Complementi di Analisi Matematica

2 settembre 2013

Esercizio 1 (7 punti)

Si consideri la curva γ di parametrizzazione

$$\alpha(t) = (t^2 + 1, t, t^2 - 1), \qquad t \in [0, 2].$$

i. Si calcoli la curvatura di γ.

ii. Si calcoli l'integrale lungo γ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, -z)$.

Soluzione:

i. Utilizziamo la formula $k(t) = \frac{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$. Abbiamo:

$$\alpha'(t) = (2t, 1, 2t), \quad \alpha''(t) = (2, 0, 2), \quad \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (2, 0, -2),$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + 8t^2}, \qquad \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = 2\sqrt{2},$$

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(1 + 8t^2)^{3/2}}.$$

ii.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\
&= \int_0^2 (t, t^2 + 1, 1 - t^2)(2t, 1, 2t) dt \\
&= \int_0^2 (2t^2 + t^2 + 1 + 2t - 2t^3) dt = 6
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (8 punti)

Si consideri l'insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$. Si calcoli l'integrale su Ω della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = z + 1$.

Soluzione: Utilizzando le coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad z = z$$

Abbiamo che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2}\}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\int\int\int_{\Omega}(z+1)dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}(z+1)\rho dz d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{2-\rho^2}{2}+\sqrt{2-\rho^2}-\frac{\rho^4}{2}-\rho^2\right)\rho d\rho d\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{24}\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si calcolino il massimo ed il minimo assoluto della funzione $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$ sull'insieme $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\leq 1, |x|\leq 1\}$.

Soluzione: Dato che non ci sono punti in cui il gradiente di f non è definito, cerchiamo i punti di max-min assoluto di f su D tra:

i. i punti interni in cui $\nabla f=(0,0)$,

ii. i punti sul bordo di D.

i. Abbiamo che $\nabla f(x,y)=(3x^2+3y, 3x-3y^2)$. Risolvendo il sistema

$$
\begin{cases} 3x^2+3y=0 \\ 3x-3y^2=0 \end{cases}
$$

otteniamo due soluzioni: il punto (0,0), interno a D, in cui $f(0,0)=0$, e il punto $(1,-1)$, sul bordo di D, in cui $f(1,-1)=-1$.

ii. Analizziamo ora il bordo di D, composto da 4 segmenti:

- Il segmento $y=-1$, $-1\leq x\leq 1$, in cui f vale $f(x,-1)=x^3-3x+1$. Dato che $\frac{d}{dx}f(x,-1)=3x^2-3=0$ per $x=-1$ e $x=1$, sono candidati ad essere punti di max-min per f su tale segmento i punti $(1,-1)$ in cui $f(1,-1)=-1$ e $(-1,-1)$ in cui $f(-1,-1)=3$.

- Il segmento $y=1$, $-1\leq x\leq 1$, in cui f vale $f(x,1)=x^3+3x-1$. Dato che $\frac{d}{dx}f(x,1)=3x^2+3>0$ per ogni x, sono candidati ad essere punti di max-min per f su tale segmento i punti estremi $(1,1)$ in cui $f(1,1)=3$ e $(-1,1)$ in cui $f(-1,1)=-5$.

- Il segmento $x=1$, $-1\leq y\leq 1$, in cui f vale $f(1,y)=1+3y-y^3$. Dato che $\frac{d}{dy}f(1,y)=3-3y^2=0$ per $y=-1$ e $y=1$, sono candidati ad essere punti di max-min per f su tale segmento i punti $(1,-1)$ in cui $f(1,-1)=-1$ e $(1,1)$ in cui $f(1,1)=3$.

- Il segmento $x = -1$, $-1 \leq y \leq 1$, in cui f vale $f(-1, y) = -1 - 3y - y^3$. Dato che $\frac{d}{dy} f(-1, y) = -3 - 3y^2 < 0$ per ogni y, sono candidati ad essere punti di max-min per f su tale segmento i punti estremi $(-1, -1)$ in cui $f(-1, -1) = 3$ e $(-1, 1)$ in cui $f(-1, 1) = -5$.

Concludendo, sono punti di massimo assoluto per f su D i punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ in cui f vale 3, mentre il punto di minimo assoluto è $(-1, 1)$ in cui f vale -5.

Esercizio 4 (7 punti)

Due amici si trovano entrambi in coda ad uno sportello, insieme ad altre $n - 2$ persone. Qual è la probabilità che essi siano separati esattamente da k persone (dove $k \leq n - 2$)?

Soluzione: Fissiamo il numero n e consideriamo la fila formata da n persone. Se le posizioni nella fila vengono labellate con i numeri interi $i = 1...n$ (dove $i = 1$ indica il primo posto, $i = 2$ indica il secondo posto, fino a $i = n$ che indica l'ultimo posto), allora le possibili posizioni della coppia di amici vengono identificate con i sottoinsiemi $\{i, j\}$ di due elementi dell'insieme $\{1, ..., n\}$. Il numero di possibilità è dunque $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$. Fra tali possibilità , quelle in cui i due amici son separati in fila da esattamente k persone sono identificabili con quei particolari sottoinsiemi $\{i, j\}$ in cui, se indichiamo con i il minore tra i e j (cioé la posizione dell'amico che sta piú avanti nella fila), si ha $j = i + k + 1$. Dato che $j \leq n$, tali casi favorevoli sono in tutto $n - k - 1$. Supponendo tutte le possibili posizioni della coppia di amici sono equiprobabili, allora la probabilità cercata è data dal rapporto fra il numero di casi favorevoli ed il numero di casi possibili:

$$P = \frac{2(n - k - 1)}{n(n - 1)}.$$