Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 2001/2002
compito 2

15 luglio 2002

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $x^{23} \equiv 9 \mod 31$. Si determini inoltre la minima soluzione positiva.

Esercizio 2 Sia $X = I_9 = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$ e sia $Y = \{n \in I_9 \mid n \text{ è pari}\}$. Si calcolino le cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $\mathcal{P}_1 = \{A \in 2^X \mid Y \subseteq A\}$;
2. $\mathcal{P}_2 = \{A \in 2^X \mid |Y \cap A| = 2\}$;
3. $\mathcal{P}_3 = \{A \in 2^X \mid Y \cap A \neq \varnothing\}$.

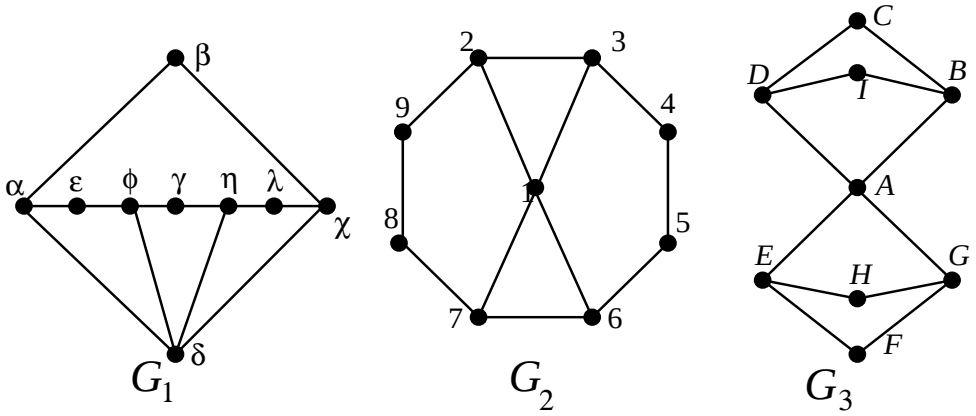
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 7, 9, 9) \qquad d_2 = (2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 9, 9, 9)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Dopo aver enunciato il principio di induzione nella seconda forma, si enunci e si provi il teorema di divisione euclidea tra numeri naturali.

Domanda di teoria 2. Enunciare e provare il teorema di caratterizzazione degli alberi finiti.

Soluzione dell'esercizio 1

$(9,31) = 1$ ossia 9 è invertibile modulo 31. Inoltre $\Phi(31) = 30$, e $(23,30) = 1$ quindi la congruenza ha soluzione unica $\mod 31$. Determiniamo un inverso positivo di 23 modulo 30.

$$\begin{aligned} 30 &= 23 + 7 \\ 23 &= 7 \cdot 3 + 2 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \end{aligned}$$

da cui

$$1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3(23 - 3 \cdot 7) = 10 \cdot 7 - 3 \cdot 23 = 10(30 - 23) - 3 \cdot 23 = 10 \cdot 30 - 13 \cdot 23.$$

Quindi -13 è un inverso di 23 modulo 30 se gli sommiamo 30 otteniamo 17 che quindi è un inverso positivo di 23 modulo 30, pertanto la congruenza è equivalente a $x \equiv 9^{17} \mod 38$ e quindi le soluzioni intere sono date da $\left[9^{17}\right]_{31} = \left[3^{34}\right]_{31} = \left[(3^3)^{11}\right]_{31}[3]_{31} = \left[27^{11}\right]_{31}[3]_{31} = \left[(-4)^{11}\right]_{31}[3]_{31} = \left[4^{10}\right]_{31}[-4]_{31}[3]_{31} = \left[4^{10}\right]_{31}[-12]_{31} = \left[(2^5)^4\right]_{31}[-12]_{31} = \left[32^4\right]_{31}[-12]_{31} = \left[(-1)^4\right]_{31}[-12]_{31} = [-12]_{31} = [19]_{31}$. Dato che $0 \leq 19 < 31$, 19 è la più piccola soluzione intera. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1).

$$|\mathcal{P}_1| = \left|2^{X \setminus Y}\right| = 2^{|X \setminus Y|} = 2^{|X|-|Y|} = 2^{9-5} = 2^4 = 16.$$

(2).

$$|\mathcal{P}_2| = \left|\binom{Y}{2} \times 2^{X \setminus Y}\right| = \left|\binom{Y}{2}\right| \left|2^{X \setminus Y}\right| = \binom{|Y|}{2} 16 = \binom{5}{2} 32 = 10 \cdot 16 = 160.$$

(3).

$$|\mathcal{P}_3| = \left|2^X \setminus 2^{X \setminus Y}\right| = \left|2^X\right| - \left|2^{X \setminus Y}\right| = 2^{|X|} - 2^{|X \setminus Y|} = 2^9 - 2^4 = 2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496.$$

Per le motivazioni si veda il corrispondente esercizio dell'altro compito dello stesso appello. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 Un grafo G tale che $\text{score}(G) = d_1$ dovrebbe avere 10 vertici, due vertice di grado 9, ossia adiacenti a tutti gli altri. Quindi ogni vertice del grafo è adiacente ad almeno due vertici, ovvero dovrebbe avere grado almeno 2. Ma questo è in contraddizione con il fatto che in d_1 c'è un elemento uguale a 1.

Per d_2 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned} d_1 &= (2,2,2,3,3,4,4,5,9,9,9) \\ d_1' &= (2,1,1,2,2,3,3,4,8,8) \\ d_1' &= (1,1,2,2,2,3,3,4,8,8) \\ d_1'' &= (1,0,1,1,1,2,2,3,7) \\ d_1'' &= (0,1,1,1,1,2,2,3,7) \\ d_1''' &= (0,0,0,0,0,1,1,2) \end{aligned}$$

Dato che d_1''' è realizzabile come score di un grafo, anche d_1 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1.

(1). La risposta è no. Se $G = (V,E)$ è un grafo tale che $\text{score}(G) = d_2$ allora non ha vertici di grado 1, mentre ogni albero finito ne ha almeno due.

(2). La risposta è no. Se $G = (V,E)$ è un grafo tale che $\text{score}(G) = d_2$ allora esiste $v \in V$ con $\deg(v) = 9$. Sia $u \in V$ l'unico vertce tale che $\{u,v\} \notin E$ (l'unico vertice non collegato a v), dato che in d_2 non ci sono elementi nulli, $\deg(u) \geq 1$, ossia esiste $w \in V$ tale che $\{u,w\} \in E$. Ma allora ogni vertice diverso da u è congiungibile con v (c'è un lato tra i due), u è congiungibile con v ($P = (u,w,v)$ è un cammino da u a v) quindi tutti i vertici sono congiungibili a v e pertanto G è connesso.

(3). La risposta è sì. Ad esempio il grafo dato in figura 1 è 2-connesso. Questo fatto lo si può mostrare dando un'asplicita costruzione di questo grafo a partire da un ciclo con un numero finito di aggiunzioni e suddivisioni di lati.

Si può in realtà mostrare che ogni grafo G che realizza d_2 è 2-connesso. Infatti se v è un suo vertice, allora $G - v$ ha 10 vertici, ha un vertice di grado 8 (dato che G ha almeno 2 vertici di grado 9) e ogni vertice di $G - v$ ha grado almeno 1 (dato che tutti i vertici di G hanno grado almeno 2). Ma allora lo stesso ragionamento fatto per provare il punto (1), prova che $G - v$ è connesso. ❑

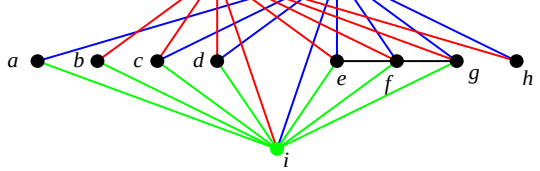


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici a, b, c, d, e, f, g, h, e dai lati $\{e, f\}, \{f, g\}$ che realizzano lo score d_2''' a cui sono successivamente aggiunti i vertici i, j e k ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_2'', d_2' e d_2.

Soluzione dell'esercizio 4 G_3 non è 2-connesso, infatti se a questo grafo si toglie il vertice A si ottengono i due cicli disgiunti (B, C, D, I, B) e (E, F, G, H, E).

G_2 è hamiltoniano (e quindi quindi è 2-connesso) in quanto c'è il ciclo $(1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2, 1)$.

Di conseguenza $G_2 \ncong G_3$.

Anche G_1 è 2-connesso, lo si può infatti ottenere da un ciclo aggiungendo e suddividendo lati (vedi figura 2), quindi $G_1 \ncong G_3$. In effetti, detto H il ciclo $H = (\alpha, \beta, \chi, \delta, \eta, \gamma, \varphi, \epsilon, \alpha)$, si ha che

$$G_1 \cong \Big(\big((H + \{\eta, \chi\})\%\{\eta, \chi\}\big) + \{\varphi, \delta\}\Big) + \{\alpha, \delta\}$$

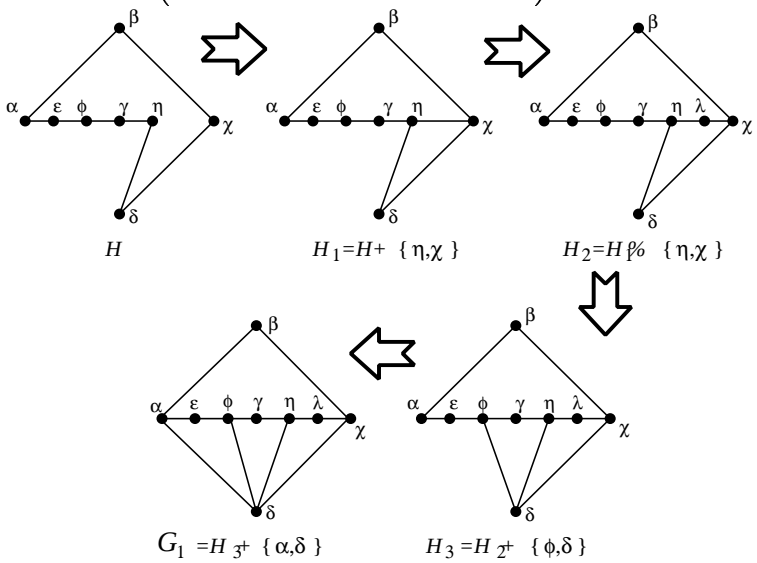


Figura 2: Il grafo G_1, dell'esercizio 4, è 2-connesso.

Anche il primo ed il secondo non sono isomorfi, infatti in G_1 ogni vertice di grado 2 è adiacente a due vertici di grado 3, mentre in G_2 c'è un vertice di grado 2 che è adiacente ad un altro vertice di grado 2 (in realtà tutti i vertici di grado 2 di G_2 hanno questa proprietà). ❑