Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 5. 29 Settembre 2014

1 ora *(Limiti di funzione)*

Limiti

Il concetto di *limite*, già incontrato e presentato in modo intuitivo nella lezione 4, si formalizza rigorosamente nelle seguenti definizioni che costituiscono diverse varianti del medesimo concetto. Considerata infatti la funzione $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad (x_0 \in \mathbb{R},\ L \in \mathbb{R}),$$

se

considerato un numero arbitrario $\epsilon > 0$ è possibile trovare un numero $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \textit{quando} \qquad |x - x_0| < \delta, \quad x \in D, \quad x \neq x_0.$$

Notiamo che nella precedente definizione non è necessario che il punto x_0 sia contenuto nel dominio della funzione. Diremo poi che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (x_0 \in \mathbb{R}),$$

se

considerato un numero arbitrario M è possibile trovare un numero $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > M \qquad \textit{quando} \qquad |x - x_0| < \delta, \quad x \in D, \quad x \neq x_0.$$

Ancora, diremo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad (L \in \mathbb{R}),$$

se

considerato un numero arbitrario $\epsilon > 0$ è possibile trovare un numero $K > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \textit{quando} \qquad x > K \quad x \in D.$$

E anche che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

se

considerato un numero arbitrario M è possibile trovare un numero $K > 0$ tale che

$$f(x) > M \qquad \textit{quando} \qquad x > K \quad x \in D.$$

Varianti minori delle definizioni appena introdotte riguardano i limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

che possono essere facilmente precisate. Infine una variante importante riguarda i *limiti destro e sinistro*

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = L \quad \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = -\infty$$

che anche possono essere precisati in modo ovvio.

Come abbiamo già visto, al concetto di limite è legata l'idea di *asintoto*, che interviene in qualche caso particolare. Data infatti una funzione reale di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L, \quad L \in \mathbb{R}$$

allora la retta $y = L$ è un asintoto orizzontale per la funzione $f(x)$. Se poi abbiamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

si dice anche che la retta verticale $x = x_0$ è un asintoto verticale per $f(x)$.

Tornando alle definizioni introdotte nella lezione precedente, consideriamo il caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad (x_0 \in \mathbb{R},\ L \in \mathbb{R}), \tag{1}$$

che è illustrato adeguatamente nella Figura 1 dove si comprende il gioco che si svolge tra ϵ e δ. Se

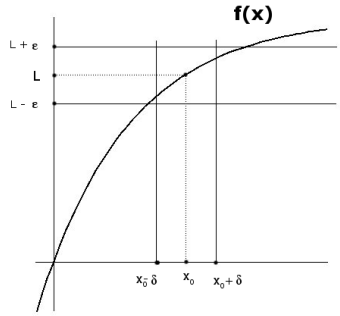

Figura 1: Rappresentazione grafica di (1): scelto $\epsilon > 0$ trovo $\delta > 0$ tale che il grafico di $f(x)$ è tutto contenuto nel rettangolo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (L - \epsilon, L + \epsilon)$, quando $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

ora consideriamo le due funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \begin{cases} x & per \quad x < 0 \\ x + 1 & per \quad x \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} x & per \quad x < 0 \\ 1 & per \quad x = 0 \\ x & per \quad x > 0 \end{cases}$$

vediamo che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

e che dunque, mentre $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste, $\lim_{x \to 0} g(x) \neq g(0)$. Siamo di fronte a due situazioni differenti perché nel secondo caso basta modificare la funzione in un punto (ponendo $g(0) = 0$) per ottenere una funzione che soddisfa

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$$

mentre nel primo caso ciò non è possibile. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verifica la condizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

si dice *continua* nel punto x_0. I due esempi considerati mostrano due funzioni non continue (*discontinue*) nel punto $x_0 = 0$. La $g(x)$ può essere modificata nel punto stesso per diventare continua mentre ciò non è possibile per la $f(x)$. Un caso interessante è quello della funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

definita nel suo dominio naturale $D = \mathbb{R} - \{0\}$. Infatti poiché, come vedremo in seguito, si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

la funzione $f(x)$ può essere estesa a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(0) = 1$, ottenendo una funzione continua.

Un caso simile si verifica per la funzione

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

dove si vede di nuovo che il limite esiste ($\lim_{x\to 0} f(x) = 0$) anche se la funzione non è definita in $x = 0$; in tal caso la funzione si può estendere in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$, ottenendo una funzione continua.

ESERCIZI

ESERCIZIO 5.1 Date un esempio di funzione $y = f(x)$, definita e continua su tutto l'asse reale, che soddisfi ad entrambe le condizioni seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 5 \ ;$$

oppure le seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \ ;$$

oppure ancora:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ ;$$

e infine:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

ESERCIZIO 5.2 tracciare (approssimativamente) il grafico e trovare le eventuali discontinuità delle funzioni seguenti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & per \quad x < 1 \\ 0 & per \quad x = 1 \\ x & per \quad x > 1 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & per \quad x < 0 \\ 1 & per \quad x = 0 \\ x & per \quad x > 0 \end{cases} \quad ;$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin x & per \quad x < \pi \\ 0 & per \quad x = \pi \\ x & per \quad x > \pi \end{cases} \quad ; \quad l(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & per \quad x < 0 \\ 0 & per \quad x = 0 \\ x & per \quad x > 0 \end{cases} \quad ;$$

$$m(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & per \quad x < 0 \\ 0 & per \quad x = \pi \\ \cos x & per \quad x > \pi \end{cases} \quad ; \quad l(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & per \quad x < 0 \\ 0 & per \quad x = 0 \\ \sin x & per \quad x > 0 \end{cases} \quad .$$

Calcolare, se esiste, limite destro e sinistro nei punti di discontinuità . Determinare quali di queste discontinuità si possono eliminare.

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html