**Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15**
**Corso di Matematica e Statistica I**

# Lezione 3. 22 Settembre 2014

*1 ora* *(Funzioni elementari classiche)*

## Funzioni elementari classiche

*Funzioni lineari*

Le funzioni lineari hanno la forma

$$f(x) = mx + q, \quad D = \mathbb{R} \tag{1}$$

e sono caratterizzate dalla proprietà di avere il rapporto incrementale

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

costante, al variare di $x_1$ e $x_2$ in $\mathbb{R}$.

Il grafico di una funzione lineare è una retta di cui $m$ è il *coefficiente angolare* e $q$ l'*intercetta all'origine*. L'equazione cartesiana della retta

$$ax + by + c = 0$$

include anche le rette parallele all'asse delle ordinate che invece non sono rappresentate dalla (1). Ma questo è un fatto naturale, perché una retta parallela all'asse delle ordinate non è il grafico di una funzione.

Sappiamo che se $\alpha$ è l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse allora

$$m = \tan \alpha.$$

Dunque, se $m > 0$ oppure $m < 0$, la funzione (1) è rispettivamente crescente oppure decrescente.

Fissato il coefficiente angolare $m$ e il valore della funzione in un punto $y_1 = f(x_1)$, la funzione lineare corrispondente ha la forma

$$f(x) = y_1 + m(x - x_1) \ .$$

Fissato il valore della funzione in due punti $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ la funzione ha la forma

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ .$$

*L'esponenziale e il logaritmo*

La funzione esponenziale si presenta nella descrizione di numerosi fenomeni come, ad esempio, la crescita (per duplicazione) di una popolazione di batteri, o la crescita malthusiana di una popolazione umana.

Consideriamo anzitutto la funzione

$$f(x) = a^x \tag{2}$$

con $a > 0$. Precisiamo il dominio $D_f = \mathbb{R}$ e l'immagine $f(D_f) = (0, +\infty)$. In Figura 1 è tracciato il grafico qualitativo della funzione esponenziale nei due casi $0 < a < 1$ e $a > 1$. Sappiamo che nei due casi la funzione è rispettivamente *decrescente* e *crescente*.

Ricordiamo alcune proprietà delle potenze, che possono intervenire nel calcolo:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

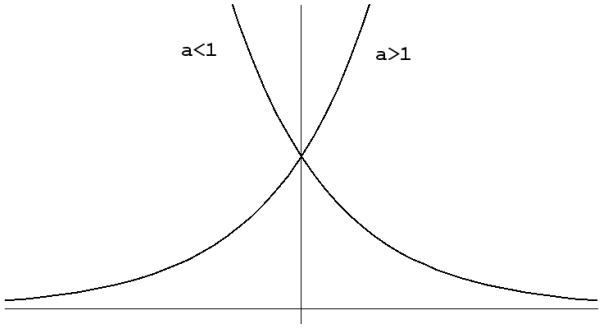


Figura 1: il grafico dell'esponenziale nei due casi $0 < a < 1$ e $a > 1$

Poiché (nel caso $a > 1$) la funzione (2) è crescente, quindi iniettiva, possiamo considerare la funzione inversa che associa ad $y$ la soluzione dell'equazione $y = a^x$. Dunque, poiché

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y,$$

otteniamo la funzione logaritmo

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \qquad D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\ \}, \quad f^{-1}(D_{f^{-1}}) = \mathbb{R}.$$

A partire dal grafico dell'esponenziale, con una simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$, possiamo tracciare il grafico di $f(x) = log_a x$ (vedi Figura 2)

Per la definizione stessa di logaritmo, abbiamo le seguenti idenitità

$$x = a^{\log_a x}, \quad x = log_a(a^x),$$

e le proprietà , buone per il calcolo,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^p = p \cdot \log_a x, \quad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}.$$

L'ultima proprietà è anche nota come *formula del cambiamento di base*. Le basi maggiormente utilizzate sono la base 10 e il *numero di Nepero* che indichiamo con $e$[1]. Il logaritmo in base $e$ è anche detto *logaritmo naturale* e si indica anche con $\log x$, oppure con $\ln x$, mentre la funzione esponenziale in base $e$ si denota anche con $\exp(x)$.

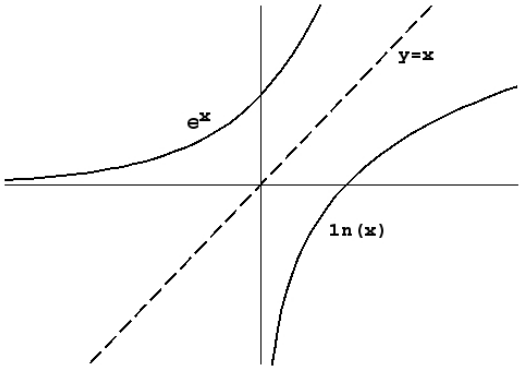


Figura 2: Il grafico dell'esponenziale nel caso $a > 1$ e quello del logaritmo

[1] $e = 2,718\cdots$ è un numero irrazionale che incontreremo presto

# ESERCIZI

**ESERCIZIO 3.1**

- Determinare quali delle seguenti terne di punti giacciono sulla stessa retta
  1. $A = (-3, 1)$, $B = (1, 2)$ e $C = (4, -1)$;
  2. $A = (-1, -2)$, $B = (1, 4)$ e $C = (5, 16)$;
  3. $A = (0, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (2, -1)$;
  4. $A = (-3, 0)$, $B = (0, 3)$ e $C = (1, 4)$;
  5. $A = (-3, 2)$, $B = (1, 7)$ e $C = (4, -1)$;
  6. $A = (-1, 4)$, $B = (0, 1)$ e $C = (1, -2)$;
  7. $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$ e $C = (4, 2)$;
- nei casi positivi al punto precedente determinare la corrispondente funzione lineare;
- determinare in quali casi la funzione lineare è crescente.

**ESERCIZIO 3.2** Determinare la funzione lineare $f(x)$ tale che

- $f(1) = 2$ e il grafico forma un angolo di $45°$ con l'asse x.
- $f(1) = 2$ e il grafico non interseca l'asse x.
- $f(x)$ è pari e $f(0) = 1$
- $f(x)$ è dispari e $f(1) = 2$
- $f^{-1}(x) = 2x + 1$

**ESERCIZIO 3.3** Sia $r$ la retta passante per i punti $A = (2, 1)$ e $B = (-1, -1)$. Determinare $x$ tale che il punto $C$ di coordinate $(x, 3)$ giaccia sulla retta $r$.

**ESERCIZIO 3.4** Data la funzione esponenziale $f(x) = aq^x$, trovare l'incremento

$$\Delta y = f(x + 1) - f(x)$$

e mostrare che è anch'esso esponenziale.

**ESERCIZIO 3.5** Quale grafico in Figura 3 rappresenta la funzione $f(x) = 2^{x+2}$?

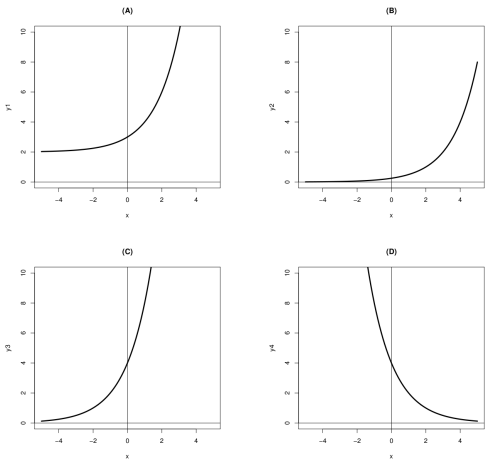


Figura 3: Grafici delle funzioni dell'esercizio .

**ESERCIZIO 3.6** Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $\exists\, a$ t.c. $2^a = 0$

(B) $\exists\, a$ t.c. $2^a = -4$

(C) $\exists\, a$ t.c. $-2^{-a} = 8$

(D) $\exists\, a$ t.c. $2^{-a} = \sqrt{5}$

**ESERCIZIO 3.7** Indicare quali delle seguenti uguaglianze sono corrette:

(A) $\log_4 8 = 2$

(B) $\log_9 \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

(C) $\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

(D) $\log_{10} 0.1 = -1$

**ESERCIZIO 3.8** Sapendo che $\log_{10} 32 = \alpha$, determinare il valore di $\log_{10} 320000$.

**ESERCIZIO 3.9** Sapendo che $\log_3 \alpha = \frac{19}{4}$, quale delle seguenti stime è vera?

(A) $81 < \alpha < 100$

(B) $100 < \alpha < 160$

(C) $160 < \alpha < 343$

**ESERCIZIO 3.10** I dati sul Walleye (un pesce della specie perca) raccolti in Ontario ci dicono che questi pesci, nel corso della loro vita, crescono sempre più lentamente ma senza mai fermarsi. La dimensione dei pesci nel tempo $L(t)$ è descritta dalla funzione

$$L(t) = 72.0\left(1 - e^{-0.09t}\right).$$

(a) Calcolare L(0) ed interpretare il dato iniziale (cosa indica t = 0 in questo caso?).

(b) Calcolare il limite a cui tende $L(t)$ per $t \to +\infty$ e convincersi che il grafico di $L(t)$ riportato in Figura 1 è corretto.

(c) Supponendo che il Walleye cominci a riprodursi quando ha raggiunto una lunghezza di circa 45 $cm$, calcolare l'età alla quale questa specie diventa adulta.

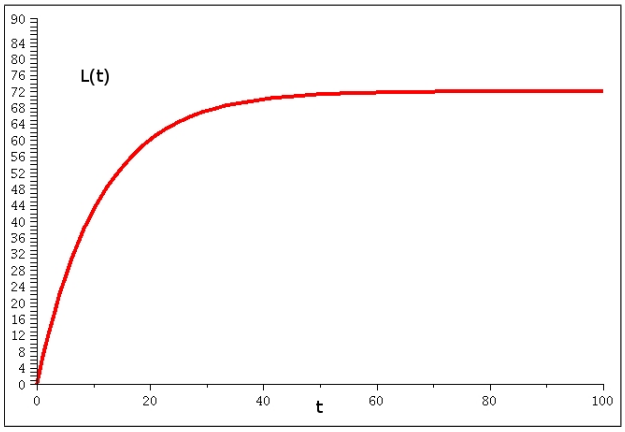


Figura 4: La crescita del Walleye

*Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo*
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html