

Esercitazioni del 7/3/2013

Esercizi sul calcolo della lunghezza di curve regolari a tratti

- Esempio 1: semicirconferenza $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$. Calcolo della lunghezza di γ utilizzando la formula generale $L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$, dove $\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una parametrizzazione di γ . Esempio di 2 possibili parametrizzazioni per γ :

$$\alpha_1(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad t \in [0, \pi]$$

$$\alpha_2(t) = (t, \sqrt{R^2 - t^2}) \quad t \in [-R, R]$$

e calcolo di $L(\gamma)$ utilizzando entrambe le parametrizzazioni proposte e verificando che si ottiene lo stesso risultato.

- Esercizio 2: Calcolo della lunghezza della curva piana parametrizzata da

$$\alpha(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t), \quad t \in [-\pi, \pi]$$

- Curve piane grafico di funzioni $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, parametrizzabili nella forma

$$\alpha(t) = (t, f(t)), \quad t \in [t_0, t_1]$$

Derivazione della formula $L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ come caso particolare della formula $L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$. Esempio: calcolo della lunghezza della curva grafico della funzione $y = x^{3/2}$, $x \in [0, 1]$.

- Curve piane esprimibili in coordinate polari nella forma

$$\alpha(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta), \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

Derivazione della formula $L(\gamma) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta$ come caso particolare della formula $L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$. Esempio: calcolo della lunghezza della spirale di Archimede $\rho(\theta) = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.