Il procedimento diagonale di Cantor

Domenico Luminati

11 gennaio 2002

Teorema 0.1 (Cantor). *Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva.*

Dimostrazione. Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\{\epsilon_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ la successione delle cifre decimali dello sviluppo decimale infinito di $f(n)$. Ossia ogni $\epsilon_i^{(n)}$ è un numero naturale tra 0 e 9. Sia $\delta : \mathbb{N} \to \{1, 2\}$ la funzione definita da

$$\delta(m) = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & \text{se } m \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{array} \right.$$

Sia x il numero reale che ha per sviluppo decimale infinito la successione $\{\delta(\epsilon_i^{(i)})\}_{i \in \mathbb{N}}$. Questo numero è diverso da tutti gli $f(n)$, dato che per ogni n si ha che la n-esima cifra decimale di x e la n-esima cifra decimale di $f(n)$ sono diverse (una è pari e l'altra è dispari) e questo, per l'unicità dello sviluppo decimale infinito, basta a provare che $x \neq f(n)$.

$$\begin{array}{lll}
f(1) = & 0\,. & 8\;9\;2\;2\;7\;0\;1\;2\;0\;7\;9\;3\;9\;3\;0\;7\;7\;0\;0\;9\;3\;7\;4\;8\;\ldots \\
f(2) = & 0\,. & 0\;9\;7\;2\;5\;9\;2\;9\;2\;7\;7\;1\;6\;0\;4\;8\;0\;3\;6\;5\;2\;2\;9\;2\;\ldots \\
f(3) = & 0\,. & 2\;7\;0\;5\;5\;1\;7\;2\;2\;7\;4\;4\;9\;7\;5\;0\;0\;4\;4\;5\;4\;0\;2\;0\;\ldots \\
f(4) = & 0\,. & 9\;5\;6\;6\;4\;4\;4\;1\;8\;9\;5\;9\;0\;1\;3\;7\;5\;3\;1\;1\;5\;4\;0\;6\;\ldots \\
f(5) = & 0\,. & 6\;1\;5\;7\;2\;9\;5\;6\;7\;0\;8\;0\;1\;8\;8\;0\;1\;1\;7\;7\;6\;0\;9\;5\;\ldots \\
f(6) = & 0\,. & 8\;4\;3\;0\;4\;2\;5\;8\;4\;2\;1\;2\;5\;7\;5\;5\;3\;8\;8\;9\;1\;5\;8\;9\;\ldots \\
f(7) = & 0\,. & 0\;8\;4\;1\;8\;2\;9\;7\;9\;7\;9\;9\;3\;2\;9\;2\;9\;0\;4\;1\;7\;0\;0\;8\;\ldots \\
f(8) = & 0\,. & 8\;3\;6\;3\;1\;7\;9\;2\;2\;8\;2\;0\;6\;9\;4\;7\;0\;0\;8\;9\;7\;2\;9\;1\;\ldots \\
f(9) = & 0\,. & 3\;5\;7\;4\;7\;8\;9\;6\;5\;7\;5\;8\;1\;2\;0\;9\;0\;8\;3\;8\;1\;2\;8\;3\;\ldots \\
f(10) = & 0\,. & 7\;8\;8\;1\;1\;8\;7\;7\;0\;4\;4\;2\;1\;8\;5\;2\;3\;8\;9\;2\;6\;3\;9\;5\;\ldots \\
f(11) = & 0\,. & 0\;3\;0\;9\;5\;7\;0\;3\;7\;5\;6\;2\;9\;1\;0\;6\;7\;9\;8\;3\;3\;9\;1\;7\;\ldots \\
f(12) = & 0\,. & 8\;3\;4\;4\;7\;0\;4\;8\;1\;3\;5\;6\;5\;6\;4\;2\;2\;0\;7\;9\;6\;2\;4\;9\;\ldots \\
f(13) = & 0\,. & 2\;0\;2\;6\;2\;7\;6\;8\;5\;1\;7\;7\;3\;1\;8\;8\;2\;6\;4\;9\;3\;6\;4\;0\;\ldots \\
f(14) = & 0\,. & 6\;0\;6\;2\;7\;6\;1\;4\;4\;5\;0\;3\;1\;8\;7\;2\;1\;7\;3\;2\;5\;9\;8\;4\;\ldots \\
f(15) = & 0\,. & 0\;8\;0\;2\;6\;5\;3\;8\;6\;8\;1\;3\;2\;2\;7\;7\;7\;0\;6\;0\;3\;2\;5\;2\;\ldots \\
f(16) = & 0\,. & 0\;4\;3\;1\;4\;2\;8\;7\;6\;3\;1\;2\;8\;0\;6\;5\;5\;2\;1\;5\;8\;3\;8\;9\;\ldots \\
\vdots & & \\
x = & 0\,. & 1\;2\;1\;1\;1\;1\;2\;1\;2\;1\;1\;1\;2\;1\;2\;2\;\ldots
\end{array}$$

❑

Lo stesso procedimento può essere utilizzato per provare che le parti dei numeri naturali non sono numerabili.

Teorema 0.2. *Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ non è suriettiva.*

Dimostrazione. Un sottinsieme A di $\mathbb{N}$, può essere descritto da una successione $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ costituita da 1 e 0, basta porre

$$\epsilon_i = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & \text{se } i \in A \\ 0 & \text{se } i \notin A \end{array} \right.$$

Chiaramente la corrispondenza tra parti di $\mathbb{N}$ e successioni di 0 e 1 è biunivoca (dimostrarlo!).

Sia allora $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ e per ogni n sia $\{\epsilon_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ la successione che rappresenta $f(n)$. Detta $\delta : \{0,1\} \to' \{0,1\}$ la funzione definita da

$$\delta(0) = 1 \qquad \delta(1) = 0$$

si consideri la successione $\{\epsilon_i\}$ ottenuta ponendo $\epsilon_i = \delta(\epsilon_i^i)$ per ogni i. Come nel caso precedente, la successione ϵ_i è diversa da tutte le precedenti, e quindi definisce un insieme diverso da tutti gli $f(n)$. ❏

Osservazione 0.3. In realtà si può dimostrare che $\mathbb{R}$ e $2^{\mathbb{N}}$ sono in bigezione.

Osservazione 0.4. Osserviamo che l'insieme A definito dalla successione ϵ_i nella dimostarzione precedente, può essere descritto anche in un altro modo:

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin f(i)\}$$

dato che

$$i \in A \iff \epsilon_i = 1 \iff \epsilon_i^{(i)} = 0 \iff i \notin f(i).$$

Questa descrizione, permette di generalizzare il teorema appena dimostrato:

Teorema 0.5 (Cantor). *Se X è un insieme, allora ogni funzione $f : X \to 2^X$ non è suriettiva.*

Dimostrazione. Sia $f : X \to 2^X$ e si consideri l'insieme

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Proviamo che A non è nell'immagine di f. Infatti se $A = f(z)$ si ha un assurdo. Infatti, per definizione di A, $z \in A$ se e solo se $z \notin f(z) = A$. ❏