1 Soluzione di alcuni degli esercizi della prima serie

1.4 Siano A e B insiemi e $C = A \triangle B$. Allora risulta che $C \triangle A = B$.
Applicando definizione e proprietà della differenza simmetrica una dimostrazione possibile è la seguente:
$C \triangle A = C \cup A \setminus (C \cap A) = (A \setminus B \cup B \setminus A) \cup A \setminus (A \setminus B \cup B \setminus A) \cap A = A \setminus B \cup B \setminus (A \setminus B \cap A) \cup (B \setminus A \cap A) = A \cup B \setminus (A \setminus B \cup \emptyset) = B$.

1.7 Siano A e B tali che $|A| = 4$ e $|B| = 7$.

(a) Quali tra i numeri $4, 7, 8, 9, 11, 13, 20$ potrebbero essere uguali ad $|A \cup B|$?
La cardinalità dell'unione di due insiemi finiti è data da

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Si noti che $|A \cap B| \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ da cui, applicando la formula segue che $|A \cup B| \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$ e quindi la risposta.

(b) Sono più le funzioni da A a B o quelle da B ad A? Motivare la risposta.
Le funzioni da A a B sono gli elementi di B^A e sono meno di quelle da B ad A, infatti: $|B^A| = |B|^|A| = 7^4 < |A^B| = 4^7$.

(c) Calcolare il numero di funzioni iniettive di B^A ed il numero di funzioni iniettive di A^B.
Le funzioni iniettive di B^A sono $\frac{7!}{(7-4)!} = 840$
Le funzioni iniettive di A^B sono 0 essendo $|B| > |A|$.

(d) Posto che $|A \cap B| = 1$, calcolare il numero di sottinsiemi di cardinalità 3 di $A \cup B$.
Se $|A \cap B| = 1$ allora $|A \cup B| = 10$, (segue dal punto (a)).
Il numero di sottinsiemi di cardinalità 3 di $A \cup B$ è $\binom{10}{3} = 120$

1.8 Sia X un insieme di cardinalità 8 ed $A \subset X$ tale che $|A| = 4$.

(a) Il numero di sottinsiemi propri di X disgiunti da A è uguale al numero dei sottinsiemi di $X \setminus A$ meno l'insieme vuoto, ovvero $2^4 - 1 = 15$.

(b) Il numero di sottinsiemi di X che contengono A si può ottenere considerando che $\{Y \in 2^X : A \subseteq Y\}$ è in biiezione con $\{Z \in 2^{X \setminus A}\}$, basta osservare che se $Y \in 2^X$, allora $Y \setminus A \in 2^{X \setminus A}$. Tale numero è 2^4.

(c) Il numero di sottinsiemi di X che hanno in comune esattamente un elemento con A, si ottiene considerando che questi sottinsiemi si possono costruire prendendo un sottinsieme di X disgiunto da A ed aggiungendo un elemento di A, dunque in totale sono $\binom{4}{1}(2^4) = 64$.

(d) Il numero di sottinsiemi di X che hanno in comune esattamente 3 elementi con A è $\binom{4}{3}(2^4) = 64$.

(e) Il numero di sottinsiemi di X che hanno in comune 2 elementi con A è $\binom{4}{2}(2^4) = 96$.

(f) Il numero di sottinsiemi di X che non sono disgiunti da A è $2^8 - 2^4 = 240$

1.9 Sia $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ una funzione iniettiva.

(a) $|f^{-1}(0)| \in \{0, 1\}$ infatti se $0 \in Im(f)$, allora essendo f iniettiva si ha $|f^{-1}(0)| = 1$ altrimenti $|f^{-1}(0)| = 0$.

(b) Analogamente ad (a) $|f^{-1}(\{0, 8\})| \in \{1, 2\}$.

(c) Le f iniettive che si possono costruire tra questi due insiemi sono $\frac{9!}{(9-8)!} = 9!$

(d) Le f iniettive che si possono costruire con la proprietà che $f(1) = 3$ sono tante quante le funzioni iniettive da un insieme di cardinalità 7 ad uno di cardinalità 8, dato che l'immagine di un punto è fissata, dunque sono $\frac{8!}{(8-7)!} = 8!$