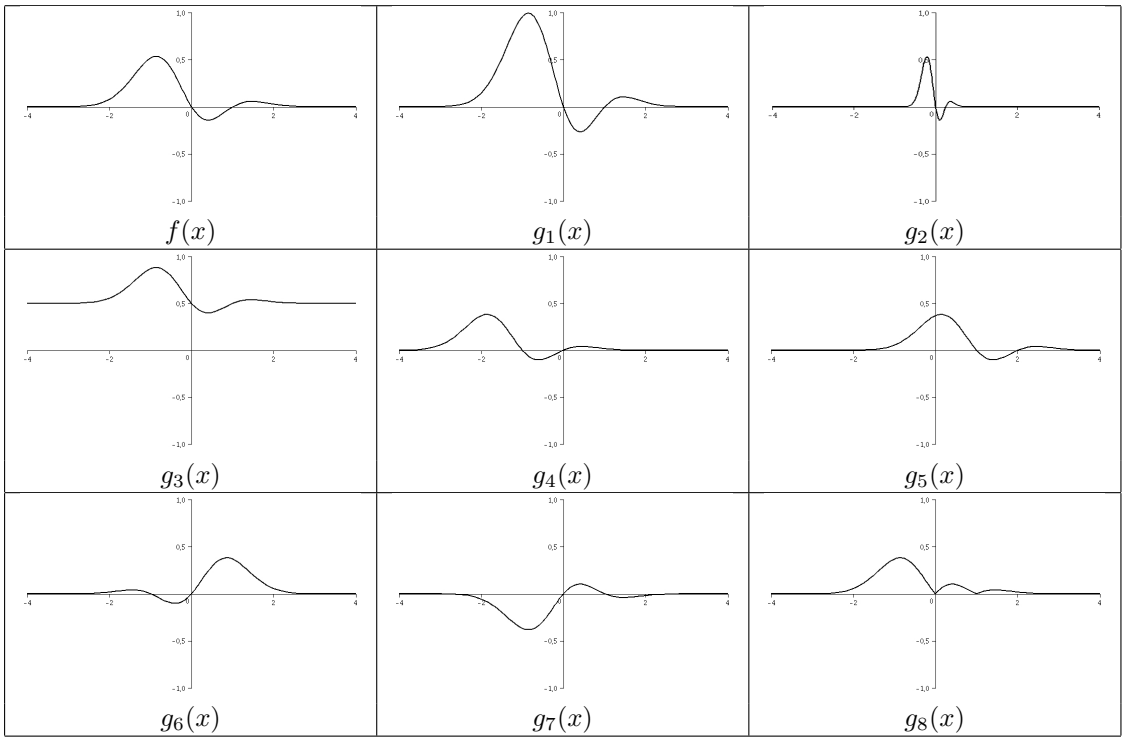


Figura 3: Il grafico della funzione $f(x)$ confrontato con quelli delle $g_1(x) \cdots g_7(x)$.

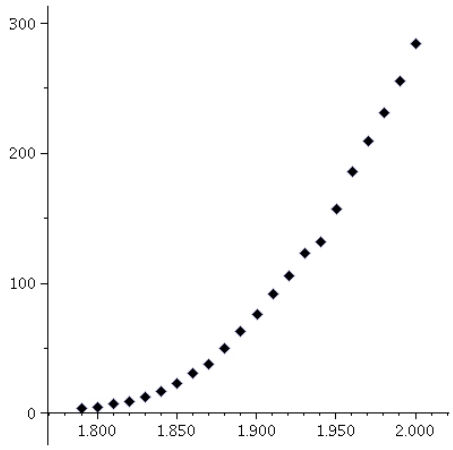


Figura 4: Il grafico della funzione discreta tratta dalla tabella 1

Funzioni discrete

Nel caso in cui il dominio della funzione in gioco sia un insieme costituito da una *infinità numerabile* di elementi (ossia *tanti quanti* i numeri naturali) la funzione si dice *discreta*. Ad esempio la funzione

$$f(x) = x^2 + 1, \quad D = \mathbb{N}, \quad C = \mathbb{N}$$

è una funzione discreta (per quanto artificiale).

A volte, la tabella che fornisce i risultati di un esperimento, o di un rilevamento, permette di

anno	milioni		anno	milioni
1790	3,929		1900	76,212
1800	5,308		1910	92,228
1810	7,240		1920	106,021
1820	9,638		1930	123,203
1830	12,861		1940	132,165
1840	17,064		1950	152,271
1850	23,192		1960	180,671
1860	31,443		1970	205,052
1870	38,558		1980	227,726
1880	50,189		1990	250,132
1890	62,980		2000	282,339

Tabella 1: La popolazione americana

definire una funzione discreta. Se consideriamo infatti i dati demografici della popolazione americana riportati nella Tabella 1, possiamo considerare la funzione $f : D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con

$$D = \{1790, 1800, 1810, 1820, \quad \cdots \quad \cdots, 1970, 1980, 1990, 2000\}$$

e ponendo

$$\begin{aligned} f(1790) &= 3,929 \\ f(1800) &= 5,308 \\ &\cdots \\ &\cdots \\ f(1990) &= 250,132 \\ f(2000) &= 282,339 \end{aligned}$$

In questo caso abbiamo il grafico discreto della Figura 4.

Funzioni di più variabili

Le funzioni considerate fin qui sono funzioni *reali* (il codominio è $\mathbb{R}$) di una *variabile reale* (il dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$). Possiamo considerare il caso di funzioni reali di due variabili reali:

$$z = f(x, y) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

il cui grafico si rappresenta come una superficie dello spazio cartesiano a tre dimensioni. Come esempio consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

il cui grafico si identifica facilmente (figura 5).

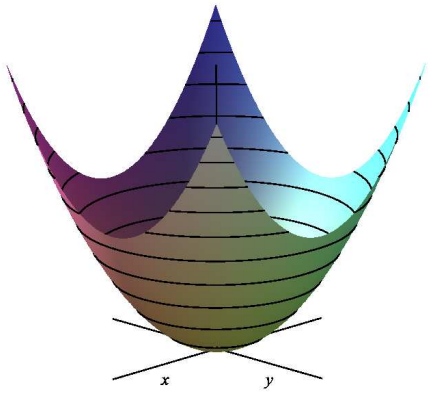


Figura 5: Il grafico della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$

Funzioni che descrivono relazioni tra diverse grandezze

Numerosi problemi conducono allo studio di una funzione. Qui consideriamo quello classico della lattina di forma cilindrica (vedi figura 6). Se d e h sono rispettivamente diametro della base e altezza abbiamo le formule

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}, \quad S = \pi \left(\frac{d^2}{2} + dh \right),$$

che forniscono rispettivamente volume e superficie laterale della lattina. Si tratta di due funzioni

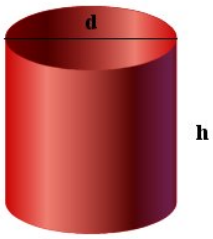


Figura 6: Il problema della lattina

reali delle due variabili d e h i cui grafici sono mostrati in figura 7.

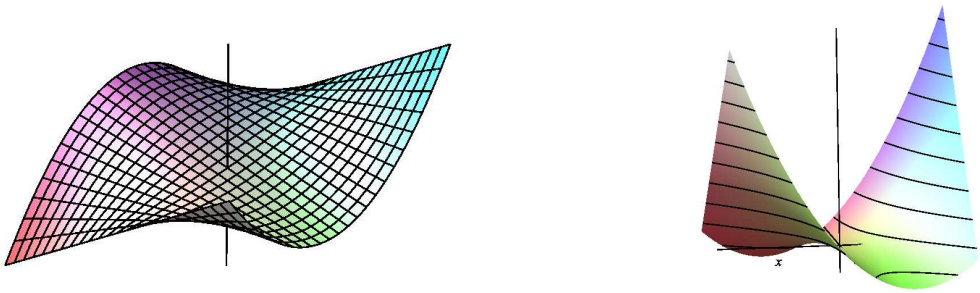


Figura 7: Il problema della lattina: i grafici del volume (a sinistra) e della superficie laterale (a destra) in funzione del diametro e dell'altezza.

Ora consideriamo due casi

Il caso del volume costante

In questo caso fissiamo il valore del volume V^* e usiamo la prima formula per esprimere l'altezza in funzione del diametro:

$$h = \frac{4V^*}{\pi d^2}, \quad d > 0$$

e sostituiamo nella seconda per ottenere la funzione che esprime la superficie laterale in funzione del diametro

$$S(d) = \pi \left(\frac{d^2}{2} + \frac{4V^*}{\pi d} \right),$$

con dominio $D = [0, +\infty)$.

Il caso della superficie costante

In questo caso fissiamo il valore della superficie S^* e usiamo la seconda formula formula per esprimere l'altezza

$$h = \frac{S^*}{\pi d} - \frac{d}{2}, \quad 0 < d^2 < \frac{2S^*}{\pi}$$

e sostituiamo nella prima formula per ottenere il volume in funzione del diametro

$$V(d) = \frac{1}{4} \left(S^* - \frac{\pi}{2} d^2 \right) d,$$

con dominio $D = \left(0, \sqrt{\frac{2S^*}{\pi}}\right)$.

ESERCIZI

ESERCIZIO 2.1 Determinare il dominio *naturale* di ciascuna delle seguenti funzioni

$$a(x) = \frac{2}{(x^2+1)} \qquad d(x) = \frac{1}{(x^2-4)}$$
$$b(x) = \sqrt{-x} \qquad e(x) = \sqrt{x^2}$$
$$c(x) = \sqrt{4-x^2} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x^2-1)}$$

ESERCIZIO 2.2 Data la funzione $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinare l'immagine $f(A)$ di ciascuno degli insiemi

(a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
(c) $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ (d) $A = \mathbb{R}$

ESERCIZIO 2.3 Data la funzione dell'esercizio precedente, in ciascuno dei casi (a)–(d), determinare la controimmagine di ciascuno degli insiemi seguenti

(a) $A = [0, 1]$ (b) $A = (-1, 1)$
(c) $A = (0, 9)$ (d) $A = [0, +\infty)$

ESERCIZIO 2.4 Risolvete i due esercizi precedenti usando la funzione $f(x) = x^3$.

ESERCIZIO 2.5 Stabilire se le seguenti funzioni definite da formula, da tabella o verbalmente sono iniettive:

1. $f(x) = 1 + 4x - x^2$
2. $g(x) = \sqrt{x}$
3. $f(t)$ è l'altezza di una persona all'età t.

4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2	2	2.5	6	5

5.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2	2.8	2.5	6	5

ESERCIZIO 2.6 Assegnate le funzioni

$$f(x) = \frac{1+x}{2x+1}, \quad g(x) = \frac{1}{2+x}, \quad l(x) = x|x|, \quad h(x) = x^3 + 1$$

precisarne il dominio e quando possibile l'immagine. Quali sono iniettive?

ESERCIZIO 2.7 Quali delle seguenti funzioni $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono iniettive?

(a) $f(x) = x^3 - 3$

(b) $f(x) = 6x^2 - 1$

(c) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$

(d) $f(x) = x^3 - 2x$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(f) $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2+7}$

Perché ?

ESERCIZIO 2.8 Trova la funzione inversa delle funzioni iniettive che hai individuato nell'esercizio precedente.

ESERCIZIO 2.9 Per ogni funzione non iniettiva dell'esercizio precedente, trova un opportuno dominio in corrispondenza al quale (per restrizione) la funzione risulti iniettiva.

ESERCIZIO 2.10 Date le funzioni $f(x) = x + \frac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ calcolare $f \circ g,\ g \circ f,\ f \circ f$, precisando il loro dominio.

ESERCIZIO 2.11 Assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, calcolare$f(-x),\ f(\frac{1}{x}),\ f(\frac{1}{1-x}),\ f(f(x))$.

ESERCIZIO 2.12 Se f e g sono date dalla seguente tabella .

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

valutare $(f \circ g)(1),\ (g \circ f)(1),\ (f \circ f)(1),\ (g \circ g)(1),\ (g \circ f)(3),\ (f \circ g)(6)$.

ESERCIZIO 2.13 Scrivere la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ come composizione di tre altre funzioni.

ESERCIZIO 2.14 Per trovare la temperatura in gradi centigradi (C) dalla temperatura in gradi Fahrenheit (F), si usa la seguente procedura: si sottrae 32 a F, poi si moltiplica il risultato per 5 e lo si divide per 9. Scrivere tale regola in forma di relazione lineare fra F e C.

ESERCIZIO 2.15

(a) Trovare l'espressione analitica della funzione che rappresenta la metà superiore della circonferenza di equazione $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

(b) Trovare l'espressione analitica della funzione che rappresenta la parte inferiore della parabola di equazione $x + (y-1)^2 = 0$.

(c) Trovare l'espressione analitica del segmento che unisce i punti $(2, -4)$, $(4, -5)$.

ESERCIZIO 2.16 Una scatola aperta, di volume pari a $2m^3$ ha la base quadrata. Determinare la superficie della scatola in funzione della lunghezza del lato di base.

ESERCIZIO 2.17 Un contadino ha a disposizione 20 m di rete con cui costruire un pollaio rettangolare, di cui uno dei lati è costituito dal muro della stalla. Scrivere l'area del pollaio in funzione della lunghezza del lato parallelo al muro della stalla.

ESERCIZIO 2.18 Il perimetro di un triangolo rettangolo è 6, esprimere l'area del triangolo in funzione della sua ipotenusa.

ESERCIZIO 2.19

(a) Scrivere, in formula, la funzione che associa a x il suo stesso valore diminuito di 3 unità e poi diviso per x.

(b) Scrivere, in formula, la funzione che associa a x il suo stesso valore diviso per il doppio di $x-1$.

(c) Descrivere, in formula, la relazione tra il numero di larici e di pini in un bosco se "ci sono 7 pini per ogni larice".

ESERCIZIO 2.20 Le scale di temperatura Celsius e Kelvin usano la stessa unità di misura, però la scala Kelvin ha lo zero che coincide con lo zero assoluto, cioè $-273.15°C$

(a) Se T indica la temperatura nella scala Celsius e τ quella nella scala Kelvin, scrivere la legge $\tau = \tau(T)$ che traduce il valore della temperatura T in gradi Celsius nel valore τ in Kelvin.

(b) Qual'è il dominio di definizione di questa funzione?

(c) Il punto $(0, 273.15)$ appartiene al grafico di τ?

(d) Il punto $(273.15, 0)$ appartiene al grafico di τ?

(e) Tra i punti $(0, 273.15)$ e $(273.15, 0)$ quale appartiene al grafico di T?

ESERCIZIO 2.21 La legge $h(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + h_0$ descrive come varia la distanza dal suolo di un corpo pesante che, nel vuoto, cade da un'altezza h_0 con una velocità iniziale nulla.

(a) Qual è il dominio di definizione della funzione $h(t)$?

(b) Quanto tempo impiega il corpo a toccare terra?

(c) Il tempo che il corpo impiega per toccare terra è una funzione dell'altezza da cui viene lasciato cadere?

(d) Se il corpo impiega esattamente T secondi per cadere, quale dev'essere l'altezza iniziale?

ESERCIZIO 2.22 Dopo aver tracciato il grafico di $f(x) = \sqrt{x}$, dedurre da esso i grafici seguenti:

$$f(x) = -\sqrt{x}; \qquad f(x) = -\sqrt{x+1}; \qquad f(x) = |\sqrt{x} - 1|; \qquad f(x) = -\sqrt{|x-2|}$$

ESERCIZIO 2.23 Tracciare su un sistema di assi cartesiani un grafico approssimato delle seguenti funzioni:

$$f(x) = |2 - |x||; \qquad f(x) = -(x-1)^3; \qquad f(x) = |4 - x^2|; \qquad f(x) = 2 - |4 - x^2|$$

ESERCIZIO 2.24 Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari o nessuna delle due cose.

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{x^2+1}{1+x^4}, \quad h(x) = \frac{x^3+1}{1+x^4}$$

$$f(x) = x^5 + 1, \quad g(x) = x(x+1), \quad h(x) = [x]$$

(*La funzione* $h(x) = [x]$, *chiamata parte intera di* $[x]$ *è definita per ogni* x *reale come il più grande intero minore o uguale ad* x).

ESERCIZIO 2.25 Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{1+x^4}$

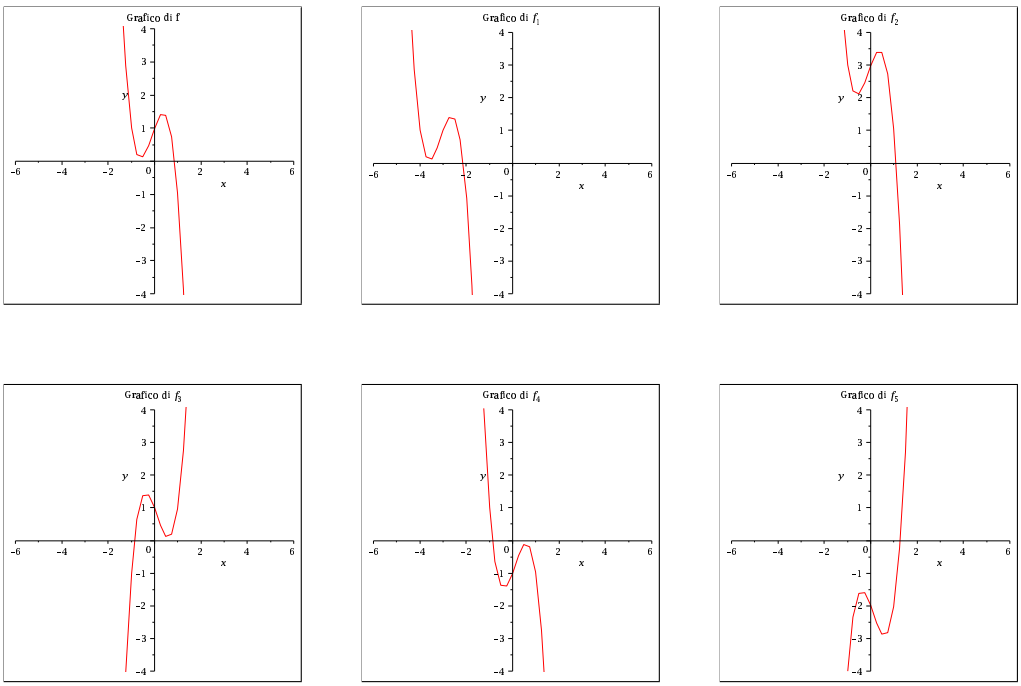
(d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{8x^2+1}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+5}}$

(f) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^4+2}$

ESERCIZIO 2.26 Data la parabola $y = f(x) = -x^2 + 3x + 1$, trovare le coordinate dei punti $A = (1, f(1))$, $B = (-1, f(-1))$ appartenenti al grafico della funzione, le intersezioni della curva con gli assi cartesiani e l'insieme di valori x per cui si ha $f(x) > 0$.

ESERCIZIO 2.27 I grafici delle funzioni f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 sono stati ottenuti da quello di f mediante traslazioni e simmetrie. Scrivere le funzioni f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 in termini di f.



Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html