Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 21. 26 Novembre 2014

2 ore *(Equazioni separabili. Matrici e vettori)*

Equazioni differenziali: fenomenologia generale

Le equazioni che abbiamo incontrato fin qui rientrano nella classe rappresentata dall'equazione generale

$$y'(x) = F\left(x, y(x)\right) \tag{1}$$

con la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0 \ , \tag{2}$$

dove, per semplicità, supponiamo che la funzione $F\left(x, z\right)$ sia definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

Il problema che ne risulta è detto *Problema di Cauchy* e costituisce il tipico problema risultante dalla modellizzazione dei fenomeni naturali.

Esistenza di una soluzione (cioè di una funzione derivabile con continuità che soddisfa (1) e (2)), *unicità* e *globalità* (esistenza nell'intervallo $[0, +\infty)$) della soluzione sono proprietà necessarie all'adeguatezza del modello ma tuttavia, affinché siano garantite occorre che siano verificate opportune condizioni.

Due semplici esempi possono illustrare la problematica. Consideriamo infatti il problema

$$y'(x) = y^2(x), \quad y(0) = 1. \tag{3}$$

Come si può controllare direttamente una soluzione del problema è data da

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-\infty, 1),$$

che non può essere estesa con continuità oltre l'intervallo indicato (vedi figura 1).

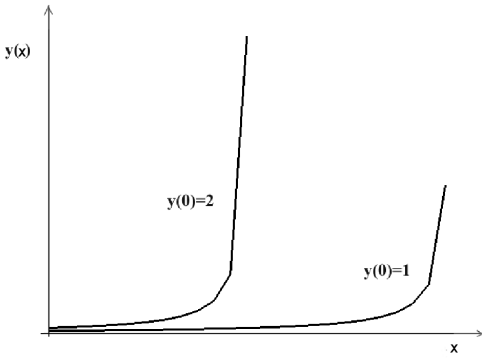

Figura 1: L'equazione $y'(x) = y(x)^2$

Considerando poi il problema

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|}, \quad y(0) = 0, \tag{4}$$

vediamo che le funzioni seguenti

$$y(x) \equiv 0, \quad y(x) = x^2$$

sono entrambe soluzioni del problema nell'intervallo $[0, +\infty)$. La situazione è illustrata in Figura 2 dove si vede che incollando i grafici di più funzioni si possono costruire infinite soluzioni dello stesso problema.

Un risultato fondamentale è il cosiddetto *teorema di esistenza e unicità*

Se la funzione $F(x,z)$ è derivabile con derivata continua, per ogni condizione (2) esiste un intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ nel quale è definita una ed una sola soluzione del sistema (1), soddisfacente la condizione stessa.

Vediamo che l'esistenza stabilita dal teorema risulta *locale* e che in generale la soluzione non può essere estesa oltre un certo intervallo limitato. È il caso dell'esempio (3) dove la soluzione non può essere estesa ulteriormente. Notiamo in proposito che l'intervallo stesso dipende dalla condizione iniziale; infatti con la condizione

$$y(x_0) = y_0 > 0$$

la soluzione risulta

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{1 + y_0 x_0}{y_0}\right).$$

Nel caso invece dell'esempio (4) vengono a cadere le ipotesi del teorema e si perde l'unicità della soluzione. Notiamo che l'unicità della soluzione implica che (sotto le condizioni del teorema) due soluzioni *non possono incontrarsi* come abbiamo già anticipato nella discussione dell'equazione logistica.

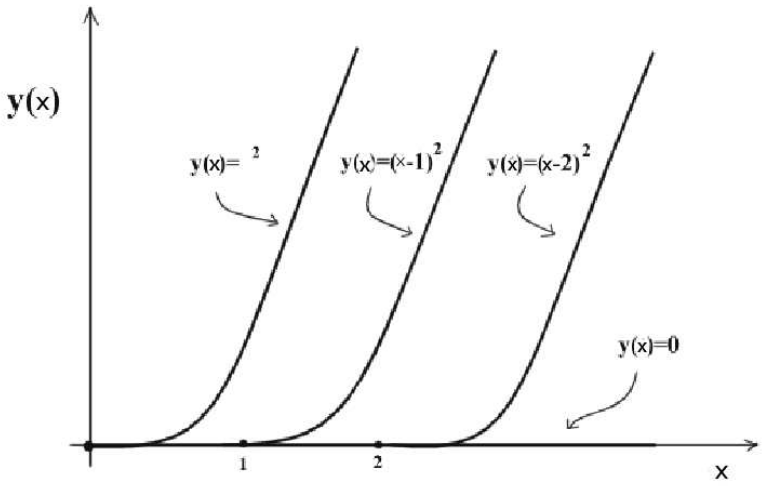

Figura 2: L'equazione $y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}$ che, in corrispondenza alla condizione $y(0) = 0$, ammette infinite soluzioni

Un caso particolare dell'equazione (2) corrisponde ad una classe di equazioni completamente risolubili (dette equazioni *separabili*) anche se in generale non è possibile fornirne la soluzione in termini di funzioni elementari. La forma generale del problema si presenta come

$$\begin{cases} i) & y'(x) = \alpha(x)F(y(x)), \\ ii) & y(0) = y_0. \end{cases} \tag{5}$$

dove le funzioni $\alpha(x)$ ed $F(z)$ si suppongono derivabili con continuità e (per semplicità) definite ovunque. Queste ipotesi infatti garantiscono esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy relativo e, prima ancora di discutere la risoluzione esplicita è possibile analizzare la struttura delle soluzioni con semplici ragionamenti.

Il punto di partenza consiste dalla determinazione degli zeri della funzione $F(z)$. Supponiamo, per fissare le idee, che la funzione abbia p zeri z_i[1]

$$F(z_i) = 0, \quad i = 1, \cdots, p.$$

Tali zeri corrispondono ad altrettante soluzioni costanti dell'equazione (5 , i) (soluzioni *stazionarie*, vedi Figura 3)

$$y_i^*(x) \equiv z_i, \quad t \in (\infty, +\infty), \quad i = 1, \cdots, p,$$

[1]Il caso in cui la $F(z)$ possiede infiniti zeri è trattabile in modo analogo.

ciascuna delle quali corrisponde alla soluzione del problema (5) con la condizione iniziale $y_0 = z_i$. Ora, per il teorema di unicità, nessuna delle altre soluzioni può intercettare tali soluzioni costanti. Di conseguenza, ogni altra soluzione resta confinata in uno degli intervalli

$$I_0 = (-\infty, z_1), \quad I_i = (z_i, z_{i+1}) \quad (i = 1, \cdots, p-1), \quad I_p = (z_p, +\infty).$$

Così, a parte le soluzioni confinate negli intervalli estremi I_0 e I_p, ogni altra soluzione non può esplodere al finito e risulta globale in $t \in (-\infty, +\infty)$.

A questo punto è chiaro come procedere per la risoluzione esplicita del problema (5) nel caso in

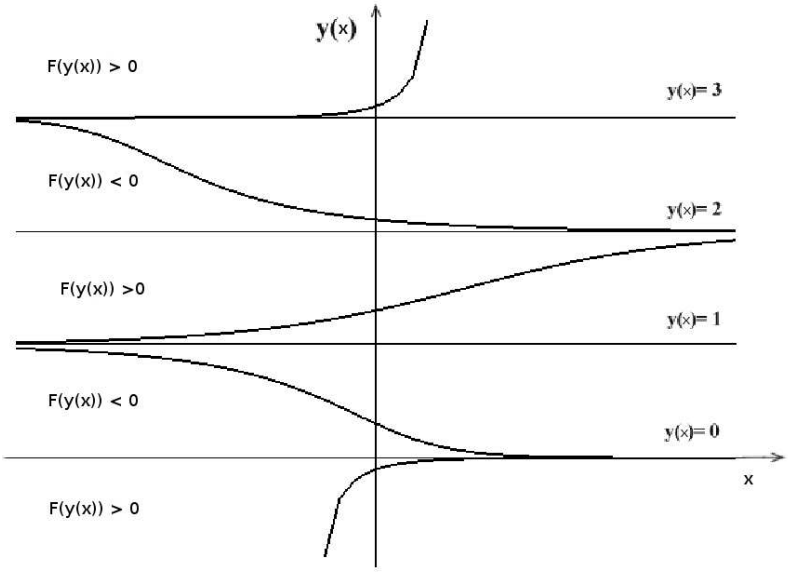

Figura 3: L'equazione $y'(x) = 0.5\ (y(x)-1)(y(x)-2)(y(x)-3)y(x)$

cui il dato iniziale y_0 sia diverso da uno degli zeri di $F(z)$. In tal caso infatti $F(y(x)) \neq 0$ e, dalla (5), otteniamo

$$\frac{1}{F(y(x))} y'(x) = \alpha(x).$$

Poi, supponendo per fissare le idee $y_0 \in I_k$ e quindi $y(t) \in I_k$, possiamo integrare entrambi i membri ottenendo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{F(z)} = \int_0^x \frac{1}{F[y(s)]} y'(s) ds = \int_0^x \alpha(s) ds \tag{6}$$

dove l'integrale ha senso perchè $F(z)$ non si annulla in I_k. Se $G_k(z)$ è una primitiva di $\dfrac{1}{F(z)}$ nell'intervallo I_k la (6) si può riscrivere come

$$G_k(y(x)) - G_k(y_0) = \int_0^x \alpha(s) ds$$

e, poiché $F(z)$ ha segno definito in I_k, abbiamo che

$$G_k(z) \ \textit{è una funzione crescente o decrescente nell'intervallo} \ \ I_k \ .$$

A questo punto possiamo considerare l'inversa della $G_k(z)$ che è una funzione $H_k(z)$ definita nell'intervallo $[-\infty, +\infty]$, con valori in I_k e, con quest'ultima, possiamo rappresentare esplicitamente la soluzione a partire dalla (6), infatti, per $y_0 \in I_k$ si ha

$$y(x) = H_k \left(G_k(y_0) + \int_0^x \alpha(s) ds \right) \tag{7}$$

Notiamo che la funzione $H_k(z)$ risulta crescente (oppure decrescente) se la $F(z)$ è positiva (oppure negativa) in I_k e si può dimostrare che

$$\lim_{z\to-\infty} H_k(z) = z_k \text{ (oppure } z_{k+1}), \qquad \lim_{z\to+\infty} H_k(z) = z_{k+1} \text{ (oppure } z_k). \tag{8}$$

Cosí, sulla base della (7) e (8), possiamo determinare il comportamento asintotico della soluzione che ovviamente dipende da $\alpha(x)$. In particolare, se $\alpha(x) \equiv 1$ (in tal caso il problema è *autonomo*) e la funzione $F(z)$ è positiva in I_k abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = z_k, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = z_{k+1}.$$

se, invece, la $F(z)$ è negativa abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = z_{k+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = z_k.$$

La discussione appena svolta è illustrata in figura 3 dove sono riportati i grafici di varie soluzioni dell'equazione

$$y'(x) = 0.5\ (y(x)-1)(y(x)-2)(y(x)-3)y(x).$$

Figura 4 illustra infine i vari passi della costruzione della soluzione di un'equazione separabile.

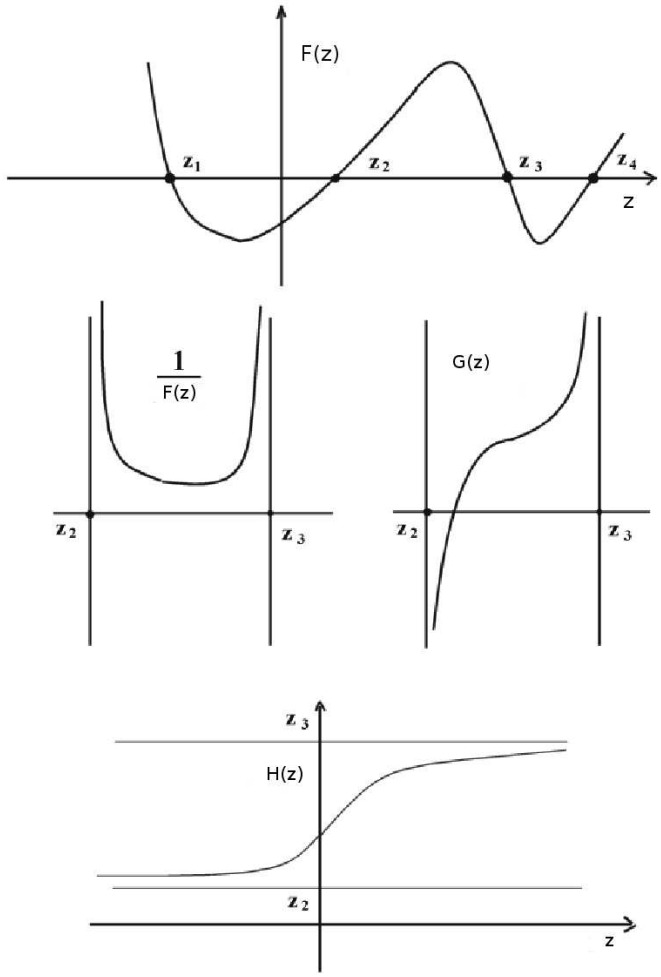

Figura 4: I passi per la risoluzione di un'equazione separabile

Vettori e matrici: un esempio

Supponiamo di analizzare la dinamica di una popolazione di piante (erbacee), supponendo di poterle dividere in due categorie:*piante piccole* (che non producono semi) e *piante grandi* (che producono semi). Indichiamo dunque rispettivamente con G_n e A_n la densità di piante "giovani" (piccole) e "adulte" (grandi) presenti nell'anno n. La popolazione cresce secondo il seguente processo che si svolge in una unità di tempo (un anno)

- le piante piccole possono
  - rimanere nella stessa classe con probabilità s;
  - crescere, passando alla classe delle piante grandi con probabilità m;
  - morire;

  dove ovviamente $s + m \leq 1$.
- Le piante grandi possono
  - produrre semi (in media β per pianta) che producono altrettante piante piccole;
  - rimanere nella stessa classe con probabilità s;
  - morire.

Quanto descritto si traduce nelle equazioni

$$\begin{array}{rcl} G_{n+1} & = & sG_n + \beta A_n \\ A_{n+1} & = & mG_n + sA_n. \end{array} \tag{9}$$

e identifichiamo due oggetti matematici con cui descrivere il processo:

- il *vettore*
$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ A_n \end{pmatrix}$$
  con cui rappresentare lo *stato* del sistema al tempo n;
- la *matrice*:
$$A = \begin{pmatrix} s & \beta \\ m & s \end{pmatrix}$$
  con cui esprimere la transizione da un anno all'altro.

Con questi oggetti, la (9) si esprime come

$$\begin{pmatrix} G_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & \beta \\ m & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_n \\ A_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

o, in modo compatto

$$\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n.$$

Il secondo membro della (10) significa proprio il secondo membro della (9) nel senso che la (9) mostra come va intesa l'*applicazione* della matrice al vettore (i termini della prima riga vanno moltiplicati per i rispettivi termini della colonna vettore e poi sommati per ottenere la prima componente del nuovo vettore ... analogamente per la seconda riga ...)

Vettori e matrici: in generale

In generale un *vettore n-dimensionale* è semplicemente un elenco di n numeri reali che vengono in genere rappresentati in colonna fra parentesi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix},$$

anche se in alcuni casi può essere più comodo rappresentarli in orizzontale, come vettore riga. In ogni caso è spesso comodo rappresentare il vettore con un unico simbolo compatto come $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{v}$ oppure $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{v}$, o anche $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$.

Analogamente, una *matrice* $m \times n$ è una tabella di numeri (detti *elementi* oppure *coefficienti* della matrice), organizzati su m righe e n colonne

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso si usano vari modi compatti per rappresentare una matrice attraverso i suoi elementi

$$((a_{ij})), \quad \{a_{ij}\}, \quad ||a_{ij}|| \qquad (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)$$

dove i è l'*indice di riga* e j è l'*indice di colonna*. Se poi non c'è bisogno di mostrare i coefficienti si usano semplicemente lettere in genere maiuscole (A, B, C ...).

In questa generalità, l'*applicazione* di una matrice ad un vettore si definisce come

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}x_i \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{mi}x_i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ossia, il vettore a sinistra (ad m componenti) è il risultato dell'applicazione della matrice (di tipo $m \times n$) al vettore a destra (ad n componenti).

L'operazione appena definita si configura come la definizione di una funzione definita sull'insieme dei vettori n-dimensionali con codominio l'insieme dei vettori m-dimensionali. Da un altro punto di vista possiamo associare ad una matrice una funzione di n variabili reali con m-valori reali. Precisamente se A è una matrice $m \times n$, possiamo considerare

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ i = 1, \ldots m.$$

Tale funzione viene detta funzione[2] lineare[3] associata alla matrice A.

Nel seguito incontreremo vari esempi. Ovviamente, questi oggetti sono interessanti dal punto di vista matematico solo perché ci definiamo sopra operazioni che poi hanno senso nel contesto applicativo.

[2] O anche applicazione

[3] Per motivi che si possono intuire, ma non discutiamo

Un'ultima osservazione finale: in fondo in fondo un vettore ad n componenti non è altro che una matrice $n \times 1$ ... anche se si continuano comunque a tener distinti i ruoli dei due oggetti per varie ragioni ... non solo applicative ...

La matrice di Leslie

Un esempio importante di modello di popolazione, impostato nel formalismo delle matrici, è quello in cui si tiene conto della *struttura di età* della popolazione. In questo modello, importante per la demografia, lo stato della popolazione è rappresentato dal vettore $\vec{N} \equiv (N^1, N^2, \cdots, N^A)$ le cui componenti forniscono il numero di individui della popolazione nella fascia di età i. La trasformazione dello stato da un anno all'altro è descritta tramite la matrice

$$L \equiv \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \cdots & \beta_{A-1} & \beta_A \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{A-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice molto particolare (*matrice di Leslie*) che trasforma il vettore $(N^1, N^2, \cdots, N^A)$ nel vettore $(\tilde{N}^1, \tilde{N}^2, \cdots, \tilde{N}^A)$ di componenti

$$\tilde{N}^1 = \sum_{i=1}^{i=A} \beta_i N^i \ , \quad \tilde{N}^i = s_{i-1} N^{i-1}$$

Infatti, i coefficienti β_i corrispondono alla fertilità della classe di età i e i nuovi nati vanno tutti contati nella classe $i = 1$ del nuovo stato. Gli s_i corrispondono invece alla probabilità di sopravvivenza della classe di età i nel suo passaggio alla classe di età $i + 1$.

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html