Complementi di Analisi Matematica
4 novembre 2013

Esercizio 1 (8 punti)

Si calcolino versore tangente, versore normale e curvatura della curva piana grafico della funzione $y = -x^4 - 5x^2 + 3x$.

Soluzione:

Parametrizziamo la curva tramite la funzione $\alpha : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ data da

$$\alpha(t) = (t, -t^4 - 5t^2 + 3t, 0), \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Abbiamo $\alpha'(t) = (1, -4t^3 - 10t + 3, 0)$ e $\alpha''(t) = (0, -12t^2 - 10, 0)$.
Dalla formula $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ otteniamo:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (-4t^3 - 10t + 3)^2}}(1, -4t^3 - 10t + 3, 0).$$

Abbiamo inoltre che $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = (0, 0, -12t^2 - 10)$ e che $\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = |-12t^2 - 10| = 12t^2 + 10$.
Dalla formula $B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$ otteniamo $B(t) = (0, 0, -1)$. Dalla formula $N(t) = B(t) \wedge T(t)$ otteniamo

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (-4t^3 - 10t + 3)^2}}(-4t^3 - 10t + 3, -1, 0).$$

Dalla formula $K(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$ otteniamo:

$$K(t) = \frac{12t^2 + 10}{(1 + (-4t^3 - 10t + 3)^2)^{3/2}}.$$

Esercizio 2 (8 punti)

Si consideri la curva piana di parametrizzazione $\alpha(\theta) = (\theta \cos\theta, \theta \sin\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$.
-Si calcoli l'integrale di linea della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definita da $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
-Si calcoli l'integrale di linea del campo vettoriale $F(x, y) = (-2x + y, -x - 2y)$.

Soluzione:

-L'integrale lungo la curva della funzione f è dato da

$$\int f\, ds = \int_0^\pi f(\alpha(\theta))\|\alpha'(\theta)\| d\theta,$$

dove $f(\alpha(\theta)) = 2\theta$ e $\|\alpha'(\theta)\| = \sqrt{1 + \theta^2}$. Abbiamo quindi:

$$\int f\, ds = \int_0^\pi 2\theta\sqrt{1 + \theta^2} = \frac{2}{3}(1 + \theta^2)^{3/2}\Big|_0^\pi = \frac{2}{3}((1 + \pi^2)^{3/2} - 1).$$

-L'integrale lungo la curva del campo vettoriale F è dato da

$$\int F \cdot dr = \int_0^\pi F(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) d\theta,$$

dove $F(\alpha(\theta)) = (-2\theta\cos\theta + \theta\sin\theta, -\theta\cos\theta - 2\theta\sin\theta)$ e $\alpha'(\theta) = (\cos\theta - \theta\sin\theta, \sin\theta + \theta\cos\theta)$, da cui $F(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) = -\theta^2 - 2\theta$. Abbiamo quindi:

$$\int F \cdot dr = \int_0^\pi (-\theta^2 - 2\theta) d\theta = -\frac{\pi^3}{3} - \pi^2$$

Esercizio 3 (8 punti)

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = 4xy - y^4 - x^2$ e si individuino i punti di minimo locale, di massimo locale e di sella.

Soluzione: Cerchiamo prima di tutto i punti stazionari di f, ovvero i punti in cui $\nabla f = (0, 0)$. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 4y - 2x = 0 \\ 4x - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Che ha tre soluzioni: $(0, 0)$, $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Per capire la natura di ognuno di questi tre punti, analizziamo la matrice Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

Nel punto $(0, 0)$, la matrice Hessiana diviene:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante negativo. Possiamo dedurre che i due autovalori hanno segno discorde e che quindi $(0, 0)$ è un punto di sella.
In $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e in $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ la matrice Hessiana diviene:

$$Hf(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) = Hf(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -24 \end{pmatrix}$$

che ha determinante positivo e traccia negativa. Posssiamo quindi dedurre che i suoi due autovalori sono entrambi negativi e che $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sono punti di massimo relativo.

Esercizio 4 (8 punti)

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = 2x - 2y + 5$ e si determini il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x, x^2 + y^2 \leq 2\}$

Soluzione: Osserviamo che la funzione f è continua e che l'insieme A è chiuso e limitato quindi, per il teorema di Weierstrass, esistono il massimo ed il minimo assoluto di f su A.
La funzione f è ovunque differenziabile, quindi non ci sono punti singolari e i punti di massimo o di minimo assoluto di f su A vanno cercati tra:
a. i punti interni in cui $\nabla f = (0, 0)$,
b. i punti sul bordo di f.

a. Non ci sono punti in cui si annulla il gradiente, in qunto $\nabla f(x, y) = (2, -2)$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
b. Il bordo di A è composto dalla semicircanferenza $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x, x^2+y^2 = 2\}$ e dal segmento $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x, x \in [-1, 1]\}$.
Per quanto riguarda la semicirconferenza, la possiamo parametrizzare con la funzione

$$\alpha(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta) \qquad \theta \in [\pi/4, 5\pi/4]$$

e f su tale curva vale:

$$f(\alpha(\theta)) = 2\sqrt{2}\cos\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 5, \quad \theta \in [\pi/4, 5\pi/4]$$

Si ha che $\frac{d}{d\theta} f(\alpha(\theta)) = -2\sqrt{2}(\sin\theta + \cos\theta)$ e l'unico angolo all'interno dell'intervallo $[\pi/4, 5\pi/4]$ in cui $\frac{d}{d\theta} f(\alpha(\theta)) = 0$ è $\theta = 3\pi/4$, corrispondente al punto di coordinate (-1,1) dove f vale 1. Alle estremità , in $\theta = \pi/4$ e in $\theta = 5\pi/4$, la funzione vale $f(\alpha(\pi/4)) = f(\alpha(5\pi/4)) = 5$.

Sul segmento $y = x$, con $x \in [-1, 1]$ abbiamo che la funzione f vale $f(x, x) = 5$, ovvero è costante.
Concludendo, nel punto di coordinate (-1,1) la funzione f assume il valore minimo, che è 1, mentre il massimo vale 5 e viene raggiunto in tutti i punti del segmento $y = x$, con $x \in [-1, 1]$.