Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 7. 6 Ottobre 2014

1 ora *(... continua dalla lezione precedente su* **continuità** *)*

La continuità di una funzione è spesso la chiave di risoluzione di molti problemi. In particolare abbiamo un risultato fondamentale

- *Teorema di Weierstrass:*
  Se la funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$ allora esistono massimo e minimo della funzione in $[a, b]$.

Notiamo che in questo teorema la continuità è essenziale, insieme al fatto che l'intervallo sia della forma $[a, b]$, ossia che sia *chiuso e limitato.* Infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

non ha massimo nell'intervallo $[-1, 1]$ perché non è continua in $x = 0$, non ha minimo nell'intervallo $[0, +\infty)$ perché tale intervallo, pur essendo *chiuso*, non è *limitato*, e infine non ha massimo nell'intervallo $(1, 2]$ perché tale intervallo, pur essendo *limitato*, non è *chiuso.*
Un altro importante risultato è il seguente

- *Teorema del valore intermedio:*
  Se la funzione $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e si ha

  $$f(a) < k \quad (\text{rispettivamente } f(a) > k), \quad f(b) > k \quad (\text{rispettivamente } f(b) < k)$$

  allora esiste almeno un punto x_0 in cui

  $$f(x_0) = k.$$

Questo teorema interviene nella risoluzione di equazioni come

$$f(x) = k,$$

dove $f(x)$ è una funzione di variabile reale. Appoggiandoci in modo naturale alla visualizzazione del grafico della funzione $f(x)$, ciò corrisponde a identificare le intersezioni del grafico con la retta orizzontale di quota k. Applicando il teorema basta trovare un punto in cui la funzione assuma un valore superiore a k e uno in cui assuma un valore inferiore, per essere sicuri di avere almeno una soluzione dell'equazione. In tutto ciò , la continuità è essenziale, infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad x \leq 1 \\ x + 1 & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}$$

non è continua in $x = 1$ e l'equazione $f(x) = \dfrac{3}{2}$ non ha soluzione anche se $f(0) = 0 < \dfrac{3}{2}$ e $f(2) = 3 > \dfrac{3}{2}$.

Il teorema del valore intermedio è alla base del *metodo di bisezione* per la determinazione numerica (approssimata) delle radici di un'equazione. Se infatti vogliamo

risolvere l'equazione $f(x) = 0$ *nell'intervallo* $[\alpha_0, \beta_0]$, *sapendo che* $f(\alpha_0) < 0$ *e* $f(\beta_0) > 0$

possiamo adottare il seguente procedimento

- consideriamo il punto medio dell'intervallo $\dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$ e calcoliamo $f_M = f\left(\dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{2}\right)$
- se $f_M < 0$ poniamo $\alpha_1 = \dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$ e $\beta_1 = \beta_0$, se invece $f_M > 0$ poniamo $\alpha_1 = \alpha_0$ e $\beta_1 = \dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$.

- andando avanti in questo modo si costruiscono gli intervalli $[\alpha_n, \beta_n]$ all'interno dei quali si trova almeno una radice dell'equazione.
- L'approssimazione con cui tale radice viene determinata è data dall'ampiezza dell'intervallo $\beta_n - \alpha_n = \dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}$

ESERCIZI

ESERCIZIO 7.1 Considerata la funzione $f(x) = x^2 + 2x + 2$

- determinate (quando esistono) massimo e minimo della funzione negli intervalli

$$[0, 1), \quad [-3, 2), \quad [-1, 0), \quad (0, +\infty), \quad (-2, +\infty)$$

- determinate quante soluzioni possiede l'equazione $f(x) = 2$ negli stessi intervalli

ESERCIZIO 7.2 determinare se l'equazione

$$x^2 + 3e^x + \sin x + \ln x = 0$$

possiede almeno una soluzione nell'intervallo $(0, +\infty)$. Perché ?

ESERCIZIO 7.3 Usando eventualmente una calcolatrice, determinare una soluzione dell'equazione

$$\sin^2 x + \ln x = 0$$

con almeno la precisione di 0.01 ($|x_{vera} - x_{trovata}| < 0.01$).

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html