ESERCIZI

1. Insiemi, funzioni e cardinalità

Esercizio 1.1. *Si dimostri che:*

$$((A \subset B) \text{ e } (B \subseteq C)) \Rightarrow A \subset C.$$

Con $A \subset B$ si intende $A \subseteq B$ ma $A \neq B$.

Esercizio 1.2. *Si dimostri che $(A \bigtriangleup B = \emptyset) \Leftrightarrow (A = B)$.*

Esercizio 1.3. *Siano A e B due insiemi e sia $X = A \cup B$, $C = A \cap B$. Supponiamo che gli insiemi C, $A - B, B - A$, siano non vuoti. Quali delle seguenti affermazioni è vera?*

- $B \not\subseteq C$;
- $(A - B) \cap C = \emptyset$;
- $(B - A) \cap A \subseteq C$.

Esercizio 1.4. *Descrivere l'insieme dato dalla differenza simmetrica dei seguenti insiemi:*

$$A := \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$$

,

$$B := \{2x | x \in \mathbb{Z}\}$$

.

Esercizio 1.5. *Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da*

$$f(m, n) = mn + m + n.$$

È vero che f è iniettiva?

È vero che f è suriettiva?

Trovare $f^{-1}(4)$.

Esercizio 1.6. *Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(n) = 4n+1$. Dire se f è iniettiva e/o suriettiva. Trovare $f(f^{-1}(\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}))$. Esiste $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$?*

Esercizio 1.7. *Sia $f : A \to B$ un'applicazione e X e Y sottinsiemi di A, mostrare che $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ e che $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. Si mostri che se f è iniettiva si ha che $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.*

Esercizio 1.8. *Dati $a,\ b \in \mathbb{Z}$ si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x) = ax + b$; si determini per quali valori di a e b l'applicazione è biiettiva.*

Esercizio 1.9. *Sia $A = \{3n | n \in N\}$ un sottinsieme di $\mathbb{N}$. Dimostrare che $|A| = |\mathbb{N}|$. Dimostrare che il complementare di A in $\mathbb{N}$ è equipotente a $\mathbb{N}$.*

Esercizio 1.10. *Si consideri l'insieme $P = \{X | X \subseteq \mathbb{N}\}$, mostrare che $|P| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.*

Esercizio 1.11. *Mostrare che gli intervalli $(0,\ 1) \subset \mathbb{R}$ e $(0,\ 3) \subset \mathbb{R}$ sono equipotenti.*

Esercizio 1.12. *Siano X e Y insiemi finiti e siano $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Si determini in funzione delle cardinalità di X e Y la cardinalità dei seguenti insiemi:*

$$H := \{h \in Y^X | h(x_0) = y_0\}$$

,

$$K := \{h \in H | h \text{ iniettiva}\}.$$

Esercizio 1.13. *Siano* X, Y, Z, K, *insiemi finiti a due a due disgiunti, calcolare* $|X^{Y\cup Z\cup K}|$.

Esercizio 1.14. *Sia* A *un insieme e sia* $f : A \to \mathbb{N}$ *un'applicazione iniettiva, si risponda ai seguenti quesiti:*

1. *Sapendo che* $f(A) = \{1,\ 2,\ 3\}$ *cosa posso dire della cardinalità di* A*?*
2. *Sapendo che* $f(A)$ *è un sottinsieme proprio di* $\mathbb{N}$*, cosa posso dire della cardinalità di* A*?*

Esercizio 1.15. *Si consideri l'insieme* $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$*. Determinare il numero dei sottinsiemi di* A*. Sia* $B = \{7,\ 8\}$*, determinare la cardinalità di* A^B *e di* B^A*. Sia* $C = \{10,\ 11,\ 12\}$*, determinare* $|C^{A\cup B}|$.

2. Calcolo combinatorio

Esercizio 2.1. *Sia* A *un insieme con 5 elementi e* B *uno con 9 elementi, quali di questi numeri può essere la cardinalità dell'unione: 1, 4, 7, 9, 14, 21, 23?*

Esercizio 2.2. *Dei numeri di quattro cifre formati con le nove cifre* $1,\ 2, \ldots, 9$ *si trovi:*

1. *quanti hanno le cifre tutte distinte,*
2. *quanti hanno le cifre in ordine crescente,*
3. *quanti hanno due cifre pari e due cifre dispari.*

Esercizio 2.3. *Quanti sono i numeri di quattro cifre tutte distinte che non iniziano con 0?*

Esercizio 2.4. *In quanti modo otto rematori possono disporsi in un canotto, con la limitazione che i due più deboli non vadano né al primo né all'ultimo posto?*

Esercizio 2.5. *In quanti modi si possono ordinare (linearmente) n oggetti, di cui m_1 sono uguali tra loro, m_2 uguali fra loro (e diversi dai precedenti), ..., m_r uguali tra loro (e diversi da tutti i precedenti)? $(m_1 + \ldots + m_r) = n$.*

Esercizio 2.6. *In quanti modi diversi si possono disporre n persone attorno a un tavolo rotondo? (Si pensa che due disposizioni coincidono se ciascuno dei presenti ha le stesse due persone accanto).*

Esercizio 2.7. *Usando le 16 consonanti e le 5 vocali dell'alfabeto italiano, quante parole (non necessariamente di senso compiuto) di 3 lettere si possono formare? Quante parole di tre lettere soddisfano la condizione di contenere almeno una vocale?*

Esercizio 2.8. *Ho quattro libri, uno rosso, uno giallo, uno verde e uno blu. In quanti modi posso disporli sullo scaffale in modo che quello blu e quello verde non siano vicini?*

Esercizio 2.9. *Un maestro di musica deve costituire un coro, formato da 8 soprani, 7 tenori e 6 baritoni. Può scegliere tra 30 candidati, 10 per ogni categoria. Quanti cori diversi può formare?*

3. Congruenze

Esercizio 3.1. *Trovare $x,\ y \in \mathbb{Z}$ tali che $1 = 15x + 26y$.*

Esercizio 3.2. *Trovare $x,\ y \in \mathbb{Z}$ tali che $33x + 50y = 24$*

Esercizio 3.3. *Risolvere se possibile le seguenti congruenze:*

1. $65x \equiv 42 \mod 2$;
2. $34x \equiv 1 \mod 15$;
3. $23x \equiv 14 \mod 59$;
4. $77x \equiv 11 \mod 22$;

Esercizio 3.4. *Calcolare il resto della divisione di 10! per 11.*

Esercizio 3.5. *Dire se il seguente sistema di congruenze:*

$$\begin{cases} x \equiv 7 \mod 9 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

ammette soluzioni, e in caso positivo determinarle.

Esercizio 3.6. *Si risolva il seguente sistema di congruenze:*

$$\begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \mod 8 \\ 36x \equiv 322 \mod 5 \end{cases}$$

Esercizio 3.7. *Si risolva il seguente sistema di congruenze:*

$$\begin{cases} 10x \equiv 53 \mod 8 \\ 3x \equiv 32 \mod 5 \end{cases}$$

Esercizio 3.8. *Si determinino gli invertibili di* $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ *e si trovi l'inverso di ogni invertibile.*

Esercizio 3.9. *Si trovino gli inversi degli elementi invertibili di* $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

4. Grafi

Esercizio 4.1. *Sia G un grafo regolare con 8 vertici e 16 lati. Dire qual è il grado comune di tutti i vertici. Sapendo inoltre che G è un grafo bipartito completo, dire il numero dei vertici dei due sottinsiemi in cui è suddiviso l'insieme $V(G)$. È vero che G è connesso?*

Esercizio 4.2. *Sia G un grafo con 8 vertici e 2 componenti connesse. Qual è il massimo numero di lati che può avere G? Disegnare il grafo con il massimo numero di lati. Se G ha 10 lati, quanti lati ha il complementare di G?*

Esercizio 4.3. *Sia G un grafo con 7 vertici e 11 lati. Supponiamo inoltre che G abbia due componenti connesse, e che ciascuna componente connessa sia un grafo completo. Trovare il numero di vertici di ogni componente. È vero che G è bibartito?*

Esercizio 4.4. *Se un grafo G ha 7 lati e il suo complementare ne ha 8, quanti vertici ha G? Se un grafo regolare ha 7 lati, quanti vertici ha? Se G è un grafo con 6 vertici e il suo complementare ha il doppio dei lati di G, quanti lati ha G?*

Esercizio 4.5. *Mostrare che un grafo G contiene un triangolo se e solo se esistono i, j tale che A_G, A_G^2 hanno l'entrata (i,j) non nulla.*

(Con A_G intendo la matrice di adiacenza di G.)

Esercizio 4.6. *Sia G un grafo con almeno due vertici; dimostrare che G contiene due vertici con lo stesso grado.*

Esercizio 4.7. *Sia G un grafo con 8 vertici e 7 lati. Supponiamo che G abbia un ciclo C di lunghezza 6. È vero che G è sconnesso? Supponiamo che uno e uno solo dei vertici del ciclo C abbia grado 3. È vero che G è bipartito?*

Esercizio 4.8. *Sia G un grafo con 6 vertici privo di punti isolati. Supponiamo inoltre che G abbia un lato in più del suo complementare $\overline{G}$. Quanti lati ha G? È vero che G è connesso? Con i dati che abbiamo, è possibile stabilire se $\overline{G}$ èonnesso?*

Esercizio 4.9. *Costruire, se possibile, un grafo bipartito che contenga un sottografo isomorfo a C_7.*

Costruire, se possibile un grafo bipartito che contenga un sottografo isomorfo a C_6.

Esercizio 4.10. *Sia G un grafo con due componenti connesse, sapendo che entrambe le componenti connesse sono complete, cosa si può dire del complementare di G?*

Esercizio 4.11. *Mostrare che se G è un grafo, c il numero di cicli di lunghezza 3 di G allora $6c = tr(A_G^3)$. (Con $tr(A_G^3)$ indico la traccia (somma degli elementi sulla diagonale) del cubo della matrice di adiacenza di G).*

Esercizio 4.12. *Mostrare che se due cicli distinti di un grafo G contengono un lato in comune e, allora esiste un ciclo di G che non contiene e.*

Esercizio 4.13. *Dire se le stringhe seguenti sono lo score di un grafo e in caso affermativo disegnare un grafo con tale score:*

1. $(2, 3, 3, 3, 1)$
2. $(3, 4, 4, 3, 1, 4, 1)$
3. $(5, 6, 4, 4, 1, 2, 1)$

Nei casi in cui la stringa rappresenta lo score di un grafo dire se esiste un grafo connesso con tale score.