Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 22. 27 Novembre 2014

2 ore *(Matrici e vettori, rappresentazione geometrica, operazioni tra vettori e matrici)*

Lezione 23. 3 Dicembre 2014

2 ore *(Sistemi lineari)*

Lezione 24. 10 Dicembre 2014

2 ore *(La matrice inversa)*

Operazioni tra vettori

Fra i vettori possiamo definire alcune operazioni molto naturali. Anzitutto, se abbiamo due vettori della stessa lunghezza (stesso numero di componenti), possiamo sommarli termine a termine, ottenendo un altro vettore. Precisamente

$$\text{se} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \text{definiamo} \quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n + w_n \end{pmatrix}.$$

Nell'esempio considerato prima, se $\vec{v}^X = \begin{pmatrix} G^X \\ A^X \end{pmatrix}$ e $\vec{v}^Y = \begin{pmatrix} G^Y \\ A^Y \end{pmatrix}$ rappresentano rispettivamente la numerosità delle piante nelle zone X e Y, allora $\vec{v}^X + \vec{v}^Y$ rappresenta la numerosità totale.

Un'altra operazione naturale è moltiplicare un vettore per una costante, ottenendo un altro vettore. Precisamente

$$\text{se} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{definiamo} \quad c\vec{v} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ cv_n \end{pmatrix}.$$

Nel solito esempio, infatti, questa operazione si rende utile per passare dalla numerosità alla densità per avere delle quantità omogenee; per fare ciò dovremo dividere la numerosità per la superficie della zona S (ovvero moltiplicare per il reciproco). Quindi, invece di $\vec{v} = \begin{pmatrix} G \\ A \end{pmatrix}$ vorremmo considerare

$$\frac{1}{S}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S}G \\ \\ \frac{1}{S}A \end{pmatrix}.$$

Attenzione! Se per qualche motivo volessimo trasformare ad esempio il vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nel vettore $\begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$, con $a \neq b$, la trasformazione corretta sarebbe

$$\begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Interpretazione geometrica dei vettori

Abbiamo visto che l'oggetto matematico 'vettore', fissata la dimensione, si identifica con un set *ordinato* di numeri reali in numero pari alla dimensione stessa. Ogni esempio concreto in cui un oggetto si identifica con un set di numeri reali è dunque un 'vettore'. Se consideriamo i punti del piano cartesiano che appunto si identificano con le coppie ordinate di numeri che costituiscono le loro coordinate cartesiane, abbiamo vettori a due dimensioni. D'altra parte ogni vettore a due dimensioni $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ si può interpretare come il punto di coordinate (v_1, v_2) nel piano cartesiano. Questa visualizzazione geometrica è particolarmente comoda e costituisce un utile modello di *spazio vettoriale*.

Un'altra comoda rappresentazione consiste nell'interpretare un vettore come il segmento orientato (la *freccetta*) che congiunge l'origine $(0, 0)$ con il punto (v_1, v_2) (segmento orientato che si può anche pensare di spostare con un altro punto di partenza). Tale interpretazione si usa soprattutto in Fisica quando una forza, o una velocità etc ... vengono pensati come vettori.

In questa intepretazione, il prodotto del vettore $\vec{v}$ per il numero c consiste nell'allungamento (o accorciamento) del vettore per la costante c senza cambiarne la direzione (se c è negativo, viene mandato in senso opposto, sempre senza cambiarne la direzione nel senso della retta a cui appartiene). Invece la somma di due vettori si effettua con la *regola del parallelogramma*.

In questo contesto una matrice 2×2 può essere pensata come trasformazione che manda ogni vettore del piano in qualche altro vettore. Un esempio facile da visualizzare è quello delle matrici di rotazione

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

che manda (come si può facilmente verificare) il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$. Si vede quindi che tale matrice ruota ogni vettore di un angolo ϑ.

Notiamo poi che questa visualizzazione mette in luce l'esistenza di vettori 'privilegiati' (quelli corrispondenti agli assi coordinati) le cui componenti sono tutte nulle tranne una che è uguale a 1

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

Infatti, si ha

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + \cdots + x_n\vec{e}_n. \tag{1}$$

Linearità

Dopo aver definito le operazioni sui vettori, possiamo far notare che dati due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e i due coefficienti α e β, una qualsiasi matrice A verifica la seguente proprietà

$$A\left(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2\right) = \alpha A\vec{v}_1 + \beta A\vec{v}_2$$

Vediamo cioè che la matrice A definisce una funzione *lineare* sullo spazio vettoriale cui appartengono $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

In particolare, se consideriamo la rappresentazione (1) abbiamo

$$A\vec{v} = x_1 A\vec{e}_1 + x_2 A\vec{e}_2 + x_3 A\vec{e}_3 + \cdots + x_n A\vec{e}_n. \tag{2}$$

Dunque possiamo esprimere l'azione di una matrice su ciascun vettore tramite le componenti e i vettori $A\vec{e}_i$.

Operazioni tra matrici

Anche nell'ambito delle matrici possiamo definire facilmente operazioni algebriche come il prodotto per uno scalare e la somma. Abbiamo infatti rispettivamente:

$$\text{data la matrice} \quad A = ((a_{ij})) \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{definiamo} \quad cA = ((c\ a_{ij}));$$

e

$$\text{date le matrici} \quad A = ((a_{ij})) \quad \text{e} \quad B = ((b_{ij})) \quad , \qquad \text{definiamo} \quad A + B = ((a_{ij} + b_{ij})).$$

Ovviamente nella seconda definizione le matrici devono avere le stesse dimensioni.

L'utilità applicativa di queste operazioni è ovvia e risponde ad un *principio di sovrapposizione* secondo cui il risultato di azioni sovrapposte è la somma delle azioni stesse. Per definire il prodotto di due matrici consideriamo l'esempio della catena alimentare.

Vogliamo studiare come un inquinante si diffonde nella catena alimentare; supponiamo che ci siano due specie di alghe e che la concentrazione dell'inquinante nelle due specie sia descritta dal vettore $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$. Ci interessano due specie di crostacei che si nutrono di queste alghe e usiamo la matrice $A = ((a_{ij}))$ per descrivere quanto le specie di crostacei si nutrono delle alghe; precisamente a_{ij} rappresenta la *quantità media di alghe della specie j consumata da un crostaceo della specie i*[1]; abbiamo quindi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e, supponendo che l'inquinante si accumuli nei crostacei senza essere metabolizzato né escreto, indichiamo con $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ la sua concentrazione nelle due specie. Avremo dunque

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{pmatrix} = A\vec{p}$$

Supponiamo ora che le due specie di crostacei vengano mangiate da due specie di pesci secondo la matrice $B = ((b_{ki}))$, ossia b_{ki} rappresenta la *quantità media di crostacei della specie i consumata da un pesce della specie k* (per grammo). Avremo quindi che la concentrazione degli inquinanti nelle due specie di pesci, rappresentata da un vettore $\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$, sarà

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} b_{11}c_1 + b_{12}c_2 \\ b_{21}c_1 + b_{22}c_2 \end{pmatrix} = B\vec{c}\ .$$

e, mettendo le due relazioni insieme, si ha

$$\vec{\pi} = B\vec{c} = B(A\vec{p}).$$

E' quindi naturale definire un prodotto di matrici $B \cdot A$ in modo che valga anche $\vec{\pi} = (B \cdot A)\vec{p}$. Scrivendo le relazioni esplicitamente si ha, anzitutto per la prima specie

$$\begin{aligned} \pi_1 = b_{11}c_1 + b_{12}c_2 &= b_{11}(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + b_{12}(a_{21}p_1 + a_{22}p_2) \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})p_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})p_2. \end{aligned}$$

Allora la prima riga della matrice $B \cdot A$ deve essere

$$\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \end{pmatrix}.$$

[1] per grammo, se le concentrazioni sono misurate per grammo

Possiamo leggere questi elementi come il prodotto della prima riga di A per le tre colonne di B, dove il prodotto di una riga per una colonna si effettua (purché la riga sia lunga quanto la colonna) moltiplicando ogni elemento della riga per l'elemento alla stessa posizione della colonna e sommando i risultati.
Analogamente, la seconda riga della matrice $B \cdot A$ sarà composta dal prodotto della seconda riga di A per le due colonne di B e in definitiva

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

Notiamo che fin qui abbiamo avuto a che fare con matrici *quadrate*, ma lo stesso discorso si estende al caso generale. Ad esempio se nell'esempio precedente avessimo tre specie di crostacei, i vettori $\vec{p}$ e $\vec{\pi}$ sarebbero ancora a due dimensioni ma $\vec{c}$ avrebbe tre componenti. Corrispondentemente avremmo le matrici 3×2 e 2×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

e il prodotto 2×2 (notare la corrispondenza tra il numero di elementi di una riga col numero di quelli di una colonna)

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} \end{pmatrix}$$

In conclusione, dunque

> *Il prodotto $B \cdot A$ di una matrice B $(m \times n)$ per una matrice A $(n \times p)$ è una matrice $m \times p$ in cui il termine (i, k) si ottiene moltiplicando la riga i-esima di B per la colonna k-esima di A. In formula:*
>
> $$(B \cdot A)_{ik} = b_{i1}a_{1k} + b_{i2}a_{2k} + \cdots + b_{in}a_{nk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{jk}, \qquad i = 1, \ldots m, \ k = 1, \ldots p.$$

Con le operazioni appena introdotte abbiamo stabilito per le matrici un *sistema di calcolo* analogo a quello conosciuto per i numeri. In particolare, le due matrici

$$I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

corrispondono rispettivamente all'unità (*matrice identità*) e allo zero (*matrice nulla*) e sono tali che, qualunque sia la matrice A risulta

$$I \cdot A = A, \quad O \cdot A = O \ .$$

Le proprietà di questo calcolo sono anche analoghe, ma solo in parte ... infatti mentre valgono la proprietà *associativa*

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

e quella *distributiva*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

il prodotto non è commutativo. Anzitutto, infatti, se le matrici non sono quadrate e della stessa dimensione, anche se si può effettuare (perché le matrici sono delle giuste dimensioni) il prodotto $A \cdot B$, il prodotto $B \cdot A$ non si può nemmeno calcolare. Poi, anche se A e B sono matrici quadrate della stessa dimensione, in generale, risulta $A \cdot B \neq B \cdot A$. Un esempio per tutti, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

In fondo, ricordando che ad ogni matrice A $(n \times p)$ corrisponde una funzione (applicazione lineare) da $\mathbb{R}^p$ in $\mathbb{R}^n$, si ha che il prodotto $B \cdot A$ corrisponde alla composizione della funzione associata alla matrice A con la funzione associata alla matrice B. Abbiamo già visto che la composizione di due funzioni non è commutativa, anche quando sia possibile effettuarla in entrambi gli ordini.

In ogni caso per le matrici identità e nulla si ha

$$I \cdot A = A \cdot I = A, \quad O \cdot A = A \cdot O = O \ .$$

Ma notiamo che l'eguaglianza

$$A \cdot B = O$$

non implica, come nel caso dei numeri reali, che almeno uno dei due fattori sia nullo. La cosa si vede con l'esempio seguente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

per il quale si ha

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

e si vede anche che le due matrici *non commutano.*

Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots + \ldots + \ldots & = & \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

può essere scritto in forma matriciale

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{3}$$

dove A è la matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ è il vettore incognita e $\vec{b}$ è il vettore termine noto

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

In generale, la tecnica più efficiente oltre al metodo di sostituzione (certamente visto alle superiori) per risolvere questi sistemi è la riduzione a gradino di Gauss, che qui non discutiamo in dettaglio ma utilizziamo in alcuni esempi significativi

esempio 1

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Trasformiamolo (conservando tutte e sole le soluzioni) lasciando intatta la prima riga ed eliminando il primo termine da ogni riga successiva (otteniamo la seconda riga moltiplichiamo per 2 la prima riga e sottraendone la seconda ... la terza riga sottraendo la terza dalla prima ... la quarta ancora sottraendo la terza dalla prima ...)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ \quad +x_2 - x_3 + x_4 & = & 2 \\ \quad -x_2 + 0 - x_4 & = & 0 \\ \quad -2x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Ripetiamo l'operazione a partire dalla seconda riga

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ \quad +x_2 - x_3 + x_4 & = & 2 \\ \quad -x_3 + 0 & = & 2 \\ \quad -x_3 + x_4 & = & 4 \end{cases}$$

E poi ancora a partire dalla terza

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ \quad +x_2 - x_3 + x_4 & = & 2 \\ \quad -x_3 + 0 & = & 2 \\ \quad -x_4 & = & -2 \end{cases}$$

E quindi concludiamo a partire da dall'ultima riga $x_4 = 2$, risalendo fino alla prima, sostituendo man mano i valori ottenuti per arrivare a

$$x_4 = 2 \quad x_3 = -2 \quad x_2 = -2 \quad x_1 = 3 \ .$$

Notiamo che il procedimento avrebbe funzionato qualunque fosse il vettore noto $\vec{b}$. Dunque

Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} ,$$

il sistema (3) *ha una ed una sola soluzione qualunque sia il vettore* $\vec{b}$

esempio 2

Consideriamo ora

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Adottando lo stesso procedimento abbiamo al primo passaggio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ \quad +0 + 0 & = & 2 \\ \quad -x_2 - x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Dunque si arriva ad un assurdo e si conclude che il sistema non ha soluzioni. Cambiando però il vettore noto da $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ \quad +0 + 0 & = & 0 \\ \quad -x_2 - x_3 & = & 1 \end{cases}$$

e possiamo continuare operando sul sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ \quad -x_2 - x_3 & = & 1 \end{cases}$$

A questo punto, infatti, scegliendo un qualunque valore per x_3, diciamo $x_3 = c$, abbiamo

$$x_3 = c \quad x_2 = 1 + c \quad x_1 = 2$$

e quindi infinite soluzioni. Notiamo che un risultato analogo si sarebbe ottenuto con altri particolari vettori $\vec{b}$, come ad esempio

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

Concludiamo quindi che

Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ,$$

il sistema (3) *non ha soluzione per alcuni* $\vec{b}$*, infinite soluzioni per alcuni altri* $\vec{b}$*.*

esempio 3

Consideriamo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 & = & 2 \\ x_1 + 7x_2 & = & 1 \end{cases}$$

Questa volta abbiamo più equazioni che incognite e, scegliendo come primo passo un sottosistema con tante equazioni quante incognite, ricadiamo nei casi degli esempi precedenti. Nel nostro caso, scegliendo le prime due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 & = & 2 \end{cases}$$

che si può risolvere ottenendo $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Il problema a questo punto è la terza equazione che non è soddisfatta, per cui il sistema non ha soluzione. Diverso sarebbe stato se l'ultima equazione fosse stata

$$x_1 + 7x_2 = 4.$$

Aggiungiamo che anche il sistema ridotto, come abbiamo visto negli esempi precedenti, avrebbe potuto non avere soluzioni o averne infinite, per cui concludiamo che

Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} ,$$

il sistema (3) *ha soluzioni solo per alcuni* $\vec{b}$*.*

esempio 4

Consideriamo infine il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Qui si capisce che la prima cosa da fare è assegnari valori arbitrari ad una delle incognite per ridurre il sistema ad un caso 'quadrato'. Scegliendo dunque $x_3 = c$ ci riduciamo a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 - c \\ 2x_1 + x_2 & = & 4 - c \end{cases}$$

e poi procedendo come nell'esempio 1 si arriva a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 - c \\ x_2 & = & -(2+c) \end{cases}$$

e quindi si trovano le infinite soluzioni

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -(2+c)$$

Notiamo che la possibilit di giungere a buon fine è in questo caso legata alla possibilità di risolvere il sistema ridotto per ogni scelta del vettore noto. Nel caso seguente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

invece (provare per credere) il sistema non ha soluzioni.

Ricapitolando

Nella lezione precedente abbiamo discusso la risoluzione di vari sistemi lineari. In generale ci interessa l'equazione in forma matriciale

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4}$$

dove A è la matrice dei coefficienti del sistema, $\vec{b}$ è il vettore termine noto, e $\vec{x}$ è il vettore incognita. L'esistenza e unicità della soluzione di (4), al variare di $\vec{b}$ corrisponde a determinare iniettività e surgettività della funzione lineare individuata dalla matrice

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Una sintesi di quanto ottenuto attraverso gli esempi può essere espressa come segue

- se $m = n$ è possibile che il sistema (4) abbia un'unica soluzione per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Altrimenti può succedere che il sistema non abbia soluzione per alcuni $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ e infinite soluzioni per altri $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
- se $m > n$ il sistema non può avere soluzione per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
- se $m < n$ il sistema può avere o infinite o nessuna soluzione, a seconda della matrice A e del vettore $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Guardando in particolare sistemi 2×2 si nota che trovare una soluzione di un sistema corrisponde geometricamente a trovare i punti di intersezione fra due rette. La soluzione quindi esisterà e sarà unica a meno che le due rette siano parallele; se esse sono parallele, in genere non si avrà soluzione, a meno che esse siano coincidenti, nel qual caso ci saranno infinite soluzioni (tutti i punti della retta).

Scrivendo tutto ciò in termini di una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

quanto detto si può riassumere così

> *se $ad - bc \neq 0$, il sistema (4) ha un'unica soluzione per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$; altrimenti ha infinite soluzioni per qualche vettore $\vec{b}$ e nessuna per tutti gli altri $\vec{b}$.*

Il numero $ad - bc$ che determina se il sistema ha soluzione unica viene detto *determinante* della matrice A e si indica con

$$\det(A) \quad \text{oppure con} \quad |A|$$

E' possibile definire il determinante di A per ogni matrice quadrata A $n \times n$, ed estendere il risultato precedente a qualunque dimensione

> *Il sistema (4) ha un'unica soluzione per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $det(A) \neq 0$.*

Ci sono molte regole pratiche per calcolare il determinante di una matrice. Il modo seguente si può svolgere a partire da una qualunque riga o colonna e consiste nel ridurre via via la dimensione del determinante ... Infatti, data una matrice $n \times n$, scegliendo la prima riga, se in corrispondenza di un determinato elemento $a_{1,j}$ cancelliamo la riga stessa e la colonna cui l'elemento appartiene si ottiene una matrice $(n-1) \times (n-1)$ il cui determinante viene indicato con $D_{1,j}$ ... dopo di che si ha

$$\det A = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{1+j} a_{1,j} D_{1,j}$$

Lo stesso risultato si ottiene scegliendo una qualunque riga o colonna intendendo con $D_{i,j}$ il determinante della matrice che si ottiene cancellando la riga e la colonna cui appartiene l'elemento $a_{i,j}$. Dunque, scegliendo la riga i-esima

$$\det A = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j} \ ,$$

e la colonna j-sima

$$\det A = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j} \ .$$

Matrice inversa

Abbiamo visto che ad una matrice A, di dimensioni $m \times n$ corrisponde una funzione (applicazione lineare) da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Possiamo domandarci quando questa funzione sia invertibile. Ricordando la definizione di funzione invertibile, questo corrisponde a richiedere che il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ abbia un'unica soluzione per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Come visto, ciò è possibile se e solo se $m = n$ e la matrice A ha determinante diverso da 0.

Ricordando la corrispondenza fra matrici e applicazioni lineari, chiedersi se la funzione è invertibile equivale a domandarsi se esista una matrice B tale che

$$(B \cdot A)\vec{v} = \vec{v} \quad \text{per ogni} \quad \vec{v} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \ .$$

una matrice cioè tale che

$$(B \cdot A) = I \ .$$

Se A è una matrice quadrata, anche B deve essere quadrata e $(B \cdot A) = I$ equivale a $(A \cdot B) = I$, ossia B è sia l'inversa destra che quella sinistra. Tale matrice viene detta *matrice inversa* di A e si scrive A^{-1}. Da quanto detto a proposito dei sistemi, si capisce che

Una matrice A, di dimensione $n \times n$ è invertibile se e solo se det $A \neq 0$.

Nel caso di una matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

possiamo calcolare facilmente l'espressione della matrice inversa risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= \alpha \\ cx + dy &= \beta \end{aligned}$$

Infatti si ottiene

$$x = \frac{1}{\det A} \left(d\alpha - b\beta \right),$$

$$y = \frac{1}{\det A} \left(-c\alpha + a\beta \right).$$

da cui

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e si vede anche dove gioca il fatto che det $A \neq 0$.

Non diamo regole esplicite per il calcolo di A^{-1} per $n > 3$, comunque, come si suggerisce negli esercizi 26.3 e 26.4, è sufficiente trovare le soluzioni dei sistemi

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \dots \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e comporre una matrice le cui colonne sono i vettori soluzioni.

ESERCIZI

ESERCIZIO 24.1 Scrivere il vettore colonna

$$\begin{pmatrix} 3x + 2y + z \\ 5x + 3y + z \end{pmatrix}$$

come prodotto di una matrice 2×3, A, con un vettore di dimensione 3, v.

ESERCIZIO 24.2 Date

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

mostrare che $AB = I$ dove $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice identità. Calcolare poi la matrice BA.

ESERCIZIO 24.3 Trovare i valori di x e y per cui vale

$$\begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & -23 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 24.4 Disegnare sul piano cartesiano i tre vettori

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Trovare $u + v + w$ sia algebricamente che geometricamente.

ESERCIZIO 24.5 Dati

$$u = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

disegnare $u + v$ e $u - v$. Disegnare poi i vettori $-u$, $-v$, $\frac{1}{2}u$ e $-\frac{3}{5}v$.

ESERCIZIO 24.6 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Che tipo di trasformazioni rappresentano A e B? Disegnare sul piano cartesiano e calcolare algebricamente ABv e BAv.

ESERCIZIO 24.7 Calcolare come agiscono le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sui vettori

$$u = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

nei casi in cui ciò sia possibile.

ESERCIZIO 24.8 Supponiamo che la matrice A trasformi il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Scrivere la matrice A.

ESERCIZIO 24.9 Per studiare quanto tre specie di crostacei consumino due specie di alghe, 1 e 2 uno scienziato compie due esperimenti.

Prima introduce nell'ambiente un isotopo radioattivo del silicio[2] e vede che esso viene assorbito solo dalla specie 1: la concentrazione di questo isotopo nelle due specie di alghe risulta uguale a $2,3 \cdot 10^{-9} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dopo qualche tempo la concentrazione dello stesso isotopo nelle tre specie di crostacei è descritta dal vettore $10^{-8} \begin{pmatrix} 4.1 \\ 0.06 \\ 0.92 \end{pmatrix}$.

Nel secondo esperimento, introduce un isotopo radioattivo del fosforo e trova che la concentrazione di questo isotopo nelle due specie di alghe risulta uguale a $1,2 \cdot 10^{-11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Misurando, dopo qualche tempo la concentrazione di questo isotopo nelle tre specie di crostacei ottiene il vettore $10^{-10} \begin{pmatrix} 2.9 \\ 1.6 \\ 2.6 \end{pmatrix}$.

Supponendo che questi isotopi si accumulino nei crostacei, costruire la matrice A i cui termini a_{ij} rappresentano la quantità di alghe della specie j consumate in media da un crostaceo della specie i (e standardizzate per unità di peso).

ESERCIZIO 24.10

a) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che $B = A^{-1}$ ovvero $A = B^{-1}$.

b) Utilizzate il punto precedente per risolvere il sistema[3]

$$\begin{cases} 4x & - & 2y & = & 3 \\ -5x & + & 3y & = & 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 24.11 Sia $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Considerare la matrice trasposta di A, detta A^t, quella che si ottiene scambiando le righe con le colonne, ossia in questo caso $A^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Mostrare che, in questo caso, si ha $A^{-1} = A^t$. Mostrare che A è una matrice di rotazione, come descritta a lezione.

[2] supponendo ne esista uno...

[3] non è consentito utilizzare altri metodi

ESERCIZIO 24.12 Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, trovare il vettore $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tale che $Au = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trovare poi il vettore v tale che $Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considerare la matrice (2×2) B le cui colonne sono composte dai vettori u e v; mostrare che si ha $A \cdot B = B \cdot A = I$.

ESERCIZIO 24.13 Considerate la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(una matrice con questa distribuzione di 0 viene detta triangolare superiore).

Calcolando successivamente, come nell'esercizio precedente, i vettori u, v e w tali che $Au = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, trovare la matrice A^{-1}.

ESERCIZIO 24.14 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{5} & -\frac{22}{5} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{14}{23} & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che si ha $B \cdot A = I$, ma $A \cdot B \neq I$. Questo fatto è in contraddizione con quanto affermato a lezione che $A \cdot B = I$ implica $B \cdot A = I$?

ESERCIZIO 24.15 Trovate la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 24.16 In un allevamento di conigli, gli animali (femmine) vengono distinti in tre fasce di età (neonate, giovani e adulte) e il passaggio da una fase all'altra richiede un mese. Il vettore (di 3 componenti) N_t rappresenta la popolazione (in migliaia) di coniglie al tempo t, calcolato in mesi; per la precisione, le tre componenti di N_t rappresentano (in migliaia) neonate, giovani e adulte. L'evoluzione della popolazione viene descritta dalla legge

$$N_{t+1} = AN_t \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

(a) Interpretare dal punto di vista biologico tutti gli elementi della matrice A.

(b) Siano le componenti di N_0 $(8, 6, 20)$; calcolare N_1 e N_2.

(c) Scrivere la matrice A_2 che permette il passaggio da N_t a N_{t+2}, ossia tale che $N_{t+2} = A_2 N_t$.

(d) Trovare il vettore N_0 tale che N_1 sia uguale a $(0, 1, 0)$ oppure a $(0, 0, 1)$ (non sempre il risultato è sensato biologicamente).

ESERCIZIO 24.17 In un allevamento di galline ovaiole, gli animali vengono distinti in tre fasce di età (pulcini, giovani e adulte) e il passaggio da una fase all'altra richiede almeno un mese. Il vettore (di 3 componenti) N_t rappresenta la popolazione (in migliaia) di galline al tempo t, calcolato in mesi; per la precisione, le tre componenti di N_t rappresentano (in migliaia) pulcini, giovani e adulte. L'evoluzione della popolazione viene descritta dalla legge

$$N_{t+1} = AN_t \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/8 & 0 \\ 0 & 3/4 & 8/9 \end{pmatrix}.$$

(a) Interpretare dal punto di vista biologico tutti gli elementi della matrice A. [Notare che non si hanno nascite; l'introduzione di nuovi animali avviene solo per acquisto dall'esterno e non è rappresentata nel modello].

(b) Siano le componenti di N_0 $(1, 1, 1)$; calcolare N_1 e N_2.

(c) Scrivere la matrice A_2 che permette il passaggio da N_t a N_{t+2}, ossia tale che $N_{t+2} = A_2 N_t$.

(d) Supponiamo di cominciare l'allevamento al tempo 0 con x pulcini e y giovani. Vogliamo determinare x e y in modo tale che al tempo 2 vi siano 10 giovani e 100 adulte (in migliaia): scrivere le equazioni che si ottengono, scrivere il sistema usando il linguaggio delle matrici e trovarne le soluzioni.

(e) Supponiamo che ogni mese si introducano 2.000 pulcini dall'esterno. Descrivere il modello risultante nel linguaggio di matrici e vettori. Trovare se esista uno stato stazionario, ovvero un vettore $\bar{N}$ tale che se $N_t = \bar{N}$ anche $N_{t+1} = \bar{N}$.

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html