Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 8. 8 Ottobre 2014

2 ore *(La derivata, la tangente, calcolo delle derivate, massimi e minimi.)*

La derivata di una funzione

Consideriamo una funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e definiamo il rapporto incrementale nel punto x_0 come

$$r(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

che come funzione della variabile h ha dominio $D = \mathbb{R} - \{0\}$. Se esiste (finito)

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

si dice che la funzione è*derivabile* in x_0 e che $f'(x_0)$ èla sua *derivata*.
La derivata in x_0 si indica anche con $Df(x_0)$ e $\frac{df}{dx}(x_0)$ e si parla anche di *derivata destra* e di *derivata sinistra* . Cambiando variabile

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Poiché abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$$

vediamo che una funzione derivabile in un punto x_0 ènecessariamente continua in x_0.
Da alcuni semplici esempi si capisce che la derivata puònon esistere:

- $f(x) = x^2$, in questo caso, in $x_0 = 0$ abbiamo $r(h) = h$ e dunque $f'(0) = 0$
- $g(x) = |x|$, sempre in $x_0 = 0$ abbiamo $r(h) = +1$ se $h > 0$ e $r(h) = -1$ se $h < 0$. Dunque la funzione non èderivabile, ma esistono le derivate destra e sinistra $g'(0^+) = 1$ e $g'(0^-) = -1$.
- $h(x) = \sqrt{x}$, in questo caso $r(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$ e la $h(x)$ non èderivabile in $x_0 = 0$.

Interpretazione geometrica della derivata

Geometricamente la derivata di una funzione, in un punto x_0, si identifica col coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione, nel punto x_0. Questa interpretazione èillustrata nella Figura 1 dove si vede che $r(h)$ èil coefficiente angolare della retta secante e al tendere di h a zero l'angolo che la secante forma con l'asse delle ascisse tende a quello della tangente.

La derivata èun concetto locale nel senso che riguarda la funzione in un intorno del punto in cui si considera la derivata. Nella formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{E}(x, x_0)$$

il termine $\mathcal{E}(x, x_0)$ rappresenta l'errore che commettiamo a sostituire la funzione con la retta tangente nel punto x_0. Per $x \to x_0$, la funzione $\mathcal{E}(x, x_0)$ tende a zero più velocemente di $x - x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathcal{E}(x, x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0,$$

per cui otteniamo una buona approssimazione della funzione nelle vicinanze del punto x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

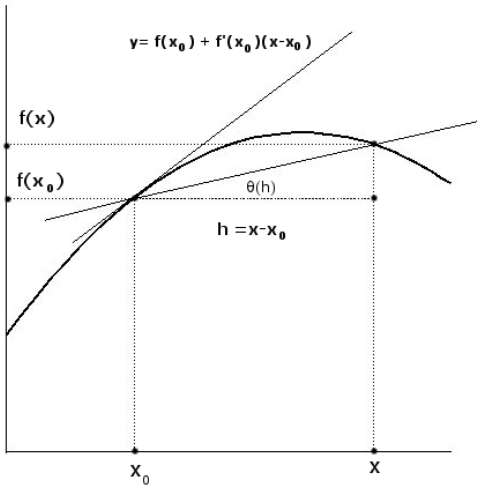


Figura 1: Interpretazione geometrica della derivata come coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto x_0

Per quanto la derivata sia un concetto locale (parliamo della derivata in un punto x_0), data una funzione $f(x) : D_f \to \mathbb{R}$, possiamo definire una nuova funzione $f'(x) : D_{f'} \to \mathbb{R}$, dove, ovviamente, $D_{f'} \subset D_f$, perché dobbiamo escludere i punti in cui la funzione $f(x)$ non èderivabile. Supposto ora che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia derivabile in $\mathbb{R}$, abbiamo che (teorema di Lagrange)

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0). \tag{2}$$

dove $\xi \in (x_0, x)$ se $x > x_0$ oppure $\xi \in (x, x_0)$ se invece $x < x_0$. Questa formula che si configura come una variante della (1) ha l'interpretazione geometrica mostrata in Figura 2. La (2) ha un notevole interesse teorico. Qui l'incertezza che nella (1) èdovuta all'errore, si trasferisce sull'incertezza con cui conosciamo il punto ξ.

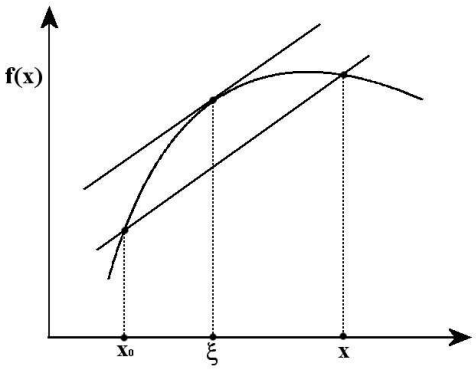


Figura 2: Interpretazione geometrica della formula (2). Il punto ξ èun punto in cui la tangente al grafico (coefficiente angolare $f'(\xi)$) èparallela alla retta secante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ (coefficiente angolare $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

La derivata nella descrizione dei fenomeni

Ricordiamo che, a seconda del contesto e del fenomeno che si vuole descrivere con un modello matematico, il rapporto incrementale di una grandezza, in funzione di un'altra, ha il significato di **variazione media** della grandezza stessa. Così , quando la grandezza rappresenta uno spostamento in funzione del tempo $S(t)$, il rapporto incrementale ha il significato di *velocitàmedia*

$$V_m = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}.$$

Nel caso della descrizione della crescita di una popolazione in funzione del tempo, se $N(t)$ rappresenta il numero di individui al tempo t, allora abbiamo il *tasso medio di crescita* (positivo o negativo)

$$T_m = \frac{N(t) - N(t_0)}{t - t_0}.$$

Consideriamo una barra di materiale di sezione costante unitaria e schematizziamola come un segmento di estremi a e b (vedi Figura 3). Se al variare di x calcoliamo la massa di un tratto che va

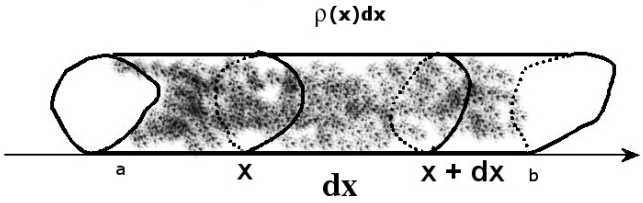


Figura 3: Massa e densità.

dall'estremo a al punto x, otteniamo una funzione $M(x)$ definita in $[a, b]$ e tale che $M(a) = 0$. La densità(media) di un tratto $[x_0, x]$ èdata da

$$\frac{M(x) - M(x_0)}{x - x_0}$$

passando al limite per $x \to x_0$ otteniamo la densitàpuntuale

$$\rho(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{M(x) - M(x_0)}{x - x_0} = M'(x) \ .$$

Il calcolo delle derivate

In casi semplici le derivate si possono calcolare direttamente eseguendo il limite del rapporto incrementale. In generale ci appoggiamo a una serie di regole e proprietà:

- la funzione costante $f(x) = c$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, ha derivata nulla in ogni punto: $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se una funzione $f(x)$ ha derivata nulla in tutto un intervallo, allora ècostante in tutto l'intervallo;
- la seguente tabella operativa permette il calcolo della derivata di una funzione a partire da casi semplici.

$$\begin{cases} i) & (cf(x))' = cf'(x) \\ ii) & (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \\ iii) & (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ iv) & (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \\ v) & \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \end{cases}$$

(notare che in generale $v)$ ha senso solo nei punti in cui $g(x) \neq 0$).

Uso delle derivate nello studio del grafico di una funzione

Le regole di calcolo e le proprietàdelle derivate permettono di tracciare il grafico di una funzione. Qui di seguito stabiliamo una serie di osservazioni che forniscono gli strumenti per questo compito.

- Dal significato geometrico della derivata (e rigorosamente usando il teorema di Lagrange) si capisce che data una funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile nell'intervallo (a, b) si ha che:

$$se \quad f'(x) \geq 0 \;\; in \quad (a,b), \;\; allora \quad f(x) \;\; ènon\text{-}decrescente \; in \quad (a,b)$$

  (nota che $f(x)$ potrebbe essere costante in un sottointervallo);

- analogamente si capisce che:

$$se \quad f'(x) \leq 0 \;\; in \quad (a,b), \;\; allora \quad f(x) \;\; ènon\text{-}crescente \; in \quad (a,b);$$

- e poi:

$$se \quad f'(x) \leq 0 \;\; in \quad (a, x_0) \;\; e \; se \quad f'(x) \geq 0 \;\; in \quad (x_0, b),$$
$$allora \quad f(x) \;\; ha \; un \; \textbf{minimo relativo} \text{ nel punto } \quad x_0;$$

- analogamente:

$$se \quad f'(x) \geq 0 \;\; in \quad (a, x_0) \;\; e \; se \quad f'(x) \leq 0 \;\; in \quad (x_0, b),$$
$$allora \quad f(x) \;\; ha \; un \; \textbf{massimo relativo} \text{ nel punto } \quad x_0;$$

- infine se la $f(x)$ èderivabile nel punto di massimo (minimo) x_0, allora $f'(x_0) = 0$ (la tangente al grafico nel punto x_0 èorizzontale);

Un esempio semplice che illustra quanto sopra èlo studio della funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$$

tramite la derivata

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$$

Nella Figura 4 sono riportati i grafici di $f(x)$ e di $f'(x)$ per una conferma dei risultati.

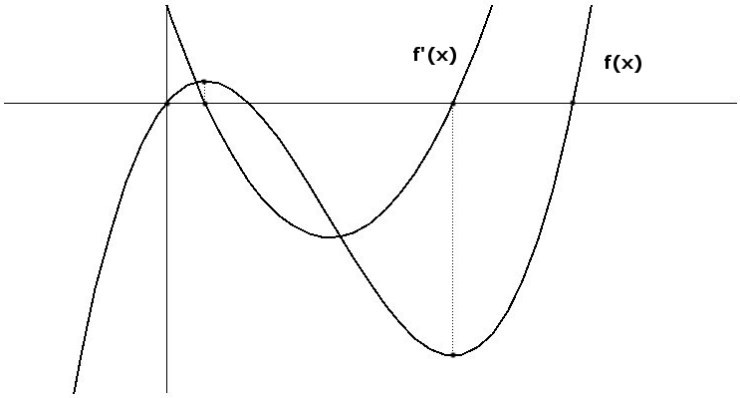


Figura 4: Confronto tra $f(x)$ e $f'(x)$, dove si vede che la funzione ècrescente dove la sua derivata èpositiva, decrescente dove ènegativa. I punti in cui la derivata si annulla e cambia segno corrispondono a massimi e minimi locali.

Per fissare ulteriori concetti, consideriamo una funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora:

- la funzione $f(x)$ si dice *crescente nel punto* x_0 se esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che

$$\text{se} \quad x_1 < x_0 < x_2, \;\; \text{con} \quad x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \;\; \text{allora} \quad f(x_1) < f(x_0) < f(x_2);$$

- se $f(x)$ ècrescente in (a, b), allora ècrescente in ogni punto di (a, b);

- se $f'(x_0) > 0$, allora $f(x)$ ècrescente in x_0;
  questo si vede subito dalla formula

$$f(x) = f(x_0) + \left[f'(x_0) + \frac{\mathcal{E}(x, x_0)}{x - x_0} \right] (x - x_0)$$

  perché la quantitàin parentesi quadra èpositiva per x sufficientemente vicino a x_0;

- se $f(x)$ ècrescente in x_0 allora risulta $f'(x_0) \geq 0$; questo si vede perché

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$$

  per h sufficientemente vicino a 0;

- x_0 si dice punto critico se $f'(x_0) = 0$;
- un punto critico èun punto di massimo locale, oppure di minimo locale oppure di flesso.

Lo studio della derivata permette dunque di conoscere i punti critici, gli intervalli in cui la funzione ècrescente, quelli in cui èdecrescente, identificare tra i punti critici quelli che sono di massimo, quelli di minimo, quelli di flesso. Osserviamo che se una funzione ècrescente in in punto x_0, non èdetto che sia crescente in un intorno di x_0. Per convincersene basta considerare l'esempio

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1+\sin^2\dfrac{1}{x}\right) & \textit{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{per} \quad x = 0 \end{cases}$$

in cui la funzione ècrescente in $x_0 = 0$, ma non ècrescente in nessun intervallo $(-\delta, \delta)$.

L'esempio della lattina

Tornando all'esempio della lattina (vedi Lezione 2), ricordiamo che le due funzioni

$$S(d) = \pi\left(\tfrac{d^2}{2} + \tfrac{4V^*}{\pi d}\right), \qquad d \in (0, +\infty)$$

$$V(d) = \tfrac{1}{4}\left(S^* - \tfrac{\pi}{2}d^2\right)d, \qquad d \in \left(0, \sqrt{\tfrac{2S^*}{\pi}}\right)$$

descrivono superficie e volume rispettivamente a volume e superficie costante. Il valore di d, ottimale per rispettivamnte minimizzare la superficie o massimizzare il volume, si ottiene facilmente usando gli strumenti introdotti e discussi sopra. Si ottengono i rispettivi valori

$$d_m = \sqrt[3]{\frac{4V^*}{\pi}}, \qquad d_M = \sqrt{\frac{2S^*}{3\pi}}.$$

Ancora un esempio

Il seguente problema illustra l'uso della derivata prima secondo quanto discusso nelle lezioni precedenti:
Un piccione deve attraversare un fiume passando dal punto A (un bosco), di una delle due sponde, al punto B (un ritrovo di turisti ornitofili) dell'altra sponda. Sapendo che il volo sul fiume implica per ogni unitàdi lunghezza un consumo di energia E_f, mentre nel volo sulla terra si consuma un'energia E_t per unitàdi lunghezza ($E_f > E_t$), trovare il percorso ottimale che minimizza l'energia spesa.

Il problema si schematizza come illustrato in Figura 6, dove ogni percorso possibile èindividuato dall'ascissa x del punto di arrivo sul lungo-fiume; l'energia spesa in ciascun percorso èespressa dalla seguente funzione di x (restringiamo i valori di x all'intervallo $[0, b]$ perche percorsi con $x < 0$ e $x > b$ sarebbero chiaramente svantaggiosi)

$$E(x) = E_f\sqrt{a^2+x^2} + E_t(b-x) \quad x \in [0, b] \ ,$$

la cui derivata è

$$E'(x) = E_f\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - E_t \ ,$$

e, posto $k = \dfrac{E_f}{E_t}$ (notare che $k > 1$), si annulla

$$\begin{array}{ll} \textit{in} \quad x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{k^2-1}} & \textit{se} \quad x_0 < b, \quad \textit{ossia se} \quad k > \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}; \\ \textit{in nessun punto di} \quad (0, b) & \textit{se} \quad k \leq \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}; \end{array}$$

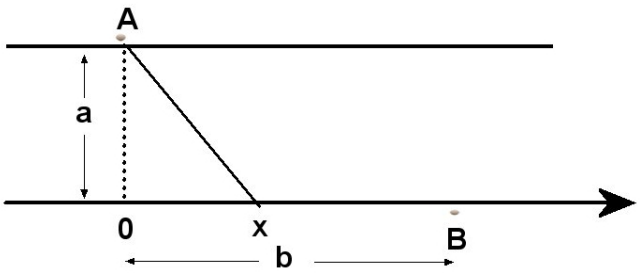


Figura 5: Rappresentazione schematica del problema.

si conclude che il punto di minimo x_m di $E(x)$, corrispondente alla strategia ottimale di volo, si ha per

$$x_m = \frac{a}{\sqrt{k^2-1}} \qquad se \quad k > \sqrt{1+\tfrac{a^2}{b^2}};$$
$$x_m = b \qquad\qquad\quad se \quad k \leq \sqrt{1+\tfrac{a^2}{b^2}}.$$

La situazione èrappresentata rispettivamente nei grafici seguenti

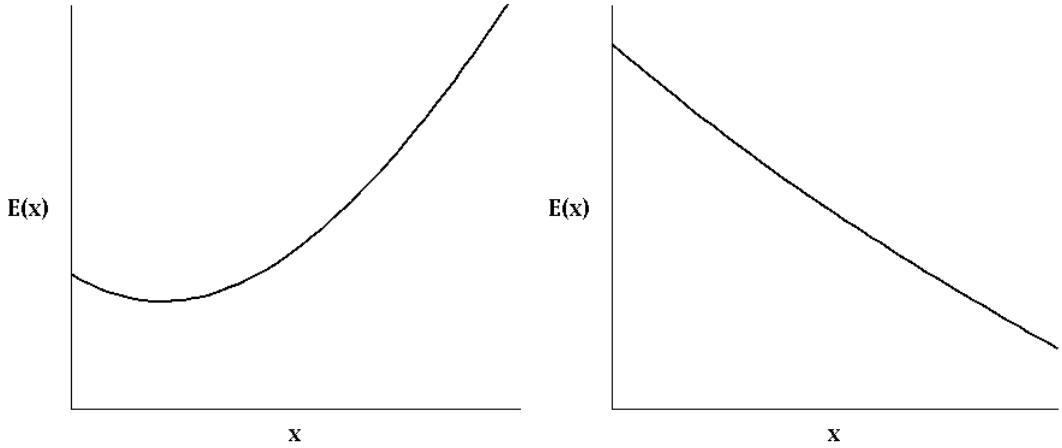


Figura 6: Il problema del piccione: a sinistra il caso $k > \sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}$, a destra il caso $k < \sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}$.

ESERCIZI

ESERCIZIO 8.1 Trascurando l'attrito dell'aria, la distanza d percorsa da un corpo lasciato cadere al tempo $t = 0$ è legata al tempo t di caduta dalla formula $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$, dove $g \simeq 9.812 m/s^2$ èl'accelerazione di gravità. Calcola:

(a) la velocitàmedia di caduta fra $t_0 = 2$ e $t_1 = 10$ s;

(b) la velocitàmedia di caduta fra $t_0 = 2$ e $t_1 = 8$ s;

(c) la velocitàmedia di caduta fra $t_0 = 2$ e $t_1 = 6$ s;

(d) la velocitàmedia di caduta fra $t_0 = 2$ e $t_1 = 4$ s;

(e) la velocitàmedia di caduta fra $t_0 = 2$ e $t_1 = 3$ s;

(f) la velocitàmedia di caduta fra $t_0 = 2$ e $t_1 = 1$ s;

(g) la velocitàistantanea di caduta in $t_0 = 2$ s, trovata come limite del rapporto incrementale.

ESERCIZIO 8.2 Lo spostamento (espresso in metri) di una particella che si muove su una linea retta èassegnata dall'equazione del moto $s = 4t^2 + 6t + 2$. Trovare la velocitàdella particella agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$.

ESERCIZIO 8.3 Usando la definizione come limite del rapporto incrementale, calcola la derivata delle funzioni seguenti:

(a) $f(x) = x - 12$;

(b) $f(x) = 2x + 3$;

(c) $f(x) = x^2 - 1$;

(d) $f(x) = (x - 1)^2$.

ESERCIZIO 8.4 Si considerino le seguenti funzioni:

(a) $f(x) = x^2 + 2 \quad (x_0 = 0)$

(b) $f(x) = -x^2 + 2 \quad (x_0 = -1)$

(c) $f(x) = x^3 + 2 \quad (x_0 = 1)$

(d) $f(x) = -(x - 2)^3 \quad (x_0 = 0)$

(e) $f(x) = 2x - 1 \quad (x_0 = -1)$

(f) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x_0 = -1)$

(g) $f(x) = \frac{3 + x}{x} \quad (x_0 = 1)$

Utilizzando la definizione di derivata, calcolare il valore approssimato della derivata nei rispettivi punti x_0 prendendo i seguenti incrementi $h = 0.1$, $h = -0.01$ e $h = 0.001$

ESERCIZIO 8.5 Mostra che la derivata di una funzione (derivabile) pari èdispari. Cosa puoi dire della derivata di una funzione dispari?

ESERCIZIO 8.6 In quale punto èminima la pendenza del grafico di $x^3 + 3$ nell'intervallo $[-1, 2]$?

□$(-1, 2)$ □$(3, 0)$ □$(0, 3)$ □nessuna delle precedenti

ESERCIZIO 8.7 Date le funzioni $f(x) = 2x^3 - 6x$, $g(x) = -4x^2 + 1$ e $h(x) = 5x - 7$, calcolare la retta tangente ai grafici di f, g e h nel punto di ascissa $x = -1$.

ESERCIZIO 8.8 Determinare la retta tangente al grafico di $f(x) = kx^2 - x$ nel punto di ascissa 1 con $k \in \mathbb{R}$ parametro arbitrario.

ESERCIZIO 8.9 Una cellula ha approssimativamente forma sferica e raggio $r = 1\mu m$. Utilizzando la formula del binomio di Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{dove} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- determinare l'incremento del volume se il raggio varia di Δr;
- determinare il corrispondente tasso medio di crescita del volume;
- determinare il corrispondente tasso di crescita puntuale;
- se il raggio aumenta di 0.05, di quanto aumenta approssimativamente il volume? E di quanto aumenta l'area della superficie?

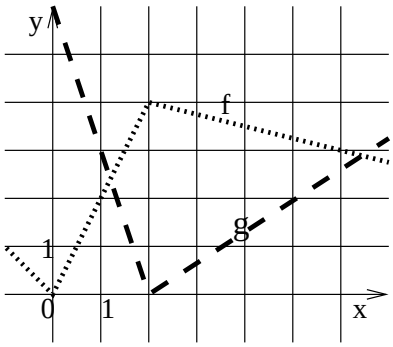
ESERCIZIO 8.10 Calcolare i punti in cui la derivata delle seguenti funzioni si annulla.

1. $f(x) = 5x^2 + 4x$
2. $\phi(x) = x^3 + x - \frac{1}{x}$
3. $g(x) = |3x - 1|$
4. $h(x) = x^3 - 12x + 1$
5. $\psi(x) = 1 + 8x - x^8$

ESERCIZIO 8.11 Calcolare le derivate delle funzioni

$$f(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}, \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^4)^3}, \quad h(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 - 2}$$

ESERCIZIO 8.12 Date le funzioni f e g il cui grafico èdisegnato in figura, sia $u(x) = f(g(x))$. Calcolare $u'(1)$ e $u'(5)$



ESERCIZIO 8.13 Le funzioni $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ e $g'(x)$ prendono i valori presentati nelle seguenti tabelle:

x	1	2	3
$f(x)$	3	5	2
$g(x)$	2	3	7

x	1	2	3
$f'(x)$	7	1	5
$g'(x)$	2	4	1

Si consideri la funzione $u(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Quanto valgono $u(1)$ e $u'(2)$?

ESERCIZIO 8.14 Date le funzioni $f(x) = x^2+2x+1$ e $g(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ calcolare $h = f \circ g = f(g(x))$, $l = g \circ f = g(f(x))$, $m = f \circ f = f(f(x))$ e $n = (g \circ g) = g(g(x))$ e specificare il loro dominio. Calcolare $h'(x)$, $l'(x)$, $m'(x)$ e $n'(x)$ usando la regola per la derivazione delle funzioni composte. Se possibile, calcolare il valore di tali derivate nei punti di ascissa $x = 1$, $x = 0$ e $x = 2$.

ESERCIZIO 8.15 Siano

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{1-x}$$

Calcolare $h = (f \circ g)$, $l = (g \circ f)$, $h'(3)$ e $l'(2)$.

ESERCIZIO 8.16 Assumendo $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$, calcolare i valori di:

$$(fg)'(5), \quad (f/g)'(5), \quad (g/f)'(5)$$

ESERCIZIO 8.17 Quale delle seguenti funzioni f è decrescente in $(-3, 0)$ e verifica $f'(-3) = 0$?

☐ $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 6x$ ☐ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$

☐ $f(x) = 3x + \dfrac{x^2}{2}$ ☐ $f(x) = x^3 + 2x + 3$

ESERCIZIO 8.18 Inscrivere il rettangolo di perimetro massimo nella parte di piano delimitata dalla curva $y = -x^2 + 9x - 8$ e dall'asse x.

ESERCIZIO 8.19 La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 10x^5 - x$ èrescente? Perché?

ESERCIZIO 8.20 Determina se le funzioni $f_1(x) = x^3 + 2x$ e $f_2(x) = 2x^3 + x$ sono crescenti o meno, giustificando la risposta.

ESERCIZIO 8.21 Studia crescenza, decrescenza e trova gli eventuali massimi e minimi locali delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = x^4$

(b) $f(x) = x^7$

(c) $f(x) = -6x^2 + 2x^3$

(d) $f(x) = 3x^2 + 6x$

(e) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$

ESERCIZIO 8.22 Quante soluzioni hanno le equazioni

$$x^3 + x^2 + \frac{4}{27} = 0 \quad \text{e} \quad x^3 - 2x^2 + \frac{4}{27} = 0 \ ?$$

ESERCIZIO 8.23 Sapendo che f è continua in $(0, 1)$ e vale $f(0) > f(1) > 0$, cosa posso concludere sul numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ con $x \in [0.1]$?

☐ nessuna ☐ una ☐ almeno una ☐ nessuna delle precedenti

ESERCIZIO 8.24 Sapendo che f è continua in $(0, 1)$ e vale $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, $f(0) > f(1) > 0$, cosa posso concludere sul numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ con $x \in [0.1]$?

☐ nessuna ☐ una ☐ almeno una ☐ nessuna delle precedenti

ESERCIZIO 8.25 Studiare crescenza e decrescenza delle seguenti funzioni, trovando gli eventuali massimi e minimi locali:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & f(x) = x^2 + \dfrac{125}{x}, & (b) & f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}, \\
(c) & f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}, & (d) & f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}, \\
(e) & f(x) = x\sqrt{1+x^2}, & (f) & f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}, \\
(g) & f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 7\dfrac{1}{x} - 2, & (h) & f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2.
\end{array}
$$

ESERCIZIO 8.26 Quante soluzioni ha l'equazione $x - 3\log(x) = 0$?
Per rispondere suggeriamo di svolgere i seguenti passi

1. porre $f(x) = x - 3\log(x)$ e trovare il dominio di f
2. calcolare la derivata prima e seconda di f e studiarne il segno
3. calcolare i limiti di f per x che tende agli estremi del dominio
4. tracciare un grafico qualitativo di f e rispondere alla domanda iniziale

ESERCIZIO 8.27 Quante soluzioni ha l'equazione $\log(x^2 - 3x + 2) - \dfrac{1}{2}x + 2 = 0$?
Per rispondere suggeriamo di svolgere i seguenti passi

1. porre $f(x) = \log(x^2 - 3x + 2) - \dfrac{1}{2}x + 2$ e trovare il dominio di f
2. calcolare la derivata prima di f e studiarne il segno
3. calcolare i limiti di f per x che tende agli estremi del dominio
4. tracciare un grafico qualitativo di f e rispondere alla domanda iniziale

ESERCIZIO 8.28 Quante soluzioni ha l'equazione $2^{-2x} + 2^{-x} - 1 = 0$?
Per rispondere suggeriamo di svolgere i seguenti passi

1. porre $f(x) = 2^{-2x} - 2^{-x} - 1$ e trovare il dominio di f
2. scrivere $f(x)$ in base e (ad esempio $2^{2x} = e^{ln(2^{2x})}$...)
3. calcolare la derivata prima di f e studiarne il segno
4. calcolare i limiti di f per x che tende agli estremi del dominio
5. tracciare un grafico qualitativo di f e rispondere alla domanda iniziale

ESERCIZIO 8.29 Studiare la funzione $f(x) = \log \dfrac{1}{x^2 - 4}$ nei seguenti passi

1. trovare il dominio di f
2. studiare il segno di f
3. calcolare f' e studiarne il segno
4. calcolare i limiti di f per x che tende agli estremi del dominio
5. tracciare un grafico qualitativo di f

ESERCIZIO 8.30 Studiare la funzione $f(x) = e^{\sqrt{x^2+3x}}$ seguendo gli stessi passi indicati nell'esercizio precedente

ESERCIZIO 8.31 Data la funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 1$,

1. studiare il segno della derivata e trovare i punti di massimo e minimo;
2. tracciare un grafico approssimato di f;
3. discutere il numero delle soluzioni di $f(x) = k$ al variare di k, parametro reale.

ESERCIZIO 8.32 Data la funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$,

1. calcolare $f'(x)$;
2. studiare il segno della derivata e trovare evenutali punti di massimo e di minimo;
3. discutere il numero delle soluzioni di $f(x) = k$ al variare di k, parametro reale.

ESERCIZIO 8.33 E' assegnata la funzione

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 + 2$$

dove a è un parametro.

1. Scegliete un valore positivo per a e tracciate un grafico approssimativo di $f(x)$, prestando attenzione al segno della sua derivata e trovando eventuali punti di massimo e minimo.
2. Ripetete il punto precedente, scegliendo un valore negativo di a.
3. Trovare, se ciò è possibile, un valore di a tale che $f(x)$ abbia un minimo nel punto $x = 1$. Altrimenti, mostrate che ciò non è possibile.
4. Trovare, se ciò è possibile, un valore di a tale che l'equazione $f(x) = 0$ abbia esattamente tre soluzioni reali. Altrimenti, mostrate che ciò non è possibile.

ESERCIZIO 8.34 Disegnare il grafico di una funzione f continua su $[0, 3]$ e che soddisfi le proprietà date. Se possibile, trovare un'espressione analitica per una funzione con tali proprietà.

- Massimo assoluto in 0, minimo assoluto in 3, minimo locale in 1, massimo locale in 2.
- Massimo assoluto in 1, minimo assoluto in 2.
- La derivata di f si annulla in 2, ma f non ha né massimi né minimi in $(0, 3)$.
- Minimo assoluto in 0, massimo assoluto in 2, massimi locali in 1 e 2, minimo locale in $3/2$.

ESERCIZIO 8.35 Trovare (se possibile) un polinomio di secondo grado $P(x)$ tale che il grafico $y = P(x)$ passi per i punti $A = (1, 0)$ e $B = (2, 4)$ e sia tangente in A alla retta $y = 3(x - 1)$.

ESERCIZIO 8.36 Un uomo in una barca a remi in P, a 5 km dal punto più vicino A di una costa rettilinea, desidera raggiungere un punto B a 6 km da A lungo la costa nel tempo più breve possibile. Dove deve scendere a terra se può remare alla velocità di 2 km/h e camminare alla velocità di 4 km/h?

ESERCIZIO 8.37 Trovare l'equazione della retta r passante per il punto $(3, 4)$ tale che il triangolo costruito nel primo quadrante con vertici l'origine degli assi e le intersezioni della retta r con i semiassi positivi x e y abbia area minima. *[Nota: è implicito che la retta r debba intersecare entrambi i semiassi positivi x e y.]*

ESERCIZIO 8.38 Il padrone di un mobilificio sa che produrre 100 sedie al giorno costa 3000 euro, mentre produrne 300 costa 4600 euro.

(a) Esprimere il costo in funzione del numero di sedie, supponenendo lineare la relazione.

(b) Qual'è l'intercetta sull'asse y e cosa rappresenta?

Sulla base di ricerche di mercato, si ipotizza che, se p è il prezzo, il numero delle sedie vendute al giorno sarà dato dalla funzione $f(p) = 30\dfrac{128-p}{p}$ se $0 < p \leq 128$, sarà uguale a 0 se $p > 128$.

(a) Trovare a quale prezzo si riusciranno a vendere x sedie al giorno.

(b) Supponendo che si scelga il prezzo a cui si riesce a vendere l'intera produzione, trovare qual è il numero di sedie che conviene produrre per massimizzare il guadagno.

ESERCIZIO 8.39 Un'industria consuma 200 tonnellate di acciaio all'anno. Ordinandole x tonnellate alla volta (e quindi facendo $200/x$ ordini all'anno), ogni ordine costa $500+10x$ Euro. Ai costi degli ordini, vanno aggiunti i costi di gestione e ammortamento del magazzino che sono stimati in $1000x$ Euro all'anno (è necessario un magazzino più grande se ogni ordinativo è più grosso). Qual è la quantità x da ordinare ogni volta per rendere minimi i costi complessivi annuali dell'industria?

ESERCIZIO 8.40 In acqua e in soluzione il prodotto delle concentrazioni di $[H_3O^+]$ e $[OH^-]$ è prossima a 10^{-14} (misurazioni in moli). Sia

$$S = [H_3O^+] + [OH^-]$$

Determinare il valore di $[H_3O^+]$ che minimizza S.

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html