Laurea in Scienze e Tecnologie Biomolecolari, anno accademico 2014/15
Corso di Matematica e Statistica I

Lezione 9. 13 Ottobre 2014

1 ora *(uso delle derivate successive)*

Lezione 10. 15 Ottobre 2014

2 ora *(uso delle derivate successive)*

Data una funzione $f(x) : D \to \mathbb{R}$, il calcolo della derivata in ogni punto in cui ciò è possibile fornisce una nuova funzione $f'(x) : D_1 \to \mathbb{R}$ a priori definita in un dominio D_1 contenuto in D. E' ovviamente possibile andare avanti definendo tutte le derivate successive $f^{(n)} : D_n \to \mathbb{R}$.

Sviluppo di Taylor

L'uso della derivata seconda permette una migliore approssimazione della funzione nell'intorno di un punto, nello stesso spirito di quanto discusso nella lezione 8 (formula (1)). Infatti abbiamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{E}_2(x, x_0)$$

dove $\mathcal{E}_2(x, x_0)$ è tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathcal{E}_2(x, x_0)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Se poi la funzione si può derivare n volte si ha (formula di Taylor)

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \mathcal{E}_n(x, x_0) \end{aligned} \tag{1}$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\mathcal{E}_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Nel caso di un polinomio, lo sviluppo di Taylor coincide col polinomio stesso (in $x_0 = 0$). Infatti, se

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

abbiamo

$$P^{(i)}(x) = i! a_i + \frac{(i+1)!}{1!} a_{i+1} x + \cdots + \frac{n!}{(n-i)!} a_n x^{n-i} a_i$$

e dunque

$$P^{(i)}(0) = i!$$

La formula di Taylor (1) generalizza la formula di approssimazione, di una funzione con una funzione lineare:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nella (1), il resto $\mathcal{E}_n(x, x_0)$ si può precisare meglio nello stesso spirito della approssimazione di Lagrange. Infatti

$$\mathcal{E}_n(x, x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{(n+1)}$$

dove ξ è un punto opportuno nell'intervallo (x_0, x) (se $x > x_0$).

Esempi famosi di applicazione dello sviluppo di Taylor riguardano le funzioni elementari:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots \ ;$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \ ;$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \ ;$$

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 + \cdots \ ;$$

dove lo sviluppo si svolge in $x_0 = 0$ (ma potremmo calcolare l'espansione in qualunque punto), e

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots \ .$$

dove, invece $x_0 = 1$.

Calcolo dell'errore

L'uso dell'approssimazione al prim'ordine permette di calcolare approssimativamente come si propaga l'errore che si commette nella misura di una grandezza. Infatti

- supponiamo di misurare una grandezza il cui valore x viene determinato con un errore assoluto e_a e quindi con un errore relativo $e_r = \dfrac{e_a}{x}$
- volendo determinare l'errore commesso calcolando $F(x)$ abbiamo

$$\text{errore assoluto} \qquad E_a^F = F(x+e_a) - F(x) \approx F'(x)e_a = xF'(x)e_r \ ,$$

$$\text{errore relativo} \qquad E_r^F = \frac{F(x+e_a) - F(x)}{F(x)} \approx \frac{F'(x)}{F(x)}e_a = \frac{xF'(x)}{F(x)}e_r.$$

- Se ad esempio misuro il raggio di un cerchio e ottengo il valore r, commettendo un errore relativo e_r, l'errore che commetto nel calcolare l'area del cerchio $S(r) = \pi r^2$ è

$$E_a^S = 2\pi r^2 e_r, \quad E_r^S = 2e_r$$

Calcolo di limiti

Con le approssimazioni basate sull'espansione di Taylor ci si può aiutare a calcolare certi limiti del tipo ($x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}.$$

Infatti abbiamo gli esempi

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{E}_4(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{\mathcal{E}_4(x,0)}{x}\right) = 1$$
- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+\mathcal{E}_2(x,0))^2}{\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{E}_3(x,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \mathcal{E}_2^2(x,0) + 2x\mathcal{E}_2(x,0)}{\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{E}_3(x,0)} = \\ = \lim_{x\to 0} 2\frac{1 + \frac{\mathcal{E}_2^2(x,0)}{x^2} + 2\frac{\mathcal{E}_2(x,0)}{x}}{1 + 2\frac{\mathcal{E}_3(x,0)}{x^2}} = 2$$

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+\mathcal{E}_2(x,0)}{\frac{1}{2}x^2+\mathcal{E}_3(x,0)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\frac{1+\frac{\mathcal{E}_2(x,0)}{x}}{\frac{1}{2}+\frac{\mathcal{E}_3(x,0)}{x^2}} = +\infty$$

La regola di de l'Hôpital

Per altre forme indeterminate uno strumento utile è la regola di de l'Hôpital da usare seguendo la seguente ricetta:

- voglio calcolare il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ che corrisponde alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ (nota che $x_0 \in \mathbb{R}$, oppure $x_0 = \pm\infty$);
- provo a calcolare $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$;
- se il limite di cui al punto precedente esiste ($L \in \mathbb{R}$ oppure $L = \pm\infty$) allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Con questa regola si possono ad esempio determinare i limiti

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ (con n intero positivo) , $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ (con $\alpha > 0$) ,

ma non quelli del tipo

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

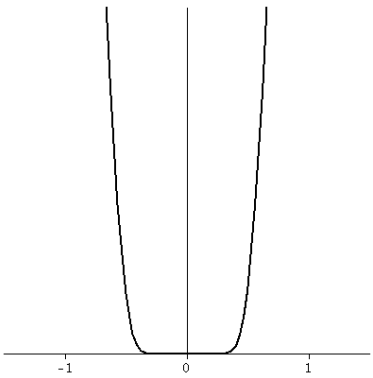

Figura 1: Il grafico della funzione (2).

Una curiosità

Un fatto molto importante da sottolineare è che non sempre la formula di Taylor risulta 'significativa'. Infatti la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{per} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{per} \quad x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

è derivabile con continuità quante volte vogliamo ma

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}$$

Infatti la funzione è estremamente piatta intorno a $x_0 = 0$ (vedi Figura 1) dunque la sua espansione in $x_0 = 0$ sarebbe ....

$$f(x) = \mathcal{E}_n(x, 0)$$

che ci dice solo che la funzione stessa è un infinitesimo di ordine superiore a qualunque potenza x^n. Così la funzione non si può esprimere come una *serie di potenze* come quelle già viste.

Uso della derivata seconda

Nello studio qualitativo di una funzione interviene anche la *derivata seconda* $f''(x)$ che è legata alla *convessità* . Infatti, se $f''(x) > 0$ in (a, b) allora la derivata prima $f'(x)$ è crescente in (a, b) e,

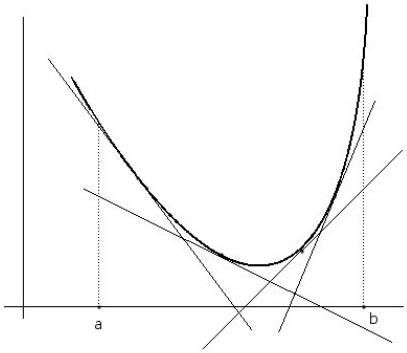

Figura 2: La relazione tra derivata seconda e convessità . Seguendo la pendenza della tangente al crescere di x si vede intuitivamente che la derivata prima $f'(x)$ è crescente in (a, b).

come si vede intuitivamente (vedi figura 2) seguendo la pendenza della tangente al crescere di x, la funzione $f(x)$ è convessa in (a, b). Dunque:

- se $f''(x) > 0$ in (a, b) la funzione $f(x)$ è convessa in (a, b);
- se $f''(x) < 0$ in (a, b) la funzione $f(x)$ è concava in (a, b).

La derivata seconda fornisce informazioni sulla natura dei punti critici:

- se x_0 è un punto critico e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale.

La cosa si comprende facilmente perché (vedi Figura 3) se $f''(x_0) < 0$, la $f'(x)$ è decrescente in x_0 e, visto che si annulla in x_0 in quanto punto critico, è positiva in un intorno destro di x_0, negativa

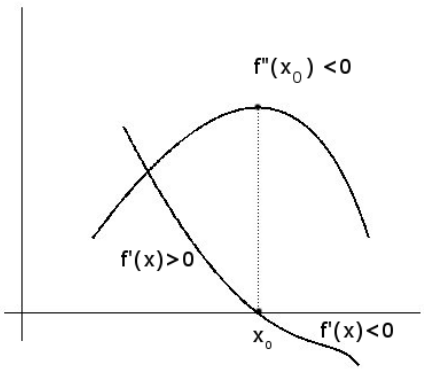

Figura 3: Se x_0 è un punto critico e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale.

in un intorno sinistro ... quindi passando alla funzione, $f(x)$ è crescente a sinistra di x_0 decrescente a destra ossia, x_0 è un punto di massimo locale.
Analogamente abbiamo che

- se x_0 è un punto critico e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo locale.

Invece

- la situazione resta indecidibile se $f''(x_0) = 0$.

Un esempio semplice ma completo che illustra tutti gli aspetti citati, è dato da

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2.$$

mostrato in Figura 4.

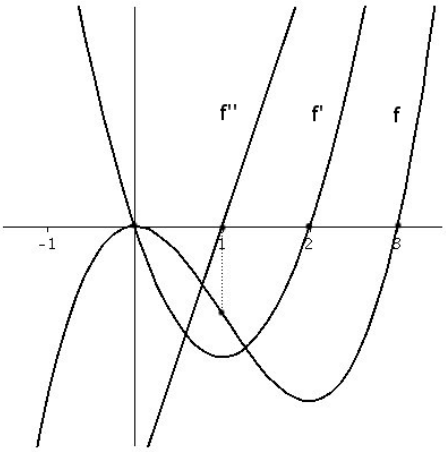

Figura 4: I grafici di $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ per la funzione $f(x) = 2x^3 - 6x^2$. In $x = 1$ cambia la convessità .

Quando la situazione è indecidibile perché $f''(x_0) = 0$ si possono considerare le derivate successive fino a che non si incontra una derivata diversa da zero. Infatti se

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0 \quad f^{(3)}(x_0) = 0, \quad \cdots \quad f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

la formula di Taylor fornisce

$$f(x) = f(x_0) + \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{\mathcal{E}_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n}\right](x - x_0)^n \ .$$

che permette di capire la natura del punto x_0. Infatti supponendo per fissare le idee che $f^{(n)}(x_0) > 0$ (altrimenti si svolgerebbero considerazioni analoghe), quando x è vicino a x_0, il termine tra parentesi quadre risulta positivo e dunque

- se n è pari anche $(x - x_0)^n$ è positivo per cui se $x \neq x_0$

  $$f(x) > f(x_0)$$

  e x_0 è un punto di minimo.

- se n è dispari, $(x - x_0)^n$ è positivo per $x > x_0$, negativo per $x < x_0$, per cui

  $$f(x) > f(x_0) \ \text{ per } \ x > x_0 \ \textit{ mentre } \ f(x) < f(x_0) \ \text{ per } \ x < x_0$$

  e x_0 è un punto di flesso crescente.

ESERCIZI

ESERCIZIO 10.1 determinare gli intervalli di convessità e concavità delle seguenti funzioni

$$f(x) = xe^x, \quad f(x) = \sin^2 x, \quad x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

ESERCIZIO 10.2 Per ciascuna delle seguenti funzioni trovare la funzione quadratica che meglio l'approssima nel punto $x = 0$

$$f(x) = (x^2 + 2)e^x \qquad f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$$

$$f(x) = \sin x e^x \qquad f(x) = x^3 \ln(x + 1)$$

ESERCIZIO 10.3 Una popolazione di mammiferi segue la legge di crescita

$$N(t) = N_0(2 + \sin t)e^{0.2t}$$

dove $N(t)$ è il numero di individui e t il tempo misurato in anni. Determinare la migliore approssimazione quadratica di $N(t)$ nel punto $t_0 = 7$.

ESERCIZIO 10.4 Calcolare i seguenti limiti usando la regola di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x}{x^2 + x + 2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x + 2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+2}}{x^2 + 1}$$

ESERCIZIO 10.5 Calcolare i seguenti limiti usando sia la regola di de l'Hôpital che lo sviluppo di Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x + x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(x)}{e^x(1 - \cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)\sin x^2}{1 - \cos^2 x}$$

Questi e altri esercizi, insieme ad appunti, avvisi e istruzioni, si trovano sul sito del corso all'indirizzo
http://www.science.unitn.it/~ iannelli/_corsi/elenco_corsi_2014-2015.html