Geometria

Quinto appello, a.a. 2001/2002

11 luglio 2002

Esercizio 1 Sia A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 3 & -6 & 4 \\ 4 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico di A.
2. Determinare gli autovalori di A.
3. Determinare la dimensione degli autospazi di A.
4. Dire, motivando la risposta se A è diagonalizzabile o no.

Esercizio 2 Sia A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -7 & -4 \\ -3 & -6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il rango di A.
2. Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di A.
3. Detto $b_k = \begin{pmatrix} 2k \\ 5k+1 \\ -7k-2 \end{pmatrix}$, dire, motivando la risposta, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $Ax = b_k$ ammette soluzione ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 3 Sia $W \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base ortonormale di W.
2. Determinare una base di $W^\perp$
3. Detto $v = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$, determinare la decomposizione ortogonale di v come somma $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$

Esercizio 4 Sia r la retta di equazioni cartesiane
$$r := \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y - z = 2 \end{cases}$$
e $P = (1, 3, -2)$.

1. Determinare il piano Π passante per P ed ortogonale a r.
2. Determinare la retta s passante per P ed ortogonale a Π.
3. Dire, motivando la risposta, se esiste un piano contenente r e s ed in caso di risposta affermativa, determinarlo.

Soluzione dell'esercizio 1 , 0, -8, -8, [0, 1, vector([2, 1, 0])], [-8, 2, vector([2, 1, -2])]

(1). Il polinomio caratteristico è dato da:

$$P_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -2-t & 4 & 8 \\ 3 & -6-t & 4 \\ 4 & -8 & -8-t \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante si ottiene $P_A(t) = -t(t+8)^2$.

(2). Gli autovalori sono le radici di $P_A(t)$ e quindi sono 0 e -8.

(3). Indichiamo con V_0 e V_{-8} gli autospazi relativi agli autovalori 0 e -8 rispettivamente. Allora $V_0 = \ker(A)$ e $V_{-8} = \ker(A + 8I)$.

Riducendo a scala le matrici A e $A + 8I$ si ottiene che $\mathrm{rk}(A) = 2$ e $\mathrm{rk}\, A + *i = 2$ quindi $\dim(V_0) = 1$ e $\dim(V_{-8}) = 1$

(4). La matrice A non è diagonalizzabile. Dato che la somma delle dimensioni degli autospazi è 2 che è diverso dalla dimensione dello spazio ambiente (3). ❏

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Una ridotta a gradini di A è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$.

(2). $\dim(\mathrm{im}(A) = \mathrm{rk}(A) = 2$ e una base di $\mathrm{im}(A)$ è data dalle colonne della matrice A corrispondenti alle colonne dei pivot, quindi una base di $\mathrm{im}(A)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$.

$\dim(\ker(A)) = 4 - \mathrm{rk}(A) = 4 - 2 = 2$. Per determinare una base del nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice A che è equivalente a quello associato alla sua ridotta a scala:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ z - 4w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ z = 4w \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - 16w = 0 \\ z = 4w \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y + 16w \\ z = 4w \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2\beta + 16\alpha \\ y = \beta \\ z = 4\alpha \\ w = \alpha \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

e quindi una base di $\ker(A)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(3). Riducendo a scala la matrice completa del sistema, $(A|b_k)$ si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 1 & -4 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right)$$

quindi il sistema è compatibile se e solo se $k = 0$. Risolvendo il sistema con $k = 0$ si ottiene che le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} x = 4 - 2\beta + 16\alpha \\ y = \beta \\ z = 1 + 4\alpha \\ w = \alpha \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

❏

due vettori w_1 e w_2:

$$\begin{aligned} w_1' &= w_1 \\ w_2' &= w_2 - \frac{\langle w_2, w_1'\rangle}{\langle w_1', w_1'\rangle} w_1 = w_2 - \frac{5}{4} w_1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \\ -5/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Una base ortonormale si ottiene allora normalizzando i due vettori:

$$\begin{aligned} w_1'' &= \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1'\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{4}} w_1' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ w_2'' &= \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2'\rangle}} = \frac{2}{\sqrt{11}} w_2' = \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \\ -5/\sqrt{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2). $W^\perp$ è l'insieme dei vettori ortogonali ha tutti i vettori di W, quindi $x \in W^\perp$ se e solo se

$$\begin{cases} \langle w_1, x\rangle = 0 \\ \langle w_2, x\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 \\ x_4 = x_2 + x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2\alpha - 2\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases}$$

e quindi una base di $W^\perp$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(3). Dato che $v = 16w_1 - 4w_2 \in W$, allora necessariamente $v_1 = v$ e $v_2 = 0$. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 (1). Scriviamo equazioni parametriche per r.

$$r := \begin{cases} x = 1/2 + t \\ y = -1/2 \\ z = t \end{cases}$$

Il vettore direttore della retta r è dato da $v = (1, 0, 1)$, quindi il piano Π ha equazione $\langle X - P, v\rangle = 0$ ossia

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \iff x - 1 + z + 2 = 0 \iff x + z + 1 = 0$$

(2). La retta cercata passa per P ed ha direzione ortogonale a Π, ossia parallela a r, quindi ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases} \tag{1}$$

(3). Dato che le rette r e s sono entrambe ortogonali al piano Π, sono tra loro parallele, quindi un piano che le contiene esiste.

L'equazione del generico piano passante per r è data da

$$a(x + y - z) + b(x - 3y - z - 2) = 0$$

affincé tale piano contenga anche la retta s, sar'a sufficiente che contenga un suo punto, ad esempio P. Si ha quindi la condizione:

$$a(1 + 3 - (-2)) + b(1 - 3 \cdot 3 - (-2) - 2) = 0 \iff 6a - 8b = 0 \iff 3a - 4b = 0$$

Basta allora prendere $a = 4$ e $b = 3$. L'equazione cercata è allora data da:

$$4(x + y - z) + 3(x - 3y - z - 2) = 0 \iff 7x - 5y - 7z - 6 = 0$$

❑