Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 4. 24 Settembre 2014

2 ore (... *continua dalla lezione precedente su* **funzioni elementari classiche** ...)

Funzioni quadratiche

Le funzioni quadratiche corrispondono alla forma analitica

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad D = \mathbb{R} \tag{1}$$

ed il loro grafico è una parabola con asse verticale.

Nel caso più semplice

$$f(x) = ax^2 \tag{2}$$

il grafico è mostrato in Figura 1 dove si vede che è rivolto verso l'alto o verso il basso a seconda che il coefficiente a sia rispettivamente positivo o negativo. Inoltre si vede come al crescere di $|a|$ il

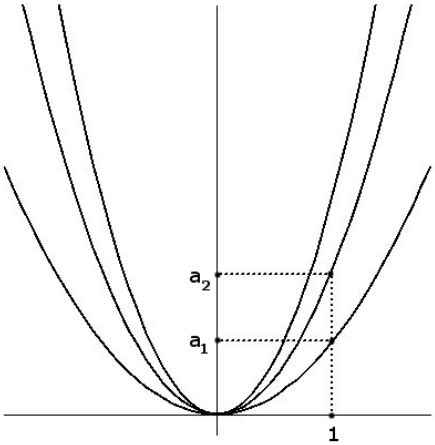

Figura 1: Il grafico della funzione $f(x) = ax^2$ nel caso $a > 0$ e per vari valori di a. Nella figura $a_1 < a_2$ e si vede che il grafico si 'stringe' quando a cresce. Il caso $a < 0$ si ottiene ovviamente ribaltando il grafico rispetto all'asse delle x.

grafico si 'stringe'. Dunque il parametro a ha un ruolo ben preciso nella configurazione del grafico. Nel caso $a > 0$ le seguenti proprietà della (2) sono immediate e facilmente verificabili

1. $f(x)$ è pari
2. $f(x)$ è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0]$ e crescente in $[0, +\infty)$;
3. $f(x)$ ha minimo $m = 0$ nel punto $x_m = 0$;
4. $f(x)$ è convessa.

La (1) e la (2) si riferiscono alle definizioni già date, mentre la (3) si riferisce alla definizione

- La funzione $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha un *minimo* (*massimo*) nel punto $x_m \in D$ ($x_M \in D$) se risulta

  $$f(x_m) \leq f(x), \quad \textit{per ogni} \quad x \in D \qquad (f(x_M) \geq f(x), \quad \textit{per ogni} \quad x \in D)$$

  il punto x_m (x_M) si dice *punto di minimo* (*punto di massimo*) e il valore $f(x_m)$ ($f(x_M)$) si dice *minimo* (*massimo*) della funzione.

Invece, per ciò che riguarda la (4), abbiamo la seguente definizione

- La funzione $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se scelti comunque x_1 e x_2 in D e $\alpha \in [0,1]$ risulta

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Il significato geometrico della definizione è illustrato in Figura 2 dove si vede che il grafico della funzione relativo all'intervallo $[x_1, x_2]$ giace sotto il segmento che unisce i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Per verificare analiticamente questa proprietà nel caso della (2) basta un piccolo calcolo basato sulla

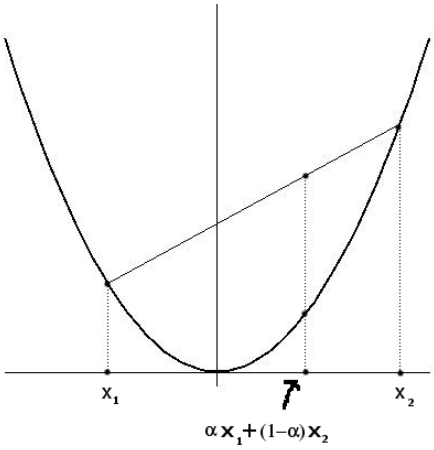

Figura 2: Convessità della funzione $f(x) = ax^2$.

maggiorazione

$$x_1 \cdot x_2 \leq \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2]^2 &= \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1 x_2 \\ &\leq \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 + \alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2) = \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2.\end{aligned}$$

Le proprietà possedute dalla (2) di trasformano facilmente quando si passi alla forma completa (1). Infatti l'effetto degli altri coefficienti consiste solo in una traslazione del grafico come di può vedere eseguendo tale traslazione di una quantità T orizzontalmente e di una quantità q verticalmente. Infatti si ha

$$f(x) = a(x-T)^2 + q = ax^2 - 2aTx + T^2 + q$$

da cui si trae la relazione tra i due parametri T e q (le coordinate del vertice della parabola) e i coefficienti a, b, c che compaiono nella forma (1)

$$T = -\frac{b}{2a}, \qquad q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Dunque, nel caso generale (1) a partire dalle proprietà di (2), si ha che, se $a > 0$, la funzione $f(x)$

1. $f(x)$ è simmetrica rispetto all'asse $x = T$;
2. $f(x)$ è decrescente nell'intervallo $(-\infty, T]$ e crescente in $[T, +\infty)$;
3. $f(x)$ ha minimo $m = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ nel punto $x_m = -\dfrac{b}{2a}$;
4. $f(x)$ è convessa.

Così come per due punti passa una ed una sola retta, per tre punti non allineati passa una ed una sola parabola. Il problema di trovare i coefficienti della funzione quadratica corrispondente porta alla risoluzione di un sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite a, b e c. Infatti, assegnati i punti x_1, x_2, x_3 e i corrispondenti valori della funzione $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ abbiamo le tre condizioni

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$$

che costituiscono appunto un sistema sui coefficienti a, b e c. Il modo più semplice per risolvere questo sistema consiste nel trasformare le equazioni sostituendole con forme equivalenti ridotte. Nel nostro caso sostituiamo le due ultime equazioni con la differenza di ciascuna con la prima equazione, in modo da eliminare l'incognita c. Si arriva infatti a

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1 \end{cases}$$

e poi, semplificando,

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ a(x_2 + x_1) + b = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a(x_3 + x_1) + b = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \end{cases}$$

in modo da eliminare anche b dalle ultime due equazioni e trovare a

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right). \tag{3}$$

Trovato a si calcola b attraverso una delle due ultime equazioni e infine sostituendo nella prima equazione si trova c.

Notiamo che l'espressione (3) che fornisce il coefficiente a ha sempre senso perché x_1, x_2, x_3 sono diversi tra loro. Nel caso particolare di punti allineati, poiché

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

l'espressione ha sempre senso e risulta $a = 0$. In questo caso si ottiene una funzione lineare.

Funzioni potenza

Ci occupiamo ora delle funzioni della forma

$$f(x) = ax^\alpha$$

dove a e α sono numeri reali. Per fissare le idee ci riferiamo al caso $a = 1$. Il *dominio naturale* della funzione dipende dall'esponente α ma in ogni caso la funzione può essere definita in $(0, +\infty)$. Nel caso particolare di $\alpha = m$ intero positivo abbiamo $D = \mathbb{R}$ e la funzione è *pari* oppure *dispari* a seconda che m sia rispettivamente pari o dispari. La situazione è mostrata nel grafico di Figura 3.

Nel caso $\alpha = \dfrac{1}{m}$ con m intero positivo la funzione può essere vista come *inversa* della funzione $f(x) = x^m$ e in suo dominio sarà $D = \mathbb{R}$ oppure $D = [0, +\infty)$ a seconda che sia rispettivamente m dispari oppure m pari. Il grafico è indicato in Figura 4. Quando $\alpha > 0$ non è razionale abbiamo come dominio naturale l'intervallo $[0, +\infty)$.

Nel caso, poi, di esponente $\alpha < 0$, il dominio naturale della funzione $f(x) = x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-|\alpha|}}$ non contiene il punto $x = 0$. I due casi paricolari $\alpha = -1$ e $\alpha = -2$ sono illustrati in Figura 5 dove si vede che si ha rispettivamente

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty. \tag{4}$$

Ciò si esprime dicendo che in $x = 0$ la funzione possiede un *asintoto verticale*.

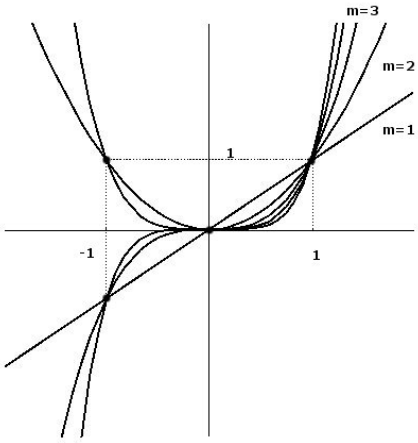

Figura 3: La funzione $f(x) = x^m$ con m intero positivo, per vari valori di m.

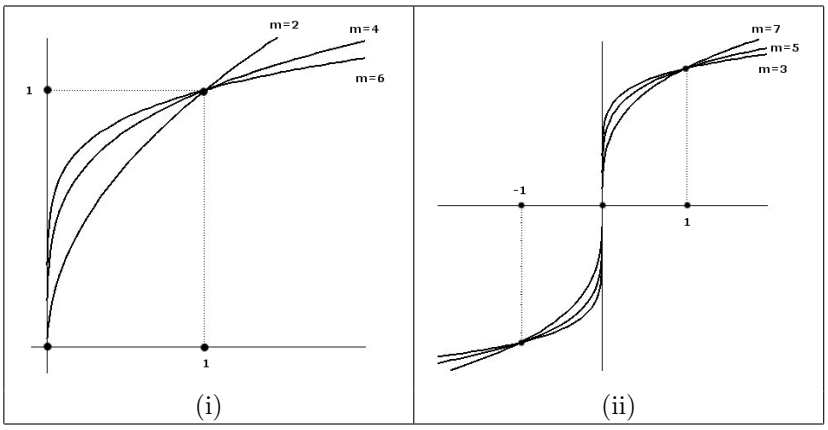

Figura 4: Grafici della funzione $f(x) = x^{\frac{1}{m}}$: (i) m pari, (ii) m dispari.

D'altra parte in entrambi i casi abbiamo anche

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \tag{5}$$

e ciò si esprime dicendo che la retta $y = 0$ è un *asintoto orizzontale*.

Il concetto di limite espresso in (4) e in (5) è per ora inteso in senso intuitivo e verrà precisato in seguito.

Polinomi

Per ampliare la nostra rassegna di *funzioni elementari* consideriamo ora i *polinomi* che estendono la classe delle funzioni quadratiche a espressioni algebriche di grado qualunque e si possono esprimere in una forma generale attraverso i *coefficienti* $a_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

Il grafico di un polinomio, presenta un certo numero di *variazioni di concavità* . Il caso della parabola infatti si riferisce ad una concavità precisa mentre, come si vede dai grafici in Figura 6 le variazioni di concavità possono essere molteplici. Altro modo di descrivere il grafico è quello di elencare *massimi e minimi locali* secondo la definizione seguente

> *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha un massimo (minimo) locale nel punto x_0 se esiste un intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che*
>
> $$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \qquad \textit{per} \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

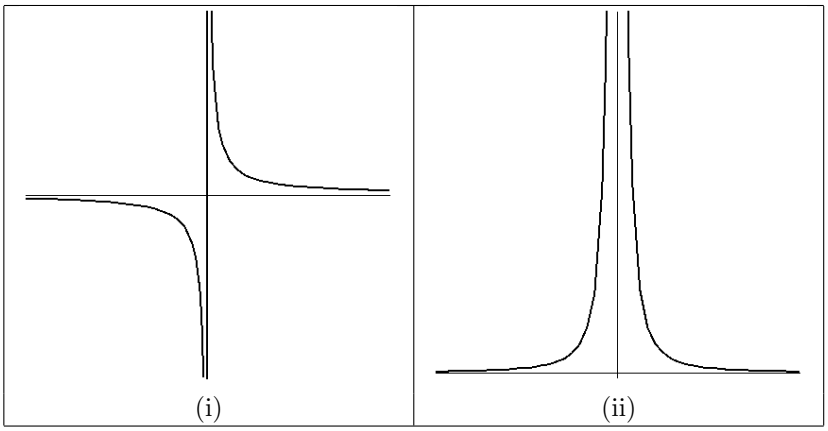

Figura 5: Grafici della funzione $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha < 0$: (i) $\alpha = -1$, (ii) $\alpha = -2$.

La chiave di questa descrizione si trova nell'espressione di $P(x)$ attraverso i suoi zeri ossia attraverso le radici dell'equazione $P(x) = 0$. La rappresentazione più comoda è quella che utilizza i numeri

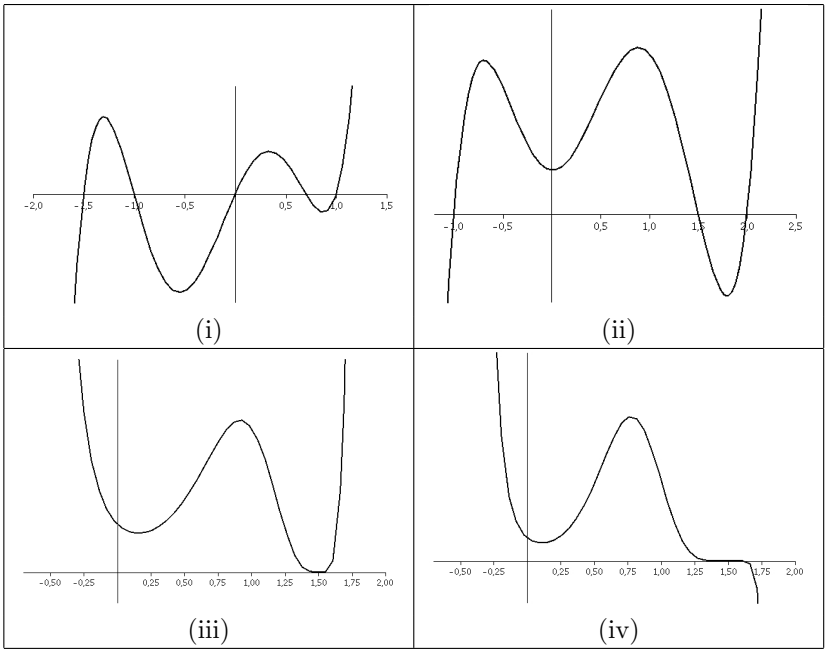

Figura 6: Grafici di alcuni polinomi: (i) il caso di tutte radici reali $P(x) = x(x+1)(x+1.5)(x-1)(x-0.7)$, (ii) il caso di 3 radici reali e due complesse coniugate $P(x) = 0.5(x^2+0.1)(1.5-x)(x+1)(2-x)$, (iii) il caso di molteplicità maggiore di 1 $P(x) = (x^2+0.5)^5(1.5-x)^4$, (iv) il caso di una radice reale con molteplicità dispari $P(x) = (x^2+0.2)^5(1.5-x)^7$.

complessi per esprimere le radici, comunque se

$$\alpha_i, \quad i = 1, \cdots k$$

sono tutte le radici reali ($k \leq n$), il polinomio si esprime come

$$P(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}\left(x^2+\gamma_1 x+\omega_1\right)^{p_1}\cdots\left(x^2+\gamma_h x+\omega_h\right)^{p_h}$$

dove i termini quadratici hanno tutti un discriminante negativo (e corrispondono a coppie di radici complesse coniugate)

$$\Delta_i = \gamma_i^2 - 4\omega_i < 0$$

e quindi non si annullano, ma sono responsabili di massimi e minimi locali o di inflessioni del grafico. Gli esponenti m_i e p_i sono le *molteplicità* e soddisfano

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k + 2\,(p_1 + p_2 + \cdots + p_h) = n.$$

In Figura 6 si passano in rassegna alcuni casi significativi.

ESERCIZI

ESERCIZIO 4.1 Trova l'espressione esplicita delle funzioni quadratiche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano

(a) $f(0) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(4) = 0;$

(b) $f(-1) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(3) = 0;$

(c) $f(2) = -1, \quad f(0) = 2$, e ha massimo in $x_M = 0$;

(c) $f(0) = -1, \quad f(1) = 2$, ed $f(x)$ è una funzione pari.

ESERCIZIO 4.2 Vogliamo recintare un campo rettangolare usando 900 m di filo spinato. Che dimensioni deve avere il campo perché abbia area massima? Quanto misura quest'area?
Come si modifica il risultato se possiamo usare su un lato una lunga siepe (per cui devi utilizzare il filo spinato solo per gli altri tre lati)?

ESERCIZIO 4.3 In una colonia di uccelli il numero di piccoli che sopravvivono dipende dalla densità dei nidi nella colonia. Se i nidi sono troppo lontani, i predatori possono catturare i piccoli con maggiore facilità ; se invece sono troppo vicini, il cibo potrebbe scarseggiare e i piccoli potrebbero perdersi o essere uccisi da altri adulti. Una possibile relazione fra il numero N di piccoli che sopravvivono e la densità μ dei nidi è data da

$$N = a\mu(b - \mu)\ , \text{ per opportune costanti } a \text{ e } b.$$

Trova la densità ottimale dei nidi

(a) se $a = 300$ e $b = 6$;

(b) per a e b qualsiasi (esprimendola in funzione di a e b).

ESERCIZIO 4.4 L'energia potenziale di una massa m sospesa a una molla di costante elastica k, è data da $U = \dfrac{kz^2}{2} + mgz$, cioè dall'energia potenziale della molla $\dfrac{kz^2}{2}$ sommata all'energia potenziale gravitazionale mgz, dove z è la quota della massa, assumendo $z = 0$ nel punto in cui la molla ha estensione nulla e g è la costante di accelerazione gravitazionale. Trovare il minimo di $U(z)$.

ESERCIZIO 4.5 Data la funzione quadratica $f(x) = ax^2 + bx + c$, definita in $D = \mathbb{R}$, voglio eseguire una traslazione del grafico di una quantità T in orizzontale e q in verticale.
Trovate T e q affinché

(a) la nuova funzione abbia minimo $m = 0$ in $x_m = 0$, se $a = 1$, $b = 6$ e $c = 1$;

(b) la nuova funzione abbia minimo $m = 0$ in $x_m = 0$ per $a = 1$, b e c qualsiasi (esprimendo T e q in funzione di b e c);

(c) la nuova funzione, ristretta al dominio $D = [0, 1]$, abbia minimo $m = 0$ in $x_m = 0$ e massimo $M = 2$ in $x_M = 1$, quando $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.

ESERCIZIO 4.6 Data la funzione convessa $f : D \to \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$, mostrare che sono convesse le funzioni

$$g(x) = f(x) + 3, \quad h(x) = f(x + 1).$$

ESERCIZIO 4.7 L'altezza di un sasso lanciato in aria lungo la verticale, viene misurata in 3 differenti istanti dopo il lancio, ottenendo i seguenti risultati

$t(sec)$	1	30	40
altezza (m)	539	800	500

Sapendo che l'altezza di un sasso dipende dal tempo secondo una legge quadratica, trova l'altezza massima raggiunta e l'istante in cui il sasso tocca terra. Sapendo che l'accelerazione di gravità è approssimativamente $9,8\ m/sec^2$, possiamo accorgerci che non siamo sulla Terra?

ESERCIZIO 4.8 la densità di una certa sostanza contenuta nelle cellule di una cavia dipende in modo quadratico dal raggio della cellula. Alcune misure dirette forniscono i seguenti dati

raggio ($\mu\ m$)	10	15	20
densità (g/cm^3)	96	28	12

Trova la funzione che descrive i dati.

ESERCIZIO 4.9 Tracciando un grafico approssimativo, discutere qualitativamente[1] l'esistenza di radici reali dei seguenti polinomi, al variare del parametro q,

1. $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + q$
2. $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + q$

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html

[1] 'qualitativamente' vuol dire che non necessario calcolare il valore delle radici, ma è sufficiente determinare il loro numero e collocazione relativa