Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 6. 1 Ottobre 2014

2 ore *(continua dalla lezione precedente* **limiti di funzione** *...)*

Il calcolo dei limiti si avvale della seguente tabella operativa che permette (quasi sempre) di calcolare i limiti in questione

$$\begin{cases} i) & \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \\ ii) & \lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x) \\ iii) & \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \\ iv) & \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \end{cases}$$

Notiamo che $\lim_{x\to x_0}$ può essere inteso con $x_0 \in \mathbb{R}$, ma anche come $\lim_{x\to\pm\infty}$. Inoltre, poichè i limiti possono essere $\pm\infty$, occorre chiarire che

$$+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad L \pm \infty = \pm\infty,$$

$$\frac{L}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{\pm\infty}{L} = \pm\infty \text{ (se } \quad L > 0), \quad L \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ (se } \quad L > 0)$$

mentre sono *indeterminati* (da determinare di volta in volta) i casi

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{L}{0}.$$

Casi tipici sono quelli relativi alle funzioni *razionali* come si vede dall'esempio

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x^2$$

che produce una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$. In questo caso basta notare

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x^2 = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

visto che il fattore in parentesi tende ad 1. In generale se $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ sono due polinomi di gradi rispettivi n ed m, supponendo che i rispettivi coefficienti di grado massimo a_n e b_m siano entrambi positivi, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & se \quad n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & se \quad n = m \\ +\infty & se \quad n > m \end{cases}$$

Infatti, come esempi abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2x^2}{1+x^3} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{2x^2+3x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x+1} = +\infty.$$

Forme indeterminate

Abbiamo visto nella lezione precedente che la tabella operativa per il calcolo dei limiti può portare a *forme indeterminate* che bisogna analizzare caso per caso, come negli esempi considerati. Altri esempi tipici li abbiamo già incontrati, ad esempio nel considerare la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

che per $x \to 0$ produce la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$, ma per la quale si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

A questo caso si riconducono anche i seguenti (del tipo $0 \cdot \infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x^2}.$$

che, ponendo $y = \dfrac{1}{x}$, si riducono a

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1, \quad \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\frac{\sin y}{y} = +\infty, \quad \lim_{y\to 0} y\frac{\sin y^2}{y^2} = 0.$$

In generale, la risoluzione di forme indeterminate si appoggia a metodi tecniche e risultati teorici. Qui di seguito elenchiamo alcune regole (che in fondo abbiamo già utilizzato appoggiandoci all'intuizione) che possono aiutare

Tre regole d'oro

- *Regola di confronto*

$$\text{Se} \quad f(x) \le g(x) \qquad \text{allora} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

- *Regola di Pinocchio*

$$\text{Se} \quad f(x) \le h(x) \le g(x) \qquad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L, \ \text{allora anche} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$

- *Regola di composizione*

$$\text{Se} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l \qquad e \quad \lim_{x\to l} f(x) = L, \ \text{allora anche} \quad \lim_{x\to x_0} f\circ g(x) = L.$$

Un esempio importante di utilizzo delle regole precedenti è il calcolo del limite (1) già incontrato. Infatti partendo dalla diseguaglianza (geometrica)

$$|\sin x| < |x| < |\tan x|$$

si ha

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

e quindi, per la regola di Pinocchio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Aggiungiamo che la regola di composizione interviene continuamente per ridurre il calcolo di un limite a una serie di casi più semplici.

Ordine di convergenza

Osserviamo che possiamo confrontare funzioni diverse nel modo in cui raggiungono il (convergendo o divergendo) loro limite. Precisamente

> *si dice che una funzione $f(x)$ converge (per $x \to x_0$ oppure per $x \to \pm\infty$) al limite L, più velocemente della funzione $g(x)$, anch'essa convergente ad L, se risulta*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-L}{g(x)-L} = 0 \quad \left(\textit{oppure} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-L}{g(x)-L} = 0 \right)$$

Possiamo anche confrontare funzioni che tendono a ∞ (divergono). Infatti

Si dice che tra le due funzioni divergenti $f(x)$ e $g(x)$, la $f(x)$ diverge più rapidamente, se risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \qquad \left(\textit{oppure} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\right)$$

Poi, ancora,

si dice che due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ convergono (oppure divergono) allo stesso ordine se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-L}{g(x)-L} = l \neq 0, \qquad \left(\textit{oppure} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0\right)$$

Spesso, come termine di riferimento con cui confrontare l'andamento di una funzione $f(x)$, si usano le funzioni potenza

$$c_n(x) = |x|^n \quad (\textit{per} \quad x \to \pm\infty), \quad c_n(x) = |x - x_0|^n \quad (\textit{per} \quad x \to x_0)$$

In questo contesto, abbiamo che, per $x \to +\infty$, la funzione esponenziale $f(x) = e^x$ e la funzione logaritmo $f(x) = \ln(x)$ sono gli *infiniti* (cioè le funzioni che hanno $+\infty$ come limite) rispettivamente più forte e più debole. Infatti qualunque sia l'intero n

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = 0\ .$$

Vale la pena mostrare un paio di esempi per illustrare quello che può succedere. Consideriamo infatti le funzioni

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+5x}, \quad g(x) = \frac{x^2+2}{x^2-x}$$

per le quali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1 \tag{2}$$

Poiché

$$f(x) - 1 = \frac{2-5x}{x^2+5x}, \quad g(x) - 1 = \frac{2+x}{x^2-x}$$

abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-1}{g(x)-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-5x}{x^2+5x} \times \frac{x^2-x}{2+x} = -5$$

e dunque le due funzioni convergono con lo stesso ordine. Se modifichiamo la prima funzione ponendo

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

abbiamo invece

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-1}{g(x)-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} \times \frac{x^2-x}{2+x} = 0$$

e la $f(x)$ converge più rapidamente di $g(x)$.

Continuità

Riprendiamo ora il concetto di continuità introdotto nella lezione precedente

La funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Le proprietà e le regole relative ai limiti portano alle seguenti

- Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 allora sono continue in x_0 anche

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\textit{se} \quad g(x_0) \neq 0)$$

- Se $g(x)$ è continua in x_0 e $f(x)$ è continua in $g(x_0)$, allora

$$f \circ g(x) \quad \textit{è continua in} \quad x_0$$

che aiutano a determinare la continuità di una funzione a partire dalla continuità di funzioni elementari.

ESERCIZI

ESERCIZIO 6.1 Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e verticali delle funzioni:

$$f(x) = \frac{x}{2x-3} \qquad g(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$
$$h(x) = log(x-1) \quad k(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

.

ESERCIZIO 6.2 Determinare il limite per $x \to 0^+$ della seguente funzione

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x}}{3x + \sqrt{x}}$$

ESERCIZIO 6.3 Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{2x}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{2x}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to +2^-} \frac{2x}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to +2^+} \frac{2x}{x^2-4}$$

Cosa rappresentano le rette $x = -2$ e $x = 2$ per la funzione $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$?

ESERCIZIO 6.4 Considerata la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3\ln^2(1+x) + 8}$$

- identificare il dominio naturale;
- calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to -1^+} f(x);$$
- determinare eventuali discontinuità della funzione.

ESERCIZIO 6.5 Calcolare il limite per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 \qquad f_2(x) = x^2 \sin x^2 - x^4 \qquad f_3(x) = e^x - x$$

$$f_4(x) = \sin\tfrac{1}{x} \cos x^2 \qquad f_5(x) = x^2 e^x - x e^{x^2} \qquad f_6(x) = e^{-x^2+x} - e^{3x}$$

ESERCIZIO 6.6 Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^4+3x^3+2}{15x^3+1}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+2x}{15x^3+1}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{14x^3+2}{2x^3+x^2+15x+1}, \quad \lim_{x\to 1^\pm} \frac{5x^4+3x^3+2}{x^2-1}$$

ESERCIZIO 6.7 Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sin x + 1}{x^3+1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin x + 5}{5x^3+1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{15e^{3x}+1}.$$

ESERCIZIO 6.8 Considerate le funzioni $f(x) = 3^{-x^2}$ e $g(x) = \sqrt{2} \cdot 3^{-2x^2}$. Esiste un asintoto orizzontale comune? Quale delle due funzioni vi converge più velocemente?

ESERCIZIO 6.9 Per ogni coppia delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x) = x, \quad g(x) = 2x; \\ (b) & f(x) = x, \quad g(x) = x^2; \\ (c) & f(x) = \log_2(x), \quad g(x) = \log_2(2x); \\ (d) & f(x) = 3^x, \quad g(x) = 3^{2x}; \end{array}$$

dire quale delle due diverge più rapidamente per $x \to +\infty$, ovvero se divergono allo stesso ordine.

ESERCIZIO 6.10 Le funzioni

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sqrt{x+3}, \quad f_3(x) = x^2 - x, \quad f_4(x) = 2^{2x}, \quad f_5(x) = x^2 + 2x^4,$$

sono tutte divergenti per $x \to +\infty$. Classificarle in base alla velocità con cui divergono, dalla meno veloce alla più veloce.

ESERCIZIO 6.11 Per $x \to +\infty$, determinare l'ordine di convergenza a 0 delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}, \quad g(x) = e^{-x} - \frac{1}{x}, \quad h(x) = e^{-2x} - e^{-x^2}.$$

ESERCIZIO 6.12 Due popolazioni diverse si sviluppano nel tempo secondo le due seguenti leggi di crescita

$$N_1(t) = \frac{10 + 10^3 t}{t+1}, \quad N_2(t) = \frac{10 + 10^3 t^2}{t^2+1},$$

che rappresentano il numero di individui delle due popolazioni al tempo t. Mostrate che a lungo termine le due popolazioni raggiungono la stessa abbondanza (stesso numero di individui) e individuate la specie che si stabilizza più rapidamente. Quale delle due specie è inizialmente più rapida nella crescita? Perché?

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html